MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 12 No 01
Tahun 2024

IDEAL HIBRIDA DALAM *BCK/BCI*-ALJABAR

Umi Halimah
Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: umihalimah.19059@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito
Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Struktur aljabar $(X,*,0)$ disebut *BCI*-aljabar jika memenuhi $\big(((w*t)*(w*v))*(v*t)=0\big)$, $\big((w*(w*t))*t=0\big)$, $(w*w=0)$, dan $(w*t=0, t*w=0 \Rightarrow w=t)$ untuk semua $w,t,v \in X$. Jika *BCI*-aljabar memenuhi $(0*w=0)$ untuk semua $w \in X$, maka disebut *BCK*-aljabar. Ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar adalah himpunan bagian dari *BCK/BCI*-aljabar dengan syarat $\forall(x,y \in L)$ memenuhi $(\tilde{\Phi}(x) \subseteq \tilde{\Phi}(0), \lambda(x) \geq \lambda(0))$ dan $\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}(x) \supseteq \tilde{\Phi}(x*y) \cap \tilde{\Phi}(y)\\ \lambda(x) \leq \vee\{\lambda(x*y),\lambda(y)\}\end{pmatrix}$. Pada skripsi ini membahas tentang struktur dan sifat-sifat ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar, hubungan antara ideal hibrida dan subaljabar hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar, dan syarat suatu himpunan merupakan ideal dalam *BCK/BCI*-aljabar.
Kata Kunci: Struktur Aljabar, *BCK/BCI*-aljabar, ideal hibrida, subaljabar.

Abstract

The algebraic structure $(X,*,0)$ *is referred to as a BCI-algebra if it satisfies the conditions* $\big(((w*t)*(w*v))*(v*t)=0\big)$, $\big((w*(w*t))*t=0\big)$, $(w*w=0)$, *and* $(w*t=0, t*w=0 \Rightarrow w=t)$ *for all* $w,t,v \in X$. *If a BCI-algebra satisfies* $(0*w=0)$ *for all* $w \in X$, *it is called a BCK-algebra. Hybrid ideals in BCK/BCI-algebras are subsets of BCK/BCI-algebras that satisfy the conditions* $\forall(x,y \in L)$ *memenuhi* $(\tilde{\Phi}(x) \subseteq \tilde{\Phi}(0), \lambda(x) \geq \lambda(0))$ *and* $\begin{pmatrix}\tilde{\Phi}(x) \supseteq \tilde{\Phi}(x*y) \cap \tilde{\Phi}(y)\\ \lambda(x) \leq \vee\{\lambda(x*y),\lambda(y)\}\end{pmatrix}$. *This thesis delves into the structure and properties of hybrid ideals in BCK/BCI-algebras, the relationship between hybrid ideals and hybrid subalgebras in BCK/BCI-algebras, and the criteria for a set to be considered an ideal in BCK/BCI-algebras.*
Keywords: *Algebraic Structure, BCK/BCI-Algebra, Hybrid Ideals, Subalgebras.*

.

PENDAHULUAN

Konsep ideal pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman, Richard Dedekind, pada tahun 1871 (Dedekind, 1996). Pada awalnya, Dedekind memperkenalkan konsep "himpunan ideal" dalam upayanya untuk menggeneralisasi pembagian pada bilangan bulat ke dalam bilangan rasional. Ia memperluas konsep pembagian dengan menganggap himpunan semua kombinasi linier dari dua bilangan rasional tertentu sebagai ideal. Misalnya, untuk bilangan rasional a dan b, maka himpunan ideal akan berisi semua bilangan rasional yang dapat dinyatakan sebagai $ax + by$, di mana x dan y adalah bilangan rasional apa pun. Kemudian sejarah ideal dalam matematika terus berkembang, dan konsep tersebut diterapkan luas dalam berbagai cabang matematika (Dedekind, 1996). Ideal menjadi alat penting dalam memahami dan mempelajari struktur aljabar, dan memiliki banyak aplikasi dalam berbagai masalah matematika, seperti dalam teori bilangan, algoritma, dan lain-lain.

Istilah hibrida merujuk pada sesuatu yang merupakan hasil dari gabungan atau percampuran dua hal yang berbeda. Istilah ini dapat diterapkan pada berbagai bidang, termasuk kimia, biologi, teknologi, dan lain-lain.

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak-kosong dengan satu operasi biner atau lebih serta memenuhi beberapa aksioma tertentu (Huang, 2006). *BCK/BCI*- aljabar merupakan contoh struktur aljabar (Jun, Song, & Muhiuddin, 2018). Kelas *BCK/BCI*-

aljabar merupakan dua kelas stuktur aljabar yang dikembangkan pada tahun 1966 oleh dua matematikawan Jepang, yakni Y. Imai dan K. Iséki (Huang, 2006). Iséki mengungkapkan bahwa dalam matematika, *BCK/BCI*-aljabar merupakan struktur aljabar dalam logika matematika yang melibatkan implikasi (Iséki, 1966). Struktur *BCK*-aljabar memenuhi lima aksioma, yaitu empat aksioma *BCI*-aljabar dengan tambahan satu aksioma.

Dengan demikian, pada artikel ini akan dibahas mengenai konsep ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar dan sifat-sifatnya, hubungan antara ideal hibrida dan subaljabar hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar, dan syarat-syarat suatu himpunan khusus merupakan ideal dalam *BCK/BCI*-aljabar.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1. *Himpunan merupakan kumpulan objek (konkrit atau abstrak) yang memiliki sifat atau kriteria tertentu dan jelas.*

(Masriyah, 2017)

Contoh 2.1. Himpunan $A = \{a, 2\}$ adalah himpunan yang terdiri dengan dua elemen, yaitu a dan 2.

Definisi 2.2. *Himpunan kuasa atas suatu himpunan A yaitu himpunan semua subhimpunan dari A, yang dimuat himpunan kosong dan A itu sendiri; dilambangkan dengan* $\mathcal{P}(A)$.

(Masriyah, 2017)

Contoh 2.2. Himpunan kuasa dari $A = \{a, 2\}$ adalah $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{2\}, \{a, 2\}\}$.

Definisi 2.3. *Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua objek yang relevan dalam suatu konteks atau domain tertentu.*

(Masriyah, 2017)

Contoh 2.3. Jika diketahui himpunan *A* merupakan himpunan semua bilangan asli, maka himpunan semesta yang memungkinkan adalah himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan cacah, dan beberapa himpunan yang lain.

Definisi 2.4. *Himpunan parameter adalah himpunan yang memuat variabel-variabel yang belum diketahui atau yang ditentukan nilainya.*

(Britannica, 2022)

Contoh 2.4. Misalkan terdapat persamaan linear satu variable, yakni $ax + b = 0$ dengan a dan b adalah parameter yang belum diketahui. Jadi, himpunan parameter dalam hal ini adalah $\{a, b\}$.

Definisi 2.5. *Misalkan X merupakan himpunan tak-kosong. Struktur aljabar $(X, *, 0)$ disebut BCI-aljabar jika memenuhi sifat.*

(BCI1) $((w * t) * (w * v)) * (v * t) = 0$,
(BCI2) $(w * (w * t)) * t = 0$,
(BCI3) $w * w = 0$,
(BCI4) $w * t = 0,\ t * w = 0 \Rightarrow w = t$
untuk semua $w, t, v \in X$.

