MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 12 *No* 01
Tahun 2024

GRAF BERARAH SEBAGAI REPRESENTASI TURNAMEN "ROUND-ROBIN" DAN SIFAT-SIFATNYA

Dimas Nugroho
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : dimas.19027@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Graf berarah D adalah pasang berurutan dari dua himpunan V(D) dan Γ(D), yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur sedemikian hingga setiap busur merupakan pasang berurutan dari dua titik V(D). Turnamen adalah orientasi dari graf komplet. Sebuah turnamen dapat dimodelkan atau direpresentasikan dengan sebuah graf berarah yang himpunan timnya berkorespondensi dengan himpunan titik pada graf berarah, dan dua titik u dan v dihubungkan dengan sebuah busur dari u ke v, jika dan hanya jika tim yang diwakili oleh titik u mengalahkan tim yang diwakili oleh titik v. Dengan demikian turnamen Round-Robin dapat direpresentasikan dengan graf berarah yang graf dasar adalah graf komplet
Kata kunci: Graf Berarah, Graf Komplet, Graf Dasar, Orientasi Graf, Busur, Turnamen Round-Robin

Abstract

A directed graph D is an ordered pair of two sets V(D) and Γ(D), namely a non-empty finite set whose members are called vertices and a finite set (which can be empty) whose members are called arcs such that each arc is an ordered pair from two points V(D). Tournaments are organizations of complete graphs. A tournament can be modeled or represented by a directed graph in which the set of organizations corresponds to the set of vertices in the directed graph, and two vertices u and v are connected by an arc from u to v, if and only if the team closest to the vertex u beats the team it represents by point v. Thus the Round-Robin tournament can be represented by a directed graph whose base graph is a complete graph
Keywords: Directed Graphs, Complete Graphs, Basic Graphs, Graph orientation, Arcs, Round-Robin Tournaments

1. PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan merupakan salah satu cabang Matematika yang sebenar- nya telah ada sejak dua ratus tahun yang silam. Pada awalnya penerapan Teori Graf kurang signifikan dikarenakan banyak dipakai untuk pemecahan teka teki *puzzle*. Namun pada akhirnya, sekarang mulai mengalami perkembangan baik dari defini-si, teori, hingga penerapannya. Banyak sekali aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam dalam berbagai bidang ilmu seperti: Ilmu Komputer, Teknik, Sains, bahkan Bisnis dan Ilmu Sosial.

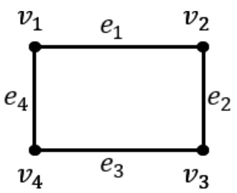
Turnamen menjadi salah satu topik yang menarik untuk dibahas. Turnamen merupakan graf berarah tanpa gelung sedemikian hingga setiap dua titik yang berbeda u dan v dihubungkan oleh busur (u,v) saja atau (v,u) saja. Adapun alasan graf berarah yang demikian diberi nama "Turnamen" adalah karena graf berarah tersebut dapat digunakan untuk mencatat hasil-hasil dalam suatu turnamen dengan aturan bahwa setiap dua tim harus bertanding tepat satu kali, dan tidak boleh ada seri, yang artinya pada setiap pertandingan harus ada tim yang menang, seperti misalnya pada pertandingan bulu tangkis. Jika dalam suatu pertandingan Tim A mengalahkan Tim B, maka terdapat busur yang mengarah dari Tim A ke Tim B. Sehingga derajat keluar tersebut menyatakan banyaknya kemenangan Tim yang diwakili oleh titik dan busur tersebut. Sebaliknya, derajat masuk suatu titik pada graf berarah menyatakan banyaknya kekalahan yang diwakili oleh titik dan busur tersebut. Lebih jelasnya, tim yang berkorespondensi dengan titik yang memiliki derajat keluar paling terbesar, dapat dikatan sebagai Tim yang menjadi juara dalam turnamen tersebut. Sehingga penerapan graf berarah pada Turnamen menjadi unsur penting dalam penentuan juara pada suatu kompetisi atau turnamen.

