

STRUKTUR SEMIGRUP DAN IDEAL KOMUTATIF DARI BCK-ALJABAR BERDASARKAN STRUKTUR HIMPUNAN KUBIK PERSILANGAN

M. Sholahuddin Al-Ayubi Julian Rosul

Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya,
email: m.sholhuddin.19063@mh.unesa.ac.id

Agung Lukito

Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya,
email: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

Himpunan fuzzy merupakan alat yang berguna untuk pengolahan informasi positif, tetapi memiliki keterbatasan dalam pengolahan informasi negatif. Struktur himpunan kubik persilangan dibangun dari himpunan fungsi bernilai interval dan himpunan fungsi bernilai negatif. Struktur semigrup dibangun dengan operasi biner pada struktur himpunan kubik persilangan. Konsep ideal kubik persilangan komutatif diperkenalkan dengan menerapkan struktur himpunan kubik persilangan pada ideal komutatif dalam BCK-Aljabar, dan beberapa sifat diselidiki. Hubungan antara ideal kubik persilangan dan ideal kubik persilangan komutatif dibahas. Sebuah contoh untuk menunjukkan bahwa ideal kubik persilangan tidak bersifat komutatif diberikan dan kemudian syarat-syarat agar ideal kubik persilangan dapat menjadi ideal kubik persilangan komutatif dieksplorasi. Karakterisasi ideal kubik persilangan komutatif dibahas dan hubungan antara ideal kubik persilangan komutatif dan himpunan level kubik persilangan dibicarakan.

Kata Kunci: Himpunan Fuzzy, Kubik persilangan, BCK-Aljabar

Abstract

Fuzzy sets are a useful tool for processing positive information, but have limitations in processing negative information. The structure of a crossed cubic set is built from a set of interval-valued functions and a set of negative-valued functions. The semigroup structure is built with binary operations on the crossed cubic set structure. The concept of commutative crossed cubic ideals is introduced by applying the structure of crossed cubic sets to commutative ideals in BCK-Algebra, and several properties are investigated. The relationship between the crossed cubic ideal and the commutative crossed cubic ideal is discussed. An example to show that a crossing cubic ideal is not commutative is given and then the conditions for a crossing cubic ideal to be a commutative crossing cubic ideal are explored. The characterization of the commutative crossing cubic ideal is discussed and the relationship between the commutative crossing cubic ideal and the set of crossing cubic levels is discussed.

Keywords: Fuzzy sets, crossover cubic, BCK-Algebra

PENDAHULUAN

Himpunan tegas A pada himpunan semesta K dapat digambarkan sebagai fungsi karakteristiknya $\chi_A : K \rightarrow \{0, 1\}$. Bila $[0, 1]$ diambil sebagai perluasan daerah hasil fungsi karakteristik $\{0, 1\}$, diperoleh fungsi baru $\chi : K \rightarrow [0, 1]$, dan fungsi tersebut disebut himpunan fuzzy, yang dikenalkan oleh Zadeh (1965).

Himpunan fuzzy merupakan alat yang sangat berguna dan berharga untuk pengolahan informasi positif, tetapi memiliki keterbatasan dalam pengolahan informasi negatif. Berdasarkan kebutuhan alat yang diperlukan untuk mengolah

informasi negatif, Jun dan Kim (2021) mengenalkan fungsi bernilai - negatif dan menerapkannya pada BCK/BCI - aljabar. Skripsi ini mempelajari teori ideal dalam BCK/BCI - aljabar berdasarkan fungsi bernilai - negatif.