Jika BCI-aljabar X memenuhi
(BCK5) $0 * w = 0$
untuk semua $w \in X$, maka X disebut BCK-aljabar.

(Kang, Song, Roh, & Jun, 2020)

Contoh 2.5. Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

Contoh 2.6. Misalkan $L = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	c	c	0

Proposisi 2.1. *BCK/BCI-aljabar memenuhi kondisi*

$$w * 0 = w$$

untuk semua $w \in X$.

Bukti. Substitusi 0 ke t di (BCI2), diperoleh

$$\big(w * (w * 0)\big) * 0 = 0. \qquad (2.i)$$

Kemudian subsitusi $w * 0$ ke t dan w ke v di (BCI1), diperoleh

$$\big((w * (w * 0)) * (w * w)\big) * \big(w * (w * 0)\big) = 0.$$

Dari (BCI3), identitas ini menjadi

$$\Big(\big(w * (w * 0)\big) * 0\Big) * \big(w * (w * 0)\big) = 0. \qquad (2.j)$$

Subsitusikan (2.i) ke (2.j), diperoleh

$$0 * \big(w * (w * 0)\big) = 0, \qquad (2.k)$$

dari (2.i) dan (2.k), serta (BCI4), diperoleh

$$\big(w * (w * 0)\big) = 0. \qquad (2.l)$$

Kemudian subtitusi w ke t di (BCI2), diperoleh

$$\big(w * (w * w)\big) * w = 0,$$

dari (BCI3), identitas berikut berlaku

$$(w * 0) * w = 0, \qquad (2.m)$$

dari (2.l) dan (2.m), serta (BCI4), diperoleh

$$w * 0 = w$$

untuk semua $w \in X$. ■

Definisi 2.6. *Pengurutan parsial* $\leq$ *pada* BCK/BCI*-aljabar* X *didefinisikan sebagai*

$$w \leq t \iff w * t = 0$$

untuk semua $w, t \in X$.

(Huang, 2006)

Contoh 2.7. Misalkan $X = \{0, 1, 2\}$ dan simbol $\{0\}$ memiliki nilai terkecil serta simbol $\{2\}$ memiliki nilai terbesar. Dengan menggunakan Tabel 2.1 dari Contoh 2.4, maka Definisi 2.6 berlaku.

Proposisi 2.2. *Pengurutan parsial* $\leq$ *pada* BCK/BCI*-aljabar* X *bersifat:*
(i) Refleksif $(w \leq w)$,
(ii) Anti-simetris $(w \leq t,\ t \leq w \Rightarrow w = t)$, *dan*
(iii) Transitif $(w \leq t,\ t \leq v \Rightarrow w \leq v)$.
untuk semua $w, t, v \in X$

Bukti. *(i)* Dengan (BCI3) serta Definisi 2.5, diperoleh

$$w \leq w. \quad ■$$

(ii) Misalkan $w \leq t$ dan $t \leq w$. Berdasarkan Definisi 2.5, diperoleh

$$w * t = 0,$$
$$t * w = 0,$$

jadi, dengan (BCI4) diperoleh

$$w = t. \quad ■$$

(iii) Misalkan $w \leq t$ dan $t \leq v$. Berdasarkan Definisi 2.5, diperoleh

$$w * t = 0,$$
$$t * v = 0.$$

Kemudian subsitusi v ke t dan t ke v di (BCI1), diperoleh

$$\big((w * v) * (w * t)\big) * (t * v) = 0,$$

sehingga

$$\big((w * v) * 0\big) * 0 = 0.$$

Akibatnya, dengan Proposisi 2.1 diperoleh

$$(w * v) * 0 = 0,$$
$$w * v = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.5, diperoleh

$$w \leq v. \quad ■$$

Proposisi 2.3. BCK/BCI*-aljabar* X *memenuhi:*
(i) $w \leq t \Rightarrow v * t \leq v * w$,
(ii) $(w * t) * v = (w * v) * t$,
(iii) $w \leq t \Rightarrow w * v \leq t * v$,
(iv) $(w * v) * (t * v) \leq w * t$,
untuk semua $w, t, v \in X$.

Bukti. *(i)* Subsitusi w ke v dan v ke w di (BCI1), diperoleh

$$\big((v * t) * (v * w)\big) * (w * t) = 0.$$

Karena $w \leq t$, diperoleh

$$\big((v * t) * (v * w)\big) * (0) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.1, diperoleh

$$(v * t) * (v * w) = 0.$$

Sehingga, dengan Definisi 2.5 dapat ditulis

$$v * t \leq v * w. \quad ■$$

(ii) Subsitusi v ke t di (BCI2), diperoleh

$$\big(w * (w * v)\big) * v = 0,$$

menurut Definisi 2.5, dapat ditulis

$$\big(w * (w * v)\big) \leq v.$$

Dengan bagian *(i)*, diperoleh

$$(w * t) * v \leq (w * t) * \big(w * (w * v)\big).$$

Kemudian subsitusi $w * v$ ke v di (BCI1), diperoleh

$$\big((w * t) * (w * (w * v))\big) * \big((w * v) * t\big) = 0.$$

Dengan Definisi 2.5, diperoleh

$$(w * t) * \big(w * (w * v)\big) \leq (w * v) * t.$$

Dengan Proposisi 2.2 bagian *(iii)*, dari dua hasil terakhir didapatkan

$$(w * t) * v \leq (w * v) * t.$$

Kemudian, subsitusi v ke t dan t ke v, diperoleh

$$(w * v) * t \leq (w * t) * v.$$

Sehingga, dengan Proposisi 2.2 bagian *(ii)*,

$$(w * t) * v = (w * v) * t. \quad ■$$

(iii) Subsitusi v ke t dan t ke v di (BCI1)

$$\big((w * v) * (w * t)\big) * (t * v) = 0.$$

Karena $w \leq t$ atau $w * t = 0$, diperoleh
$$((w * v) * (0)) * (t * v) = 0.$$
Berdasarkan Proposisi 2.1, diperoleh
$$(w * v) * (t * v) = 0.$$
Sehingga, menurut Definisi 2.5 dapat ditulis
$$(w * v) \leq (t * v). \qquad \blacksquare$$

(iv) Subsitusi v ke t dan t ke v di (BCI1)
$$((w * v) * (w * t)) * (t * v) = 0.$$
Dengan bagian *(ii)*, diperoleh
$$((w * v) * (t * v)) * (w * t) = 0.$$
Dengan Definisi 2.5, didapatkan
$$(w * v) * (t * v) \leq (w * t). \qquad \blacksquare$$

Definisi 2.7. *Suatu BCK-aljabar X dikatakan implikatif positif jika memenuhi*
$$(w * t) * v = (w * v) * (t * v) \tag{1}$$
untuk semua $w, t, v \in X$.
(Jun, Song, Smarandache, & Bordbar, 2018)

Contoh 2.8. Misalkan $X = \{0,1,2\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3. Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

Definisi 2.8. *Suatu Subhimpunan tak-kosong S dari BCK/BCI-aljabar X disebut subaljabar dari X, jika*
$$w * t \in S$$
untuk semua $w, t \in S$.
(Jun, Song, & Muhiuddin, 2018)

Contoh 2.9. Misalkan $S = \{0, a, b\}$. Dengan menggunakan Tabel 2.2 pada Contoh 2.6, diketahui $a \in S$ dan $b \in S$. Sehingga dari Tabel 2.2 diperoleh
$$a * b = 0$$
dengan $0 \in S$.