2. KAJIAN TEORI

A. Graf

Sebuah graf *G* berisikan dua himpunan yaitu himpunan berhingga kosong *V*(*G*) dari obyek-obyek yang disebut *titik* dan himpunan berhingga (mungkin kosong)*E*(*G*) yang elemen-elemennya disebut *sisi*, sedemikian hingga setiap elemen *e* dalam *E*(*G*) merupakan pasangan berurutan dari titik-titik di *V*(*G*) (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1 :

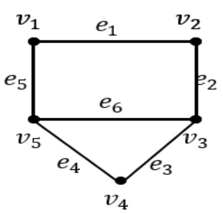


Gambar 2.1 Graf

B. Graf Sederhana

Graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan gelung *(loop)* disebut grafsederhana. (Budayasa, 2007).

Contoh 2.2 :

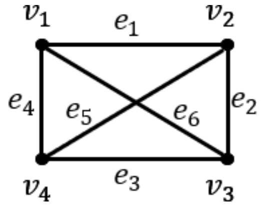


Gambar 2.2 Graf Sederhana

C. Graf Komplet

Graf komplet dengan *n* titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sedehana dengan*n* titik dan setiap titik yang berbeda dibubungkan dengan sebuah sisi.

Contoh 2.9:

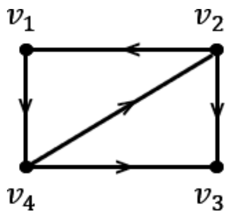


Gambar 2.8 K_4, graf komplet dengan 4 titik

D. Graf Berarah

Graf berarah D adalah pasang berurutan dari dua himpunan V(D) dan Γ(D), yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur sedemikian hingga setiap busur merupakan pasang berurutan dari dua titik V(D) (Budayasa, 2007).

Contoh 2.10 :



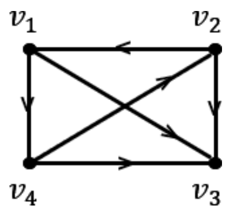
Gambar 2.9 Graf Berarah

E. Derajat Titik pada Graf Berarah

Misalkan *D* graf berarah dan $u, v \in V(D)$. Derajat keluar titik *v*, dilambangkan *od*(*v*), adalah banyaknya busur yang keluar dari titik *v*. Sedangkan, derajat masuktitik *v*, dilambangkan dengan *id*(*v*), adalah banyak nya busur yang masuk ke titik *v*. (Budayasa, 2007).

Contoh 2.13:

$od\,(v_1) = 2$; $id\,(v_1) = 1$; od $(v_2) = 2$; $id\,(v_2) = 1$; od $(v_3) = 0$; $id\,(v_3) = 3$; od $(v_4) = 2$; $id\,(v_4) = 1$



Gambar 2.10 Graf berarah D

3. PEMBAHASAN

A. KonsepTurnamen

Turnamen Round-Robin memiliki tiga ciri yaitu:

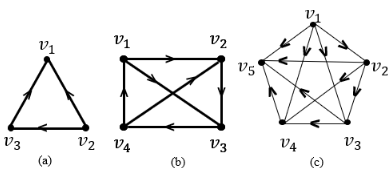
1. terdapat n tim,
2. setiap dua tim bertanding tepat satu kali,
3. pada setiap pertandingan tidak boleh seri, yang artinya dalam setiap pertandingan, salah satu tim harus mengalahkan tim yang lain.

Definisi 3.1 :

Turnamen dengan n titik, dilambangkan dengan T_n, adalah graf komplet K_n yang berorientasi.

Contoh 3.1 :

Beberapa contoh Turnamen T_3, T_4, T_5 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.1 (a)T_3, (b) T_4, (c) T_5

Teorema 3.1 :

1. Dalam setiap turnamen T_n, terdapat sebanyak $\frac{n\,(n-1)}{2}$ pertandingan.
2. Untuk bilangan bulat positif n, terdapat sebanyak $2^{\frac{n\,(n-1)}{2}}$ turnamen T_n yang berbeda.