Himpunan fuzzy bernilai - interval, yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan bernilai - interval, sudah diajukan lebih dari 40 tahun yang lalu sebagai perluasan biasa himpunan fuzzy. Jun dan Kim mengenalkan struktur himpunan kubik persilangan yang terdiri atas himpunan fuzzy bernilai - interval dan fungsi bernilai - negatif, dan menerapkannya pada BCK/BCI - aljabar. Dalam Jun dan Song (2021), mereka mengenalkan ideal kubik

persilangan dalam BCK/BCI - aljabar. Skripsi ini didasarkan pada hasil telaah artikel jurnal internasional yang berjudul "Semigroup Structures and Commutative Ideals of BCK-Algebras Based on Crossing Cubic Set Structures" (Ozturk dan Jun, 2022). Artikel tersebut membahas konstruksi struktur semigrup pada koleksi struktur himpunan kubik persilangan, ideal komutatif dalam BCK"-aljabar", ideal kubik persilangan dan ideal kubik persilangan komutatif serta hubungan di antaranya, hubungan antara ideal kubik persilangan komutatif dan himpunan level kubik persilangan dalam BCK - aljabar, dan syarat agar suatu ideal kubik persilangan merupakan ideal kubik persilangan komutatif.

KAJIAN TEORI

A. Konsep BCK-Aljabar

Definisi 2.1 Misalkan K himpunan dengan elemen istimewa 0 dan operasi biner $*$. Himpunan K disebut BCK-aljabar bila memenuhi lima syarat berikut:

$$(\forall a, b, c \in K) \left(((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0 \right), \quad (2.1)$$

$$(\forall a, b \in K) \left((a * (a * b)) * b = 0 \right), \quad (2.2)$$

$$(\forall a \in K) (a * a = 0), \quad (2.3)$$

$$(\forall a, b \in K) (a * b = 0, b * a = 0 \Rightarrow a = b), \quad (2.4)$$

$$(\forall a \in K) (0 * a = 0). \quad (2.5)$$

Definisi 2.2 (Huang Y, 2006) Pengurutan parsial $\leq$ pada BCK-aljabar K didefinisikan sebagai berikut. Untuk semua $a, b \in K$,

$$(a \leq b \Leftrightarrow a * b = 0).$$

Proposisi 2.3 Dalam BCK-aljabar K berlaku empat pernyataan berikut:

$$(\forall a \in K) (a * 0 = a), \quad (2.6)$$

$$(\forall a, b, c \in K) ((a * b) * c = (a * c) * b), \quad (2.7)$$

$$(\forall a, b, c \in K) (a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c), \quad (2.8)$$

$$(\forall a, b, c \in K) (a \leq b \Rightarrow c * b \leq c * a), \quad (2.9)$$

Bukti. (2.6) Dengan substitusi $b = 0$ pada (2.2) diperoleh

$$(a * (a * 0)) * 0. \quad (2.10)$$

Dengan mengganti $b = a * 0$ serta $c = a$ pada (2.1) didapatkan

$$((a * (a * 0)) * (a * a)) * (a * (a * 0)) = 0.$$

Dari (2.3), identitas ini menjadi

$$((a * (a * 0)) * 0) * (a * (a * 0)) = 0. \quad (2.11)$$

Substitusikan (2.10) ke (2.11) untuk memperoleh

$$0 * (a * (a * 0)) = 0. \quad (2.12)$$

Dari (2.10) dan (2.12), dengan (2.4), diperoleh

$$a * (a * 0) = 0. \quad (2.13)$$

Dengan substitusi $b = a$ pada (2.2) diperoleh

$$(a * (a * a)) * a = 0.$$

Dari (2.3), identitas berikut berlaku

$$(a * 0) * a = 0. \quad (2.14)$$

Dari (2.1) dan (2.14), dengan (2.4) diperoleh

$$a * 0 = a.$$

(2.7) Dengan substitusi $t = b$ pada (2.1), didapat

$$(a * (a * b)) * b = 0$$

atau dengan Definisi (2.2),

$$b * (a * b) \leq b.$$

Kemudian, dengan bagian (2.6) didapat

$$(a * b) * b \leq (a * b) * (a * (b * c)).$$

Dengan substitusi $u = c * u$ pada (2.1) didapat

$$((a * b) * (a * (a * c))) * ((a * c) * b) = 0$$

atau

$$(a * b) * (a * (a * c)) \leq (a * c) * b.$$

Karena pengurutan bersifat transitif, dari dua hasil terakhir ini dapat menyimpulkan bahwa:

$$(a * b) * c \leq (a * c) * b.$$

Dengan substitusi $t = b$ dan $u = c$ p

ada hasil ini diperoleh

$$(a * c) * b \leq (a * b) * c,$$

dengan (2.4) didapat

$$(a * b) * c = (a * c) * b.$$

(2.8) Dengan substitusi $t = b$ dan $u = c$ pada (2.1) didapat

$$((a * c) * (a * b)) * (b * c) = 0$$

dan sebab $a \leq b$, diperoleh

$$((a * c) * 0) * (b * c) = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.3, didapat

$$(a * c) * (b * c) = 0$$

Serta berdasarkan Definisi $\leq$ bisa disimpulkan

$$a * c \leq b * c.$$

Dengan mengganti $u = s$ serta $s = u$ pada (2.1), didapat

$$((c * b) * (c * a)) * (a * b) = 0$$

dan karena $a \leq b$, diperoleh

$$((c * b) * (c * a)) * 0 = 0.$$

Berdasarkan Proposisi 2.3, didapat

$$(c * b) * (c * a) = 0$$

berdasarkan Definisi 2.1 $\leq$ dapat disimpulkan

$$c * b \leq c * a.$$

Definisi 2.4 BCK-aljabar K dikatakan komutatif jika $a \wedge b = b \wedge a$ untuk semua $a, b \in K$ dengan $a \wedge b = a * (a * b)$.

$$x \leq y \Rightarrow x = y \wedge x$$

$$y \leq x \Rightarrow y = x \wedge y$$

Definisi 2.5 Subhimpunan L dari BCK-aljabar K disebut $\forall a, b \in L$ subaljabar dari K jika $a * b \in L$.

$$a * b(2.6) = (a * b) * 0 = (2.7)(a * 0) * b$$

$$\therefore (a * 0) * b \in L \text{ dan } b \in L$$

$$a * (0 \wedge a) \in L$$

$$= a * (0 * (0 * a))$$

$$(2.6) = a * (0 * 0)$$

$$(2.3) = a * 0$$

$$(2.6) = a$$

$$\therefore a \in L$$

Jika didalam BCK-aljabar, setiap ideal komutatif merupakan ideal

$$(a * b) * a(2.7) = (a * a) * b$$

$$(2.3) = 0 * b$$

$$(2.5) = 0 \in L(a)$$

$$(a * b) * a \in L(2.10) \Rightarrow a * b \in L$$

Jika setiap ideal di BCK aljabar merupakan subaljabar dari K BCK aljabar

Definisi 2.6 Subhimpunan I dari BCK-aljabar K disebut ideal dari K jika memenuhi dua syarat berikut:

$$0 \in I \quad (2.15)$$

$$(\forall a, b \in K)(a * b \in I, b \in I \Rightarrow a \in I) \quad (2.16)$$

Definisi 2.7 Subhimpunan I ideal dari BCK-aljabar K disebut ideal komutatif dari K jika memenuhi syarat (2.15) dan

$$(\forall a, b, c \in K)((a * b) * c \in I, c \in I \rightarrow a * (b \wedge a) \in I). \quad (2.17)$$

B. Struktur Himpunan Kubik Persilangan

Misalkan K BCK-aljabar dan menyatakan :

$$\mathcal{F}(K, [-1, 0]) = \{f \mid f : K \rightarrow [-1, 0]\},$$

sebagai koleksi semua fungsi dari himpunan K ke interval $[-1, 0]$. Katakan bahwa elemen dari $\mathcal{F}(K, [-1, 0])$ fungsi bernilai negatif dari K ke $[-1, 0]$ (singkatnya, $\mathcal{N}$ -fungsi pada K).