Definisi 2.9. *Subhimpunan A dari BCK/BCI-aljabar X disebut ideal pada X, jika*
$$0 \in A, \tag{2}$$
$$w * t \in A \implies w \in A, \tag{3}$$
untuk semua $w \in X$ *dan semua* $t \in A$.
(Jun, Song, Smarandache, & Bordbar, 2018)

Contoh 2.10. Misalkan $A = \{0, a, b\}$ merupakan subhimpunan tak-kosong dari *BCK/BCI*-aljabar dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.2 dari Contoh 2.6. Misalkan $w = a$ untuk $a \in X$ dan $t = b$ untuk $b \in A$. diperoleh
$$a * b = 0,$$
dengan 0 ∈ A.

Untuk selanjutnya akan digunakan lambang I untuk selang satuan $[0,1]$, L untuk himpunan parameter dan $\mathcal{P}(U)$ untuk himpunan kuasa dari himpunan semesta U.

Definisi 2.10. *Struktur hibrida dari L atas U didefinisikan dengan pemetaan berikut*
$$\tilde{\Phi}_\lambda \coloneqq (\tilde{\Phi}, \lambda): L \to \mathcal{P}(U) \times I, w \mapsto (\tilde{\Phi}(w), \lambda(w))$$
untuk $\tilde{\Phi}: L \to \mathcal{P}(U)$ *dan* $\lambda: L \to I$ *merupakan pemetaan.*
: (Jun, Song, & Muhiuddin, 2018)

Definisi 2.11. $\mathbb{H}(L)$ *merupakan simbol yang digunakan untuk semua himpunan struktur hibrida dari L atas U, dan didefinisikan "* $\ll$ *" dalam* $\mathbb{H}(L)$ *sebagai berikut*
$$(\forall \tilde{\Phi}_\lambda, \tilde{\Psi}_\lambda \in \mathbb{H}(L)) (\tilde{\Phi}_\lambda \ll \tilde{\Psi}_\lambda \Leftrightarrow \tilde{\Phi} \Subset \tilde{\Psi}, \lambda \succcurlyeq \gamma) \tag{4}$$
untuk $\tilde{\Phi} \Subset \tilde{\Psi}$ *berarti* $\tilde{\Phi}(w) \subseteq \tilde{\Psi}(w)$ *dan* $\lambda \succcurlyeq \gamma$ *berarti* $\lambda(w) \geq \gamma(w)$, *untuk semua* $w \epsilon L$.
: (Jun, Song, & Muhiuddin, 2018)

Definisi 2.12. *Misalkan L adalah BCK/BCI-aljabar. Jika struktur hibrida* $\tilde{\Phi}_\lambda$ *dalam L disebut subaljabar hibrida dari L atas U, maka pernyataan berikut valid*
$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(w * t) \supseteq \tilde{\Phi}(w) \cap \tilde{\Phi}(t) \\ \lambda(w * t) \leq \vee\{\lambda(w), \lambda(t)\} \end{pmatrix} \tag{5}$$
untuk semua $w, t \in L$.
: (Jun, Song, & Muhiuddin, 2018)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1. *Misalkan L adalah BCK/BCI-aljabar. Jika struktur hibrida* $\tilde{\Phi}_\lambda$ *dari L atas U disebut ideal hibrida dari L atas U, maka memenuhi*
$$(\tilde{\Phi}(x) \subseteq \tilde{\Phi}(0), \lambda(x) \geq \lambda(0)) \tag{6}$$
untuk semua $x \in L$.
$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(x) \supseteq \tilde{\Phi}(x * y) \cap \tilde{\Phi}(y) \\ \lambda(x) \leq \vee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\} \end{pmatrix} \tag{7}$$
untuk semua $x, y \in L$.

Contoh 3.1. Misalkan $L = \{0, 1, 2, a, b\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	a	b
0	0	0	0	a	a
1	1	0	1	b	a
2	2	2	0	a	a
a	a	a	a	0	0
b	b	a	b	1	0

Maka struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, yang diberikan pada Tabel 3.2 merupakan ideal hibrida dari L atas U.

Tabel 3.2: Tabel representasi struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$.

L	$\widetilde{\Phi}$	λ
0	U	0.4
1	$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$	0.8
2	$\{u_2, u_4\}$	0.5
a	$\{u_2, u_4\}$	0.7
b	$\{u_2, u_4\}$	0.8

Teorema 3.1. *Misalkan L merupakan BCK-aljabar, maka setiap ideal hibrida dari L adalah subaljabar hibrida dari L.*

Bukti. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L. Subsitusikan $x = y * x$ pada (7), sehingga diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(y * x) \supseteq \widetilde{\Phi}\big((y * x) * y\big) \cap \widetilde{\Phi}(y).$$

Dari Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(y * x) \supseteq \widetilde{\Phi}\big((y * y) * x\big) \cap \widetilde{\Phi}(y).$$

Dari (BCI3), identitas ini menjadi

$$\widetilde{\Phi}(y * x) \supseteq \widetilde{\Phi}(0 * x) \cap \widetilde{\Phi}(y).$$

Dari (BCK5), identitas ini menjadi

$$\widetilde{\Phi}(y * x) \supseteq \widetilde{\Phi}(0) \cap \widetilde{\Phi}(y) = \widetilde{\Phi}(y),$$
$$\widetilde{\Phi}(y * x) \supseteq \widetilde{\Phi}(y) \cap \widetilde{\Phi}(x).$$

Dan

$$\lambda(y * x) \leq \bigvee\{\lambda\big((y * x) * y\big), \lambda(y)\},$$

dari Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\lambda(y * x) \leq \bigvee\{\lambda\big((y * y) * x\big), \lambda(y)\}.$$

Dari (BCI3), identitas ini menjadi

$$\lambda(y * x) \leq \bigvee\{\lambda(0 * y), \lambda(y)\}.$$

Dari (BCK5), identitas ini menjadi

$$\lambda(y * x) \leq \bigvee\{\lambda(0), \lambda(y)\} = \lambda(y),$$
$$\lambda(y * x) \leq \bigvee\{\lambda(y), \lambda(x)\}.$$

untuk semua $x, y \in L$.
Jadi, menurut Definisi 2.7, $\widetilde{\Phi}_\lambda$ merupakan subaljabar hibrida dari L atas U.■

Teorema 3.1 tidak berlaku dalam *BCI*-aljabar seperti contoh berikut.