Bukti:

1. Berdasarkan **Definisi 3.1,** banyaknya pertandingandalam T_n
   = banyaknya busur T_n
   = banyaknya sisi K_n
   $= \binom{n}{2}$
   $= \frac{n\,(n-1)}{2}$ ■
2. Perhatikan bahwa, untuk setiap sisi u dan v pada K_n , terdapat dua cara untukmemberi arah (orientasi) yaitu dari u ke v atau v ke u. Karena $|E\ (Kn)| = \frac{n\,(n-1)}{2}$,berdasarkan "Aturan Perkalian" banyaknya T_n berbeda adalah $2^{\frac{n\,(n-1)}{2}}$. ■

B. Sifat-Sifat Turnamen T_n

Teorema 3.2 :

Jika u adalah titik dalam turnamen T_n dengan $od(u)$*maksimum*, maka setiap titik di T_n terdapat lintasan berarah dari u ke v dengan panjang *maksimum* 2.

Bukti:

Misalkan $u \in V(T)$ dengan $od(u) = p$ dan $|V(T)| = n$.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_p$ adalah titik-titik T yang berhubungan langsung dari u.

Maka terdapat $n - p - 1$ titik-titik T yang lainnya berhubungan langsung ke titik u.

Namakan titik-titik tersebut dengan $y_1, y_2, \ldots, y_{n-p-1}$.

Karena $(u, x_i) \in \Gamma(T)$, $\forall i$, $1 \le i \le p$, maka ada lintasan berarah dengan panjang 1 darititik u ke titik x_i pada T.

Sekarang tinggal menunjukkan ada lintasan berarah dengan panjang 2 dari titik u ke titik y_j, $1 \le j \le n - p - 1$.

Andaikan terdapat suatu $j, 1 \le j \le n - p - 1$ sedemikian hingga y_j berhubungan langsung dengan titik $x_i, 1 \le i \le p$

Maka terdapat $p + l$ busur T busur yang keluar dari titik y_j; berarti $od\ \ y_j$

Kontradiksi bahwa titik u di T memilik derajat keluar maksimum $p = p + 1$

Jadi $\forall j, 1 \le i \le n - p - 1, y_j$ berhubungan langsung dari x_i untuk suatu $i, 1 \le i \le p$

Sehingga terdapat lintasan berarah u, xi , yj dengan panjang 2 pada T

Dengan ini teorema terbukti ■

Teorema 3.3 :

Setiap turnamen T_n memuat lintasan berarah Hamilton.

Bukti:

Untuk $n \ge 4$ dan setiap turnamen T_{n-1} memuat lintasan berarah Hamilton. Perhatikan turnamen T_n dan $v \in V(T_n)$. Maka $T_n - v$ adalah sebuah turnamen dengan $n-1$ titik. Misalkan $T_n - v = T_{n-1}$. Berdasarkan asumsi, T_{n-1} memuat lintasan berarah berarah Hamilton, Misalkan $P = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1})$ adalah lintasan berarah Hamilton pada $T_n - 1$.

- Jika ada busur dari titik v ke titik v_1 pada T_n, maka $P_1 = (v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1})$ sebuah lintasan berarah Hamilton pada T_n.

- Jika ada busur dari titik v_{n-1} ke titik v_1 pada T_n, maka $P_2 = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v)$ sebuah lintasan berarah Hamilton pada T_n.
- Jika tidak ada busur dari titik v ke titik v_1 dan tidak ada busur dari v_{n-1} ke v pada T_n, maka pasti ada sebuah titik x pada lintasan berarah P, sedemikian hingga terdapat busur dari titik x ke titik v pada T_n, ini dijamin oleh titik v_1 dengan sifat seperti itu, Misalkan v_i adalah titik terakhir pada P dengan sifat seperti itu, dengan $i \neq n-1$.