Contoh 3.2. Diberikan *BCI*-aljabar $(Y, *, 0)$ dan *BCI*-aljabar $(\mathbb{Z}, -, 0)$ dari grup aditif bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Misalkan L produk dari Y dan $\mathbb{Z}$, yaitu $L \coloneqq Y \times \mathbb{Z}$.
Maka, $(L, \otimes, (0,0))$ merupakan *BCI*-aljabar (Huang, 2006) dengan operasi $\otimes$ yang didefinisikan sebagai berikut.
$\forall (x, m), (y, n) \in L, (x, m) \otimes (y, n) = (x * y, m - n)$.
Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dari L atas $U = I$ yang ditentukan sebagai berikut.

$$\widetilde{\Phi}_\lambda = (\widetilde{\Phi}, \lambda) : L \to \mathcal{P}(U) \times I, x \mapsto \begin{cases} \left(\left[\frac{1}{3}, 1\right], 0.6\right) & x \in A, \\ \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right], 0.9\right) & \text{yang lain,} \end{cases}$$

dengan $A \coloneqq Y \times \mathbb{N}_0$ adalah subhimpuan dari L di mana $\mathbb{N}_0$ adalah himpunan bilangan bulat nonnegatif. Maka, $\widetilde{\Phi}_\lambda$ adalah ideal hibrida dari L atas U, tetapi bukan subaljabar hibrida dari L atas U, karena

$$\widetilde{\Phi}\big((0,0) \otimes (0,1)\big) = \widetilde{\Phi}(0, -1) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \not\supseteq \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$
$$= \widetilde{\Phi}(0,0) \cap \widetilde{\Phi}(0,1),$$

dan/atau

$$\lambda\big((0,0) \otimes (0,1)\big) = \lambda(0, -1) = 0.9 \not\leq 0.6$$
$$= \bigvee\{\lambda(0,0), \lambda(0,1)\}.$$

Definisi 3.2. *Untuk setiap struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas U, mempertimbangkan dua himpunan*

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \coloneqq \{x \in L \mid \alpha \subseteq \widetilde{\Phi}(x)\} \text{ dan}$$
$$\widetilde{\Phi}_\lambda(t) \coloneqq \{x \in L \mid \lambda(x) \leq t\} \tag{8}$$

untuk semua $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$.

Teorema 3.2. *Misalkan L BCK/BCI-aljabar. Untuk struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas U, dua pernyataan berikut ini setara.*
(1) *$\widetilde{\Phi}_\lambda$ adalah ideal hibrida dari L atas U.*
(2) *Untuk semua $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$, $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ merupakan ideal dari L jika tak-kosong.*

Bukti. (1) ⇒ (2) Asumsikan bahwa $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L atas U. Misalkan $x, y \in L$. Untuk setiap $\alpha \in$

$\mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$, misalkan $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ dan $y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$. Dengan (8) pada Definisi 3.2, didapatkan $\widetilde{\Phi}(x * y) \supseteq \alpha, \lambda(x * y) \leq t, \widetilde{\Phi}(y) \supseteq \alpha$, dan $\lambda(y) \leq t$. Dari persamaan (6) dan (7) pada Definisi 3.1 diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) \supseteq \widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \supseteq \alpha,$$

dan

$$\lambda(0) \leq \lambda(x) \leq \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\} \leq t.$$

Maka, $0 \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ dan $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$. Dengan demikian, $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ merupakan ideal dari L.

(2) ⇒ (1) Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ ideal dari L dengan $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \neq \emptyset \neq \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$. Untuk setiap $x \in L$, misalkan $\widetilde{\Phi}(x) = \alpha_x$ dan $\lambda(x) = t_x$. Maka menurut (8), $\widetilde{\Phi}(x) \supseteq \alpha_x$ dan $\lambda(x) \leq t_x$, sehingga $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha_x) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t_x)$. Karena $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha_x)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t_x)$ ideal dari L, diperoleh $0 \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha_x) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t_x)$, menurut (8) didapat $\widetilde{\Phi}(x) = \alpha_x \subseteq \widetilde{\Phi}(0)$ dan $\lambda(x) = t_x \subseteq \lambda(0)$.
Untuk setiap $x, y \in L$, misalkan $\widetilde{\Phi}(x * y) = \alpha_{x*y}$, $\lambda(x * y) = t_{x*y}, \widetilde{\Phi}(y) = \alpha_y$ dan $\lambda(y) = t_y$. Kemudian ditetapkan $\alpha = \alpha_{x*y} \cap \alpha_y$ dan $t = \bigvee\{t_{x*y}, t_y\}$, sehingga $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ dan $y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$. Karena $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ merupakan ideal dari L, disimpulkan bahwa $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$. Dengan (8) diperoleh $\widetilde{\Phi}(x) \supseteq \alpha = \alpha_{x*y} \cap \alpha_y = \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y)$ dan $\lambda(x) \leq t_x = \bigvee\{t_{x*y}, t_y\} = \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\}$. Jadi, $\widetilde{\Phi}_\lambda$ merupakan ideal hibrida dari L atas U. ■

Akibat 3.1. *Misalkan L BCK/BCI-aljabar. Untuk struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas U, jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L atas U, maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ adalah ideal dari L untuk semua $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$ dengan $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t) \neq \emptyset$.*

Contoh berikut mengilustrasikan Teorema 3.2.

Contoh 3.3. Misalkan $L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
2	2	2	0	2	0
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dari L atas $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, yang ditampilkan pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4: Tabel representasi dari struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$.

L	$\widetilde{\Phi}$	λ
0	U	0.3
1	$\{u_1, u_3, u_4\}$	0.4
2	$\{u_1, u_4\}$	0.5
3	U	0.7
4	$\{u_4\}$	0.6

Dari Tabel 3.4 diketahui bahwa $\widetilde{\Phi}_\lambda$ adalah ideal hibrida dari L atas U. Maka

$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = \{0,3\}$ jika $\alpha = U$,
$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = \{0,3\}$ atau $\{0,1,3\}$ jika $\alpha \in \mathcal{P}(U), |\alpha| = 3$,
$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = \{0,1,3\}$ atau $\{0,1,2,3\}$ jika $\alpha \subseteq \{u_1, u_3, u_4\}$, $|\alpha| = 2$
$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = \{0,3\}$ atau $\{0,1,2,3\}$ jika $\alpha \subseteq \beta, |\alpha| = 2$,
$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = L$ atau $\{0,1,2,3\}$ jika $\alpha \subseteq \{u_1, u_4\}, |\alpha| = 1$,
$\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) = \{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}$ atau L jika $\alpha \subseteq \gamma$, $|\alpha| = 1$.

dengan$\beta, \gamma \in \mathcal{P}(U), |\beta| = 3, \beta \neq \{u_1, u_3, u_4\}$, $|\gamma| = 2\ dan\ \gamma \neq \{u_1, u_4\}$. Sebagai tambahan,

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{jika } t \text{ anggota } [0, 0.3), \\ \{0\} & \text{jika } t \text{ anggota } [0.3, 0.4), \\ \{0,1\} & \text{jika } t \text{ anggota } [0.4, 0.5), \\ \{0,1,2\} & \text{jika } t \text{ anggota } [0.5, 0.6), \\ \{0,1,2,4\} & \text{jika } t \text{ anggota } [0.6, 0.7), \\ L & \text{jika } t \text{ anggota } [0.7, 1). \end{cases}$$

Jadi, $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha)$ dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ merupakan ideal dari L apabila kedua-duanya tidak kosong untuk semua $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$.

Proposisi 3.1. *Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam BCK/BCI-aljabar dari L atas U, maka dua pernyataan berikut berlaku.*

(1) $\left(x \leq y \Rightarrow \widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(y), \lambda(x) \leq \lambda(y)\right)$,
untuk semua $x, y \in L$.

(2) $\left(x * y \leq z \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(y) \cap \widetilde{\Phi}(z) \\ \lambda(x) \leq \bigvee\{\lambda(y), \lambda(z)\} \end{cases}\right)$,

untuk semua $x, y, z \in L$.