Maka ada busur dari titik v ke titik v_{i+1} pada T_n. Akibatnya, lintasan berarah $P_2 = (v_1, v_2, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{n-1})$ merupakan lintasan berarah Hamilton pada T_n.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Teorema 3.4:
Jika turnamen T_n terhubung kuat, maka T_n memuat sikel berarah dengan panjang 3.
Bukti:
Misalkan $v \in V(T_n)$ dan,
$A = \{x \in V(T) \mid vx \in \Gamma(T)\}$,
$B = \{y \in V(T) \mid yv \in \Gamma(T)\}$.
Jelas $A \cup B \cup \{v\} = V(T)$ dan $A \cap B = \emptyset$
Klaim: $\exists x_i \in A$ dan $y_j \in B, \ni x_i y_j \in \Gamma(T)$
Buktikan: Andaikan $\forall x_i \in A, y_j \in B, x_i y_j \notin \Gamma(T)$.
Maka $y_j x_i \in \Gamma(T)$. Akibatnya, tidak ada lintasan berarah dari titik v ke titik $y_j \in B$ pada T.
Kontradiksi, bahwa T_n terhubung kuat. Dari definisi A, B dan klaim, diperoleh (v, x_i, y_j, v) sebuah lintasan berarah panjang 3 pada T_n.
Dengan demikian teorema terbukti. ■

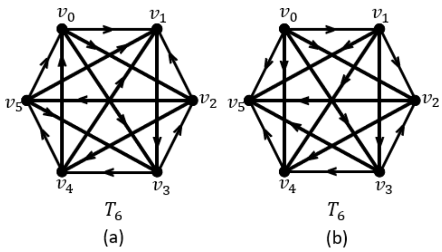
Teorema 3.5:
Jika turnamen T_n terhubung kuat, maka T_n memuat sikel berarah panjang $3, 4, 5, \ldots, n$.
Bukti:
Akan ditunjukkan T_n memuat sikel berarah panjang k atau $C_k, \forall k, 3 \leq k \leq n$; denganinduksi matematika pada k. Untuk $k = 3$, **Teorema 3.4** menjamin bahwa T_n memuat sikel berarah dengan panjang 3.
Asumsikan pernyataan benar untuk $k = t$, $3 < t < n$. Artinya, turnamen T_n terhubung kuat memuat sikel berarah dengan panjang t.
Akan ditunjukkan pernyataan benar untuk $k = t + 1$. Berdasarkan asumsi, T_n memuat sikel berarah panjang t. Misalkan sikel berarah tersebut $C_t = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_t, v_1)$.
Karena $3 < t < n$, ada sebuah titik T_n di luar sikel C_t. Misal ada sebuah titik v dari T_n di luar C_t, dengan sifat bahwa ada sebuah busur dari v ke v_i dan sebuah busur dari v_j ke v terletak pada sikel C_t. Maka terdapat sebuah titik v_i pada C_t sedemikianhingga v_{i-1}, v sebuah busur dan v, vi juga sebuah busur.
Akibatnya, $\hat{C} = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_t, v_1)$ sebuah sikel berarah dengan panjang $t + 1$ pada T_n.
Jika tidak ada titik v pada T_n di luar C_t, memiliki sifat di atas, maka himpunantitik-titik T_n di luar C_t dapat dipartisi menjadi dua yaitu:
$A = \{x \in V(T_n) - V(C_t) \mid v_i x \in \Gamma(T_n), v_i \in V(C_t)\}$, dan $B = y \in V(T_n) - V(C_t) \mid y v_i \in \Gamma(T_n), v_i \in V(C_t)$
Klaim : $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
Bukti Klaim:
Andaikan $A = \emptyset$ maka $V(T_n) - V(C_t) \cup B$, sehingga tidak ada lintasan berarah darisebuah titik di C_t ke sebuah titik di B pada T_n.
Kontradiksi dengan T_n graf berarah terhubung kuat.
Andaikan $B = \emptyset$ maka $V(T_n) - V(C_t) \cup A$, sehingga tidak ada lintasan berarah dari sebuah titik di A ke sebuah titik di C_t pada T_n. Ini kontradiksi bahwa T_n terhubungkuat.
Selanjutnya, karena Tn terhubng kuat, maka $\exists x_i \in A \wedge y_i \in B; \ni x_i y_i \in \Gamma(T_n)$.
Karena $v_1 x_i \in \Gamma(T_n)$ dan $y_i v_3 \in \Gamma(T_n)$, maka $\hat{C}$sikel berarah panjang $t + 1$ pada T_n.
Dengan demikian bukti teorema lengkap ■

Teorema 3.6:
Turnamen T_n Hamilton jika dan hanya jika T_n terhubung kuat.
Bukti:
$\rightarrow$
Karena T_n Hamilton, maka T_n memuat sikel berarah Hamilton, namakan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \ \ , v_n, v_1)$.
Jelas bahwa $V(T_n) = V(C_n)$ Misalkan $v_i, v_j \in V(C_n)$ dan $i < j, 1 \leq i \leq j \leq n$.Maka $P_1 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ lintasan berarah dari titik v_i ke titik v_j pada T_n.
Demikian juga $P_2 = (v_j, v_j + 1, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_j)$ lintasan berarah dari v_j ke v_i pada T_n.