Bukti. (1) Misalkan $x, y \in L$ untuk $x \leq y$, dengan Definisi 2.5 dapat ditulis $x * y = 0$. Dengan Definisi 3.1 diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y) = \widetilde{\Phi}(0) \cap \widetilde{\Phi}(y) = \widetilde{\Phi}(y),$$

dan

$$\lambda(x) \leq \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\} = \bigvee\{\lambda(0), \lambda(y)\} = \lambda(y).$$

(2) Asumsikan bahwa $x * y \leq z$ untuk semua $x, y, z \in L$, dengan Definisi 3.1 diperoleh

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(x * y) &\supseteq \widetilde{\Phi}((x * y) * z) \cap \widetilde{\Phi}(z)\\ &= \widetilde{\Phi}(0) \cap \widetilde{\Phi}(z) = \widetilde{\Phi}(z),\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\lambda(x * y) &\leq \bigvee\{\lambda\big((x * y) * z\big), \lambda(z)\}\\ &= \bigvee\{\lambda(0), \lambda(z)\} = \lambda(z).\end{aligned}$$

Dengan (7) dari Definisi 3.1, maka

$$\widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \supseteq \widetilde{\Phi}(y) \cap \widetilde{\Phi}(z),$$
$$\lambda(x) \leq \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\} \leq \bigvee\{\lambda(y), \lambda(z)\}.$$

Dengan demikian, bukti lengkap. ∎

Proposisi 3.2. *Misalkan L BCK-aljabar. Untuk ideal hibrida* $\widetilde{\Phi}_\lambda$ *dari L atas U, dua pernyataan berikut setara.*

(1) $\widetilde{\Phi}\big((x * y) * y\big) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y)$,
$\lambda\big((x * y) * y\big) \geq \lambda(x * y)$,

untuk semua $x, y \in L$.

(2) $\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}\big((x * y) * z\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * z) * (y * z)\big)\\ \lambda\big((x * y) * z\big) \geq \lambda\big((x * z) * (y * z)\big)\end{pmatrix}$,

untuk semua $x, y, z \in L$.

Bukti. Asumsikan syarat (1) berlaku dan misalkan $x, y, z \in L$. Perhatikan bahwa dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), (iv), dan (iii), diperoleh

$$\begin{aligned}\Big(\big(x * (y * z)\big) * z\Big) * z &= \big((x * z) * (y * z)\big) * z\\ &\leq (x * y) * z.\end{aligned}$$

Kemudian dengan Proposisi 3.1 bagian (1), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * z\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * z) * (y * z)\big) * z\Big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * z\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * z) * z\big) * (y * z)\Big).$$

Dengan bagian (1), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * z\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * z) * (y * z)\big).$$

Dan dengan Proposisi 3.1 bagian (1), diperoleh

$$\lambda\big((x * y) * z\big) \geq \lambda\Big(\big((x * z) * (y * z)\big) * z\Big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\lambda\big((x * y) * z\big) \geq \lambda\Big(\big((x * z) * z\big) * (y * z)\Big).$$

Dengan bagian (1), diperoleh

$$\lambda\big((x * y) * z\big) \geq \lambda\big((x * z) * (y * z)\big).$$

Sebaliknya, misalkan syarat (2) berlaku dan $z \coloneqq y$ di (2). Maka

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * y\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * y) * (y * y)\big).$$

Dengan (BCI3,) diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * y\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * y) * (0)\big).$$

Dengan Proposisi 2.1, didapat

$$\widetilde{\Phi}\big((x * y) * y\big) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y).$$

Dan

$$\lambda\big((x * y) * y\big) \geq \big((x * y) * (y * y)\big).$$

Dengan (BCI3), diperoleh

$$\lambda\big((x * y) * y\big) \geq \lambda\big((x * y) * (0)\big).$$

Dengan Proposisi 2.1, diperoleh

$$\lambda\big((x * y) * y\big) \geq \lambda(x * y).$$

Dengan demikian, bukti lengkap. ∎

Devinisi 3.3. *Jika* $\widetilde{\Phi}_\lambda$ *struktur hibrida dalam BCK-aljabar* L *atas* U. *Untuk semua* $a, b \in L$ *dan* n *bilangan asli, maka*

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n) \coloneqq \left\{ x \in L \,\middle|\, \begin{matrix}\widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) = \widetilde{\Phi}(0),\\ \lambda\big((x * b) * a^n\big) = \lambda(0)\end{matrix} \right\} \qquad (9)$$

dengan $(x * b) * a^n = \Big(\big(\ldots\big((x * b) * a\big) * a\big) * \ldots\Big) * a$ *untuk* a *muncul* n*-kali. Jadi,* $a, b, 0 \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$.

Proposisi 3.3. *Misalkan* $\widetilde{\Phi}_\lambda$ *struktur hibrida dalam BCK-aljabar dari* L *atas* U *sedemikian hingga* $\widetilde{\Phi}(x) \subseteq \widetilde{\Phi}(0), \lambda(x) \geq \lambda(0)$, $\widetilde{\Phi}(x * y) = \widetilde{\Phi}(x) \cup \widetilde{\Phi}(y)$, *dan* $\lambda(x * y) = \bigwedge\{\lambda(x), \lambda(y)\}$ *untuk semua* $x, y \in L$. *Untuk semua* $a, b \in L$ *dan semua bilangan asli* n, *jika* $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ *maka* $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ *untuk semua* $y \in L$.

Bukti. Misalkan $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$. Maka $\widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) = \widetilde{\Phi}(0)$ dan $\lambda\big((x * b) * a^n\big) = \lambda(0)$, sehingga dengan Proposisi 2.3 bagian (ii) diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * b) * y\big) * a^n\Big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * b) * a^n\big) * y\Big).$$

Dan dengan hipotesis, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big) = \widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) \cup \widetilde{\Phi}(y).$$

Karena $\widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) = \widetilde{\Phi}(0)$, maka

$$\widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big) = \widetilde{\Phi}(0) \cup \widetilde{\Phi}(y).$$

Kemudian dengan hipotesis, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big) = \widetilde{\Phi}(0).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\lambda\Big(\big((x*y)*b\big)*a^n\Big)=\lambda\Big(\big((x*b)*y\big)*a^n\Big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\lambda\Big(\big((x*y)*b\big)*a^n\Big)=\lambda\Big(\big((x*b)*a^n\big)*y\Big).$$

Dan dengan hipotesis, diperoleh

$$\lambda\Big(\big((x*y)*b\big)*a^n\Big)=\bigwedge\{\lambda\big((x*b)*a^n\big),\lambda(y)\}.$$

Karena $\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda(0)$, maka

$$\lambda\Big(\big((x*y)*b\big)*a^n\Big)=\bigwedge\{\lambda(0),\lambda(y)\}.$$

Kemudian dengan hipotesis, diperoleh

$$\lambda\Big(\big((x*y)*b\big)*a^n\Big)=\lambda(0).$$

untuk semua $y\in L$. Jadi, $x*y\in\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$ untuk semua $y\in L$. ■

Proposisi 3.4. *Untuk struktur hibrida $\tilde{\Phi}_\lambda$ dalam BCK-aljabar dari L atas U, jika $a\in L$ memenuhi*

$$x\le a \tag{10}$$

untuk semua $x\in L$. Maka $\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)=L=\tilde{\Phi}_\lambda(a;b^n)$ untuk semua $b\in L$ dan semua bilangan asli n.