Berdasarkan definisi, T_n terhubung kuat.
$\leftarrow$
Karena T_n terhubung kuat, berdasarkan **Teorema 3.5**, T_n memuat sikel panjang n.Karena $|V(T_n)| = n$, maka sikel panjang n pada T_n adalah sikel Hamilton.
Dengan demikian, teorema terbukti.■

C. Turnamen Transitif

Definisi 3.2:
Turnamen T_n dikatakan transitif jika uv busurT_n dan vw busur T_n , mak uw busur T_n.
Contoh 3.2:



Gambar 3.7 (a) T_6 bukan turnamen transitif dan (b) T_6 turnamen transitif

Teorema 3.7:
Turnamen T transitif jika dan hanya jika T tidak memuat sikel berarah.
Bukti:
$\rightarrow$
Andaikan T memuat sikel berarah. Misalkan $c = (v_1, v_2, v_3, ..., v_k, v_1)$ sikel berarah pada T. Maka $\forall i, 1 \le i \le k-1, v_iv_{i+1} \in \Gamma(T)$ dan $v_kv_1 \in \Gamma(T)$. Karena T transitif, $v_1v_2 \in \Gamma(T)$ dan $v_2v_3 \in \Gamma(T)$ maka $v_1v_3 \in \Gamma(T)$
Karena $v_1v_3 \in \Gamma(T)$ dan $v_3v_4 \in \Gamma(T)$, dan T Transitif, maka $v_1v_4 \in \Gamma(T)$.
Selanjutnya diperoleh, $\forall i, 2 \le i \le k-1, v_1v_i \in \Gamma(T)$.
Karena $v_1v_{k-1} \in \Gamma(T)$ dan $v_{k-1}v_k \in \Gamma(T)$, dan T transitif, maka $v_1v_k \in \Gamma(T)$.
Inikontradiksi dengan $v_kv_1 \in \Gamma(T)$
$\leftarrow$
Misalkan turnamen T tidak memuat sikel berarah.Misalkan $uv \in \Gamma(T)$ dan $vw \in \Gamma(T)$.
Karena T tidak memuat sikel berarah, maka $wu \not\in \Gamma(T)$.Akibatnya $uw \in \Gamma(T)$.
Berdasarkan **Definisi 3.3**, T turnamen transitif.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap.■

Teorema 3.8:
Turnamen T_n transitif jika dan hanya jika T_n memiliki tepat satu lintasan berarahHamilton.
Bukti:
Berdasarkan **Teorema 3.3**, T_n memiliki sebuah lintasan berarah Hamilton. Andaikan T_n memiliki lebih dari satu lintasan berarah Hamilton. Misalkan $P_1 = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$lintasan berarah Hamilton T_n.
Perhatikan bahwa, $\forall i, 1 \le i \le n+1, v_iv_{i+1} \in \Gamma(T_n)$.
Karena T_n transitif, maka $v_1v_k \in \Gamma(T_n), \forall k, 2 \le k \le n$
Karena P_1 dan P_2 lintasan berarah Hamilton pada T_n, maka
$V(T_n) = V(P_1) = V(P_2)$
Misalkan terdapat lintasan lain yaitu P_2 yang berbeda dengan P_1.
Karena lintasan berarah Hamilton P_2 berbeda dengan P_1, maka $v_{t-1}v_t \not\in \Gamma(T_n)$ untuksuatu $t, 2 \le t \le n$.
Ini kontradiksi dengan $v_{t-1}v_t \in \Gamma(P_1) \subseteq \Gamma(T_n))$
Misalkan satu-satunya lintasan berarah Hamilton pada T_n adalah $P_1 = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$
Maka, $\forall i, 1 \le i \le n-1, v_iv_{i+1} \in \Gamma(P_1) \le \Gamma(T_n)$
Klaim: $\forall i, 2 \le i \le n, v_iv_1 \not\in \Gamma(T_n)$.
Bukti Klaim:
Andaikan $\exists i, 2 \le i \le n$ sedemikian hingga $v_iv_1 \in \Gamma(T_n)$.
Maka, $(v_1, v_2, v_3, ..., v_i, v_1)$ sebuah sikel berarah pada T_n berdasarkan **Teorema 3.7**, T_n tidak transitif. Dengan kata lain kontradiksi.
Sehingga, $\forall i, 2 \le i \le n, v_iv_1 \in \Gamma(T_n)$. Ini berarti, T_n tidak memuat sikel berarah, dan berdasarkan **Teorema 3.7**, T_n transitif.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap.■

Teorema 3.9:
Dalam turnamen transitif T_n, terdapat satu Tim (pemain) selalu menang dansatu Tim (pemain) selalu kalah.
Bukti:
Karena turnamen T_n transitif, berdasarkan **Teorema 3.8**, T_n memiliki tepat satu kalilintasan berarah Hamilton. Misalkan lintasan berarah Hamilton tersebut adalah$P = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$
Perhatikan bahwa, $\forall i, 1 \le i \le n-1, v_iv_{i+1} \in \Gamma(T_n)$.
Sehingga $v_1v_2 \in \Gamma(T_n)$ dan $v_(n-1)v_n \in \Gamma(T_n)$.
Klaim: $\forall i, 3 \le i \le n, v_1v_i \in \Gamma(T_n)$
Bukti Klaim:
Andaikan, $\exists i, 3 \le i \le n, \ni v_1v_i \not\in \Gamma(T_n)$

Maka $v_1v_i \in \Gamma(T_n)$. Sehingga $(v_1, v_2, ..., v_i, v_1)$ sebuah sikel berarah pada T_n. Hal ini, kontradiksi dengan **Teorema 3.7**, bahwa dalam turnamen transitif tidak ada sebuahsikel berarah.

Klaim-1, terbukti. Karena $v_1v_2 \in \Gamma(T_n)$ dan $v_1v_i \in \Gamma(T_n)$, $\forall i, 3 \le i \le n$, $v_1v_i \in \Gamma(T_n)$.

Maka $od_{Tn}(v_1) = n - 1$. Ini berarti, Tim (pemain) yang diwakilkan oleh titik v_1 danT_n adalah Tim (pemain) selalu menang.

Klaim-2, $\forall i, 1 \le i \le n - 2$, $v_iv_n \in \Gamma(T_n)$.

Andaikan, $\exists i, 1 \le i \le n - 2, \ni v_iv_n \text{ ø } \Gamma(T_n)$.

Maka $v_nv_i \in \Gamma(T_n)$. Sehingga, $(v_i, v_i + 2, ..., v_n, v_i)$ sebuah sikel berarah pada T_n. Kontradiksi dengan **Teorema 3.7**.

Karena $v_{(n-1)}v_n \in \Gamma(T_n)$ dan $v_iv_n \in \Gamma(T_n)$, $\forall i$, $1 \le i \le n - 2$, maka $id_{Tn}(v_n) = n - 1$ dan $T_n(v_n) = 0$

Ini berarti Tim (pemain) yang diwakili oleh titik v_n dalam T_n adalah Tim (pemain)selalu kalah.

Dengan demikian, bukti Teorema lengkap.■

D. Barisan Skor dalam Turnamen

Misalkan u dan v dua titik berbeda dalam turnamen T_n. Jika $uv \in \Gamma(Tn)$, maka Tim yang diwakili oleh titik u mengalahkan Tim yang diwakili oleh titik v. Jika dalam suatu pertandingan, Tim yang menang diberi skor 1, dan Tim yang kalah diberi skor 0, maka "derajat keluar"sebuah titik merefleksikan skor yang diperolehTim yang diwakili oleh titik tersebut dalam turnamen.

Barisan bulat *non negative* monoton naik (monoton tidak turun) pada derajat keluar titik-titik di turnamen T_n disebut barisan skor pada T_n.