Bukti. Misalkan n bilangan asli dan $b,x\in L$. Dengan Definisi 3.2 diperoleh

$$\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big)=\tilde{\Phi}(((x*b)*a)*a^{n-1}).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big)=\tilde{\Phi}\Big(\big((x*a)*b\big)*a^{n-1}\Big).$$

Dengan (8) dan Definisi 2.5, diperoleh

$$\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big)=\tilde{\Phi}\big((0*b)*a^{n-1}\big).$$

Dengan (BCK5), diperoleh

$$\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big)=\tilde{\Phi}(0*a^{n-1}),$$
$$\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big)=\tilde{\Phi}(0).$$

Sementara itu, dengan Definisi 3.2 diperoleh

$$\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda(((x*b)*a)*a^{n-1}).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian (ii), diperoleh

$$\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda\Big(\big((x*a)*b\big)*a^{n-1}\Big).$$

Dengan (8) dan Definisi 2.5, diperoleh

$$\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda\big((0*b)*a^{n-1}\big).$$

Dengan (BCK5), diperoleh

$$\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda(0*a^{n-1}),$$
$$\lambda\big((x*b)*a^n\big)=\lambda(0).$$

Sehingga $x\in\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$, yang menunjukkan bahwa $\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)=L$. ■

Proposisi 3.5. *Misalkan $\tilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam BCK-aljabar L atas U memenuhi syarat Definisi 2.3 dan Proposisi 3.1. Jika $b\le c$ dalam L, maka*

$$\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)\subseteq\tilde{\Phi}_\lambda(c;a^n)$$

untuk semua bilangan asli n dan $a\in L$.

Bukti. Misalkan $b,c\in L$ dengan $b\le c$. Untuk semua bilangan asli n dan $a\in L$, jika $x\in\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$ maka Dengan Definisi 3.2, diperoleh

$$\tilde{\Phi}(0)=\tilde{\Phi}\big((x*b)*a^n\big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\tilde{\Phi}(0)=\tilde{\Phi}\big((x*a^n)*b\big).$$

Kemudian dengan Proposisi 2.3 bagian *(i)* dan Proposisi 3.1 bagian *(i)*, diperoleh

$$\tilde{\Phi}(0)=\tilde{\Phi}\big((x*a^n)*b\big)\subseteq\tilde{\Phi}\big((x*a^n)*c\big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\tilde{\Phi}(0)=\tilde{\Phi}\big((x*c)*a^n\big).$$

Dan dengan Definisi 3.2, diperoleh

$$\lambda(0)=\lambda\big((x*b)*a^n\big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\lambda(0)=\lambda\big((x*a^n)*b\big).$$

Kemudian dengan Proposisi 2.3 bagian *(i)* dan Proposisi 3.1 bagian *(i)*, diperoleh

$$\lambda(0)=\lambda\big((x*a^n)*b\big)\ge\lambda\big((x*a^n)*c\big).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\lambda(0)=\lambda\big((x*c)*a^n\big).$$

Karena $0\le x$ untuk semua $x\in L$, dengan Proposisi 3.1 bagian *(i)* maka $\tilde{\Phi}(0)\supseteq\tilde{\Phi}(x)$ dan $\lambda(0)\le\lambda(x)$ untuk semua $x\in L$. Jadi, $\tilde{\Phi}\big((x*c)*a^n\big)=\tilde{\Phi}(0)$ dan $\lambda\big((x*c)*a^n\big)=\lambda(0)$. Dengan demikian, $x\subseteq\tilde{\Phi}_\lambda(c;a^n)$ dan berlaku $\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)\subseteq\tilde{\Phi}_\lambda(c;a^n)$ untuk semua bilangan asli n dan $a\in L$. ■

Akibat 3.2. *Jika $\tilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam BCK-aljabar L atas U, maka $\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)\subseteq\tilde{\Phi}_\lambda(c;a^n)$ untuk semua bilangan asli n dan $a,b,c\in L$ dengan $b\le c$.*

Contoh berikut menunjukkan bahwa terdapat struktur hibrida $\tilde{\Phi}_\lambda$ dalam *BCK*-aljabar L sedemikian hingga himpunan $\tilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$ bukan ideal dari L untuk suatu $a,b\in L$ dan bilangan asli n.

Contoh 3.4. Misalkan $L=\{0,a,b,c\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	a	0	b
c	c	c	c	0

Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dari L atas $U = I$ yang diberikan oleh:

$$\widetilde{\Phi}_\lambda = (\widetilde{\Phi}, \lambda) : L \to \mathcal{P}(U) \times I, x \mapsto \begin{cases} \left(\left[0, \frac{1}{2}\right], 0.4\right) & x = 0, \\ \left(\left[0, \frac{1}{3}\right], 0.7\right) & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L atas U, dan $\widetilde{\Phi}_\lambda(a; c^1) = \{0, a, c\}$ bukan ideal dari L karena $b * a = a \in \widetilde{\Phi}_\lambda(a; c^1)$ tapi $b \notin \widetilde{\Phi}_\lambda(a; c^1)$.

Terdapat ketentuan mengenai himpunan $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ untuk menjadi ideal.

Teorema 3.3. *Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam BCK-aljabar implikatif positif L atas U dengan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ injektif. Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(y * b) * a^n)$ merupakan ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$.*

Bukti. Misalkan n bilangan asli dan $a, b, x, y \in L$ dengan $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ dan $y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$. Maka $\widetilde{\Phi}\big((y * b) * a^n\big) = \widetilde{\Phi}(0)$ dan $\lambda\big((y * b) * a^n\big) = \lambda(0)$, yang menyiratkan bahwa $(y * b) * a^n = 0$ karena $\widetilde{\Phi}_\lambda$ injektif.

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big),$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\bigg(\Big(\big((x * y) * b\big) * a\Big) * a^{n-1}\bigg).$$

Dengan Definisi 2.6, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\bigg(\Big(\big((x * b) * (y * b)\big) * a\Big) * a^{n-1}\bigg),$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\Bigg(\bigg(\Big(\big((x * b) * a\big) * \big((y * b) * a\big)\Big) * a\bigg) * a^{n-2}\Bigg).$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \cdots$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \Big(\big((x * b) * a^n\big) * \big((y * b) * a^n\big)\Big).$$

Diketahui bahwa $(y * b) * a^n = 0$, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) = \Big(\big((x * b) * a^n\big) * (0)\Big).$$

Dengan Proposisi 2.1, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) = \big((x * b) * a^n\big).$$

Dan

$$\lambda(0) = \lambda\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big),$$

$$\lambda(0) = \lambda\bigg(\Big(\big((x * y) * b\big) * a\Big) * a^{n-1}\bigg).$$

Dengan Definisi 2.6, diperoleh

$$\lambda(0) = \lambda\bigg(\Big(\big((x * b) * (y * b)\big) * a\Big) * a^{n-1}\bigg),$$

$$\lambda(0) = \lambda\Bigg(\bigg(\Big(\big((x * b) * a\big) * \big((y * b) * a\big)\Big) * a\bigg) * a^{n-2}\Bigg).$$

$$\lambda(0) = \cdots$$

$$\lambda(0) = \Big(\big((x * b) * a^n\big) * \big((y * b) * a^n\big)\Big).$$

Diketahui bahwa $(y * b) * a^n = 0$, diperoleh

$$\lambda(0) = \Big(\big((x * b) * a^n\big) * (0)\Big).$$

Dengan Proposisi 2.1, diperoleh

$$\lambda(0) = \big((x * b) * a^n\big).$$

Sehingga diperoleh $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$. Jadi, $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ merupakan ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$. ■

Teorema 3.4. *Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam BCK-aljabar impilkatif positif L atas U memenuhi syarat (6) pada Definisi 3.1 dan*

$$\widetilde{\Phi}(x * y) = \widetilde{\Phi}(x) \cap \widetilde{\Phi}(y), \lambda(x * y) = \bigvee\{\lambda(x), \lambda(y)\}, \tag{11}$$

untuk semua $x, y \in L$. Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ merupakan ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$.