Sebagai contoh, barisan skor turnamen T_6 pada Gambar 3.5 (a) adalah (1, 2, 3, 3, 3, 3) . Sedangkan barisan skor turnamen T6 pada Gambar 3.5 (b) adalah (0, 1, 2, 3, 4, 5).

Teorema 3.10:

Dalam setiap T_n, total skor yang diperoleh semua Tim adalah $\frac{n\,(n-1)}{2}$.

Bukti:

Total skor diperoleh semua tim dalam turnamen T_n adalah jumlah derajat keluar semua titik T_n.

Maka, $t = \sum_{v \in V(T_n)} od(v) \ldots\ldots (1)$

Berdasarkan Teorema 2.1, maka

$$\sum_{v \in V(T_n)} od(v) = |\Gamma(Tn)|$$
$$= \frac{1}{2}\, n(n-1) \ldots\ldots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $t = \frac{1}{2}\, n(n-1)$. Dengan demikian teorema terbukti lengkap. ■

Teorema 3.11:

Misalkan $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ barisan skor turnamen T_n. T_n transitif jika dan hanya jika $(0,1,2,3,\ldots,(n-1)$ barisan skor T_n.

Bukti:

T_n turnamen transitif, berdasarkan **Torema 3.8**, T_n memiliki tepat satu lintasan ber- arah Hamilton, namakan $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Karena T_n transitif, maka T_n tidak memiliki sikel berarah.

Akibatnya:

$$odTn\,(v1) = n - 1;$$
$$odTn\,(v2) = n - 2;$$
$$odTn\,(v3) = n - 3;$$
$$dst;$$
$$odTn\,(vn - 1) = 1;$$
$$odTn\,(vn) = 0$$

Barisan $(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (0, 1, 2, \ldots, n - 1)$ barisan skor turnamen T_n. Misalkan $vi \in V(Tn)$ dengan $od\,(vi) = n - i = si, \forall i, 1 \le i \le n$.

Perhatikan bahwa,

$od_{Tn}(v_1) = n - 1$, berarti bahwa v_1 berhubungan langsung ke titik $v_2, v_3, \ldots, v_n$

$od_{Tn}(v_2) = n - 2$, berarti bahwa v_1 berhubungan langsung ke titik $v_3, v_4, \ldots, v_n$

dan seterusnya,

$od_{Tn}(v_i) = n - i$, berarti bahwa v_i berhubungan langsung ke titik $v_{(i+1)}, v_{(i+2)}, \ldots, v_n$

Sehingga, untuk $1 \le i < j < k \le n - 2$, jika $v_iv_j \in \Gamma(Tn)$ dan $v_jv_k \in \Gamma(Tn)$, maka $v_iv_k \in \Gamma(Tn)$.

Maka berdasarkan Definisi 3.2, T_n transitif.

Dengan demikian, bukti teorema lengkap.■

Teorema 3.12:

Setiap Tim dalam turnamen T_n memperoleh skor sama jika dan hanya jika n ganjil

Bukti:

Jika setiap Tim dalam turnamen T_n memperoleh skor sama, misalkan s, maka total skor yang diperoleh tim adalah ns. Berdasarkan **Teorema 3.10**, $ns = \frac{1}{2}\, n\,(n-1)$ ekuivalen dengan $s = \frac{n-1}{2}$.

Karena s bilangan bulat non negativ, maka $n-1$ genap, sehinga n ganjil.Jika n ganjil, kontradiksi turnamen T_n sebagai berikut; $V(Tn) = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ dan $\Gamma(Tn) = \bigcup_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} C_k$ dengan sikel berarah Hamilton $C_k = v_1, v_{k+1}, v_{2k+1}, \dots, v_{(i-1)k+1}, \dots, v_{(n-1)k+1}, v_1, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}, 1 \leq i \leq n$, dan *indeks* v diambil mod n.

Perhatikan bahwa sikel-sikel berarah Hamilton $C_1, C_2, \dots, C_{\frac{n-1}{2}}$ saling "pisah busur"(jika diiriskan merupakan himpunan kosong) dan mempartisi $\Gamma(Tn)$.