Bukti. Misalkan n bilangan asli dan $a, b, x, y \in L$ dengan $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ dan $y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$, maka

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\big((y * b) * a^n\big),$$

subsitusi $x * y$ ke y

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * y) * b\big) * a^n\Big).$$

Dengan (1), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * b) * (y * b)\big) * a^n\Big),$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\Big(\big((x * b) * a^n\big) * \big((y * b) * a^n\big)\Big).$$

Dengan (11), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) \cap \widetilde{\Phi}\big((y * b) * a^n\big).$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big) \cap \widetilde{\Phi}(0).$$

Dengan (6), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(0) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big).$$

$$\widetilde{\Phi}(0) = \widetilde{\Phi}\big((x * b) * a^n\big).$$

Dan

$$\lambda(0) = \lambda\big((y * b) * a^n\big).$$

Subsitusi $x * y$ ke y

$$\lambda(0) = \lambda\left(\left((x*y)*b\right)*a^n\right).$$

Dengan (1), diperoleh

$$\lambda(0) = \lambda\left(\left((x*b)*(y*b)\right)*a^n\right),$$

$$\lambda(0) = \lambda\left(\left((x*b)*a^n\right)*\left((y*b)*a^n\right)\right).$$

Dengan (11), diperoleh

$$\lambda(0) = \lambda\left((x*b)*a^n\right) \cap \lambda\left((y*b)*a^n\right),$$

$$\lambda(0) = \lambda\left((x*b)*a^n\right) \cap \lambda(0).$$

Dengan (6), diperoleh

$$\lambda(0) \subseteq \lambda\left((x*b)*a^n\right).$$

$$\lambda(0) = \lambda\left((x*b)*a^n\right).$$

dan $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$. Jadi, $\widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$ ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in L$.■

Proposisi 3.6. *Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida injektif dalam BCK-aljabar L atas U. Jika J ideal dari L, maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in J$.*

Bukti. Untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in J$, misalkan $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n)$. Maka

$$\widetilde{\Phi}\left(\left((x*b)*a^{n-1}\right)*a\right) = \widetilde{\Phi}\left((x*b)*a^n\right) = \widetilde{\Phi}(0),$$

dan

$$\lambda\left(\left((x*b)*a^{n-1}\right)*a\right) = \lambda\left((x*b)*a^n\right) = \lambda(0).$$

Dengan demikian $\left((x*b)*a^{n-1}\right)*a = 0 \in J$, sebab $\widetilde{\Phi}_\lambda$ merupakan injektif. Karena J ideal dari L, dengan syarat (3) diperoleh $(x*b)*a^{n-1} \in J$. Dengan proses berlanjut, diperoleh $x*b \in J$, dan $x \in J$. Jadi, berlaku $\widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in J$. ■

Teorema 3.5. *Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam BCK-aljabar L atas U. Jika J subset dari L seperti $\widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in J$, maka J merupakan ideal dari L.*

Bukti. Perhatikan bahwa $\widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a,b \in J$, dan perhatikan bahwa $0 \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b;a^n) \subseteq J$. Misalkan $x,y \in L$ sedemikian rupa sehingga $x*y \in J$ dan $y \in J$. Jika $b \coloneqq x*y$, maka

$$\widetilde{\Phi}\left((x*b)*y^n\right) = \widetilde{\Phi}\left(\left(x*(x*y)\right)*y^n\right).$$

$$\widetilde{\Phi}\left((x*b)*y^n\right) = \widetilde{\Phi}\left(\left(\left(x*(x*y)\right)*y\right)*y^{n-1}\right).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\left((x*b)*y^n\right) = \widetilde{\Phi}\left(\left((x*y)*(x*y)\right)*y^{n-1}\right).$$

Dengan (BCI3), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\left((x*b)*y^n\right) = \widetilde{\Phi}(0*y^{n-1}).$$

Dengan (BCK5), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}\left((x*b)*y^n\right) = \widetilde{\Phi}(0).$$

Dan

$$\lambda\left((x*b)*y^n\right) = \lambda\left(\left(x*(x*y)\right)*y^n\right).$$

$$\lambda\left((x*b)*y^n\right) = \lambda\left(\left(\left(x*(x*y)\right)*y\right)*y^{n-1}\right).$$

Dengan Proposisi 2.3 bagian *(ii)*, diperoleh

$$\lambda\left((x*b)*y^n\right) = \lambda\left(\left((x*y)*(x*y)\right)*y^{n-1}\right).$$

Dengan (BCI3), diperoleh

$$\lambda\left((x*b)*y^n\right) = \lambda(0*y^{n-1}).$$

Dengan (BCK5), diperoleh

$$\lambda\left((x*b)*y^n\right) = \lambda(0)$$

Jadi, $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b;x^n) \subseteq J$ dengan $b = x*y$. Sehingga J merupakan ideal dari L.■

Teorema 3.6. *Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam BCK/BCI-aljabar L atas U, maka himpunan berikut*

$$L_a \coloneqq \{x \in L \mid \widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x), \lambda(a) \geq \lambda(x)\}$$

merupakan ideal dari L untuk semua $a \in L$.

Bukti. Misalkan $x,y \in L$ menjadi $x*y \in L_a$ dan $y \in L_a$. Diberikan, $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x*y)$, $\lambda(a) \geq \lambda(x*y)$, $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(y)$, dan $\lambda(a) \geq \lambda(y)$. Dengan menggunakan syarat (6) dan (7), diperoleh

$$\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x*y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \subseteq \widetilde{\Phi}(x) \subseteq \widetilde{\Phi}(0),$$

dan

$$\lambda(a) \geq \bigvee\{\lambda(x*y), \lambda(y)\} \geq \lambda(x) \geq \lambda(0).$$

Dengan demikian $0 \in L_a$ dan $x \in L_a$, karena L_a merupakan ideal dari L untuk semua $a \in L$.

Contoh berikut mengilustrasikan Teorema 6.

Contoh 3.5. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L atas U. Dengan menggunakan Tabel 3.4 pada Contoh 3.3, $L_0 = \{0\}$, $L_1 = \{0,1\}$, $L_2 = \{0,1,2\}$, $L_3 = \{0,3\}$, $L_4 = \{0,1,2,4\}$, yang merupakan ideal dari L.

Teorema 3.7. *Jika $a \in L$ dan misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam BCK/BCI-aljabar L atas U, maka:*

(1) Jika L_a ideal dari L, maka $\widetilde{\Phi}_\lambda$ memenuhi:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x*y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \Rightarrow \widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x), \\ \lambda(a) \geq \bigvee\{\lambda(x*y), \lambda(y)\} \Rightarrow \lambda(a) \geq \lambda(x), \end{pmatrix} \quad (12)$$

untuk semua $x,y \in L$.

(2) Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ memenuhi syarat (6) pada Definisi 3.1 dan (12), maka L_a adalah ideal dari L.

Bukti. (1) Asumsikan bahwa L_a ideal dari L dan $x, y \in L$ dengan

$$\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y)$$

dan

$$\lambda(a) \geq \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\}.$$

Maka $x * y \in L_a$ dan $y \in L_a$ sebab $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y)$ dan $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y) \subseteq \widetilde{\Phi}(y)$. Dengan (3) diperoleh $x \in L_a$. Jadi, $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x)$ dan $\lambda(a) \geq \lambda(x)$.

(2) Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dari L atas U memenuhi (6) dan (12). Maka $0 \in L_a$ karena L_a ideal dari L. Misalkan $x, y \in L$ dengan $x * y \in L_a$ dan $y \in L_a$. Maka $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y)$, $\lambda(a) \geq \lambda(x * y)$, $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(y)$, $\lambda(a) \geq \lambda(y)$. Oleh sebab itu, $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y) \cap \widetilde{\Phi}(y)$ dan $\lambda(a) \geq \bigvee\{\lambda(x * y), \lambda(y)\}$. Karena $\widetilde{\Phi}_\lambda$ memenuhi (12), diperoleh $\widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x)$ dan $\lambda(a) \geq \lambda(x)$, sehingga $x \in L_a$. Jadi, L_a merupakan ideal dari L.■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diatas, diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Struktur dan sifat-sifat ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar.
   1.1. Misalkan L *BCK/BCI*-aljabar. Untuk struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas U, jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dari L atas U, maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t)$ adalah ideal dari L untuk semua $\alpha \in \mathcal{P}(U)$ dan $t \in I$ dengan $\widetilde{\Phi}_\lambda(\alpha) \cap \widetilde{\Phi}_\lambda(t) \neq \emptyset$.
   1.2. Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar dari L atas U, maka pernyaatan $\left(x \leq y \Rightarrow \widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(y), \lambda(x) \leq \lambda(y)\right)$ dan $\left(x * y \leq z \Rightarrow \begin{Bmatrix} \widetilde{\Phi}(x) \supseteq \widetilde{\Phi}(y) \cap \widetilde{\Phi}(z) \\ \lambda(x) \leq \bigvee\{\lambda(y), \lambda(z)\} \end{Bmatrix}\right)$ berlaku, untuk semua $x, y \in L$.
   1.3. Misalkan L *BCK/BCI*-aljabar. Untuk ideal hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dari L atas U, maka pernyaatan $\widetilde{\Phi}\big((x * y) * y\big) \subseteq \widetilde{\Phi}(x * y), \lambda\big((x * y) * y\big) \geq \lambda(x * y)$ dan $\begin{pmatrix} \widetilde{\Phi}\big((x * y) * z\big) \subseteq \widetilde{\Phi}\big((x * z) * (y * z)\big) \\ \lambda\big((x * y) * z\big) \geq \lambda\big((x * z) * (y * z)\big) \end{pmatrix}$ setara, untuk semua $x, y, z \in L$.
   1.4. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam *BCK*-aljabar dari L atas U sedemikian hingga $\widetilde{\Phi}(x) \subseteq \widetilde{\Phi}(0), \lambda(x) \geq \lambda(0)$, $\widetilde{\Phi}(x * y) = \widetilde{\Phi}(x) \cup \widetilde{\Phi}(y)$, dan $\lambda(x * y) = \bigwedge\{\lambda(x), \lambda(y)\}$ untuk semua $x, y \in L$. Untuk semua $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{L}$ dan semua bilangan asli n, jika $x \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ maka $x * y \in \widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ untuk semua $y \in L$.
   1.5. Misalkan struktur hibrida $\widetilde{\Phi}_\lambda$ dalam *BCK*-aljabar dari L atas U, jika $a \in L$ memenuhi $x \leq a$, untuk semua $x \in L$. Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n) = L = \widetilde{\Phi}_\lambda(a; b^n)$ untuk semua $b \in L$ dan semua bilangan asli n.
   1.6. Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam *BCK*-aljabar L atas U , maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n) \subseteq \widetilde{\Phi}_\lambda(c; a^n)$ untuk semua bilangan asli n serta $a, b, c \in L$ dengan $b \leq c$.
2. Hubungan antara ideal hibrida dan subaljabar hibrida dalam *BCK/BCI* -aljabar.
   2.1. Jika L adalah *BCK*-aljabar, maka setiap ideal hibrida dari L adalah subaljabar hibrida dari L.
3. Syarat suatu himpunan merupakan ideal dalam *BCK/BCI*-aljabar.
   3.1. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam *BCK*-aljabar implikatif positif L atas U dengan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ injektif. Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(y * b) * a^n)$ merupakan ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$.
   3.2. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam *BCK*-aljabar impilkatif positif L atas U memenuhi syarat (6) pada Definisi 3.1 dan (9). Maka $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n)$ merupakan ideal dari L untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in L$.
   3.3. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida injektif dalam *BCK*-aljabar L atas U. Jika J ideal dari L, maka

$\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in J$.

3.4. Misalkan $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam *BCK*-aljabar L atas U. Jika J subset dari L seperti $\widetilde{\Phi}_\lambda(b; a^n) \subseteq J$ untuk semua bilangan asli n dan $a, b \in J$, maka J merupakan ideal dari L.

3.5. Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ ideal hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar L atas U, maka himpunan $L_a \coloneqq \{x \in L \,|\, \widetilde{\Phi}(a) \subseteq \widetilde{\Phi}(x), \lambda(a) \geq \lambda(x)\}$ merupakan ideal dari L untuk semua $a \in L$.

3.6. Jika $\widetilde{\Phi}_\lambda$ struktur hibrida dalam *BCK/BCI*-aljabar L atas U memenuhi syarat (6) pada Definisi 3.1 dan (10), maka L_a adalah ideal dari L.

SARAN

Untuk memperluas pengetahuan tentang *BCK/BCI*-aljabar, perlu diselidiki kebalikan dari Teorema 3.1 yang belum bisa ditetapkan benar dan salahnya.

DAFTAR PUSTAKA

Alifviansyah, K., & Lukito, A. (2022). BCK-ALJABAR KUADRUPEL NEUTROSOFIK. *MATHunesa*, 10(1), 226-238.

Dedekind, R. (1996). *Theory of Algebraic Integers.* Cambridge: Cambridge University Press.

Huang, Y. (2006). *BCI-Algebras.* Beijing, China: Science Press.

Iséki, K. (1966). An algebra related with a propositional calculus. *Proc. Japan Acad*, 42(1), 26-29.

Jun, Y. B., & Meng, J. (1994). *BCK-algebras.* Seoul: Kyung Moon Sa Company.

Jun, Y. B., Song, S. Z., & Muhiuddin, G. (2018). Hybrid Structures and Applications. *Annals of Communications in Mathematics*, 1(1), 11-25.

Jun, Y. B., Song, S. Z., Smarandache, F., & Bordbar, H. (2018). Neutrosophic Quadruple BCK/BCI-Algebras. *Axioms*, 7(2), 41.

Kang, K. T., Song, S. Z., Roh, E. H., & Jun, Y. B. (2020). Hybrid Ideals of BCK/BCI-Algebras. *Axioms*, 9(3), 85.

Kirana, D. G., & Lukito, A. (2022). Karakterisasi BCK-Aljabar Implikatif Berdasarkan N-Ideal Implikatif Neutrosofik. *MATHunesa*, 10(1), 21-32.

Masriyah. (2017). *Dasar-Dasar Matematika.* Surabaya: UNESA.

Mudrik, M. B., & Lukito, A. (2018). Sifat-Sifat Q-Aljabar. *MATHunesa*, 6(3), 23-30.