Misal $v_i \in V(Tn)$, Untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n$. Terdapat 2 busur C_k terkait dengan v_i, yaitu 1 busur menuju titik v_i dan 1 busur keluar dari v_i. . Karena $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ maka $\frac{n-1}{2}$ busur T_n menuju v_i dan $\frac{n-1}{2}$ busur T_n keluar dari v_i.

Akibatnya, $idT_n(v_i) = odT_n(v_i) = \frac{n-1}{2}$.

Ini berarti, $\forall i, 1 \leq i \leq n$, skor yang diperoleh Tim yang diwakili titik v_i adalah $\frac{n-1}{2}$.

Jadi T_n adalah turnamen sedemikian hingga setiap Tim memperoleh skor sama yaitu $\frac{n-1}{2}$.

Dengan demikian, bukti teorema lengkap.■

4. PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, maka diperoleh hasil berikut :

1) Graf berarah dapat menentukan jumlah pertandingan dalam sebuah Turnamen T_n, terdapat sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$ pertandingan dan untuk bilangan bulat positif n, terdapat sebanyak $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ yang berbeda.
2) Jika u adalah sebuah titik dalam turnamen T_n dengan $od(u)$ max, maka setiaptitik v di T_n terdapat lintasan berarah dari u ke v dengan panjang max 2.
3) Graf berarah memuat suatu lintasan Hamilton pada Turnamen T_n.
4) Graf berarah dapat menyatakan suatu Turnamen T_n terhubung kuat atau ter-hubung lemah.
5) Jika turnamen T terhubung kuat, maka T memuat sikel berarah dengan panjang 3.
6) Jika turnamen Tn terhubung kuat, maka T_n memuat sikel berarah panjang $3, 4, 5, \dots, n$.
7) Turnamen T_n Hamilton jika dan hanya jika T_n terhubung kuat.
8) Graf berarah dapat dapat menentukan suatu Turnamen T_n transitif atau tidak transitif.
9) Turnamen T_n transitif jika dan hanya jika T_n tidak memuat sikel berarah.
10) Turnamen T_n transitif jika dan hanya jika T_n memiliki tepat satu lintasan bera rah Hamilton.
11) Suatu titik graf berarah pada Turnamen T_n, dapat mewakili Tim yang menangdan Tim yang kalah.
12) Graf berarah pada setiap T_n, dapat menentukan total skor yang diperoleh semua Tim adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.
13) Misalkan $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ barisan skor turnamen T_n. T_n transitif jika dan hanya jika $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ barisan skor T_n.
14) Setiap Tim dalam turnamen T_n memperoleh skor sama jika dan hanya jika n ganjil

Saran

Pada Skripsi ini, dibahas mengenai sifat-sifat Turnamen. Penulis menyarankan kepada pembaca untuk mendalami dan menentukan banyak Turnamen T_n yang tidak isomorfik yang merupakan masalah sulit dan belum dibahas dalam skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I., 2007. Teori Graf dan Aplikasinya. Surabaya: Unipress.

Cynthia Navela Sari, M. R. B., 2019. Pengembangan Aplikasi Manajemen Turnamen XiangQi Sistem Knockout dan Round Robin PEX Jambi.

Fikri, M., 2014. Pendekatan Bilangan Bulat untuk Penjadwalan Sepak Bola Liga Italia dengan Sistem Round Robin Tournament.

Iswadi, H., 2003. Digraph Eksentris dari Turnamen Transitif dan Regular.

J Clark, D. A. H., 1991. A First Look at Graph Theory. Singapure: World Scien-tific Publishing Co.

Muklason, A., 2022. Optimasi Penjadwalan Olahraga ITC 2021 Menggunakan Swap.

Nandesha Ninsia, d. E. S., Pantjawati Sudarmaningtyas., 2016. Aplikasi Penjadwalan Pertandingan pada Kegiatan StiFest Menggunakan Metode Round Robin.

Novenza Harisma, d. F., Wamiliana., 2013. Representasi Turnamen Round-Robin Menggunakan Graf Hamilton dan Matriks.

Putra, A. T. A., 2021. Aplikasi Tree dan Graph dalam Menentukan Sistem Kompetisi Valorant Champions 2021.