Definisi 2.8 Didefinisikan pengurutan parsial $\leq$ pada $\mathcal{F}(K, [-1, 0])$ sebagai berikut. Untuk semua $\zeta, \eta \in \mathcal{F}(K, [-1, 0])$,

$$\zeta \leq \eta \Leftrightarrow (\forall a \in K)(\zeta(a) \leq \eta(a)) \quad (2.18)$$

Definisi 2.9 Bilangan interval didefinisikan sebagai subinterval $\tilde{a} = [a^-, a^+]$ dari $[0, 1]$, dengan $0 \leq a^- \leq a^+ \leq 1$.

Bilangan interval $[0, 0]$ dan $[1, 1]$ berturut-turut dilambangkan dengan $\tilde{0}$ dan $\tilde{1}$.

Nyatakan dengan $[[0, 1]]$ sebagai himpunan semua bilangan interval.

Definisi 2.10 Misalkan $\tilde{a}_1 := [a_1^-, a_1^+]$ dan $\tilde{a}_2 := [a_2^-, a_2^+]$ dua bilangan interval. Definiskan bilangan interval

$$\text{rmin}\{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\} = [\min\{a_1^-, a_2^-\}, \min\{a_1^+, a_2^+\}],$$

dan relasi antar dua elemen di $[[0, 1]]$:

$$\tilde{a}_1 \succcurlyeq \tilde{a}_2 \Leftrightarrow a_1^- \geq a_2^-, a_1^+ \geq a_2^+,$$

$$\tilde{a}_1 \preccurlyeq \tilde{a}_2 \Leftrightarrow a_1^- \leq a_2^-, a_1^+ \leq a_2^+,$$

$$\tilde{a}_1 \succ \tilde{a}_2 \Leftrightarrow \tilde{a}_1 \succcurlyeq \tilde{a}_2, \tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2,$$

$$\tilde{a}_1 \prec \tilde{a}_2 \Leftrightarrow \tilde{a}_1 \preccurlyeq \tilde{a}_2, \tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2.$$

Definisi 2.11 Misalkan $\tilde{a}_i \in [[0, 1]]$ dengan $i \in \Lambda$. Definiskan dua bilangan interval berikut:

$$\text{rinf}_{i \in \Lambda} \tilde{a}_i = \left[\inf_{i \in \Lambda} a_i^-, \inf_{i \in \Lambda} a_i^+ \right]$$

dan

$$\sup_{i \in \Lambda} \tilde{a}_i \left[\sup_{i \in \Lambda} a_i^-, \sup_{i \in \Lambda} a_i^+ \right].$$

Misalkan K himpunan tak-kosong. Fungsi $h : K \rightarrow [[0, 1]]$ disebut himpunan fuzzy bernilai interval (ringkasnya, himpunan IVF) di K . Lambangkan $[[0, 1]]^K$ sebagai koleksi semua himpunan IVF di K . Setiap $h \in [[0, 1]]^K$ dan $a \in K, h(a) = [h^-(a), h^+(a)]$ disebut derajat keanggotaan suatu element a dari h dengan $h^- : K \rightarrow [0, 1]$ dan $h^+ : \rightarrow [0, 1]$ merupakan himpunan fuzzy di K yang berturut-turut disebut himpunan fuzzy bawah dan himpunan fuzzy atas di K . Untuk mudahnya, lambangkan $h = [h^-, h^+]$.

Definisi 2.12 Untuk setiap $\hbar, \varepsilon \in [[0,1]]^K$, definisikan

$\hbar \subseteq \varepsilon \Leftrightarrow \hbar(a) \leq \varepsilon(a)$, untuk semua $a \in K$,
dan

$\hbar = \varepsilon \Leftrightarrow \hbar(a) = \varepsilon(a)$, untuk semua $a \in K$.

Definisi 2.13 ([14]). Struktur himpunan kubik persilangan pada himpunan K adalah sepasang $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$ dengan

$C_{(\hbar, \zeta)} := \{ \langle a, \hbar(a), \zeta(a) \rangle \mid a \in K \}$ (2.19)
dengan $\hbar$ merupakan himpunan IVF (interval-valued fuzzy) di K dan ζ merupakan $\mathcal{N}$ -fungsi pada K .

Definisi 2.14 ([14]) Struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$ pada BCK-aljabar K disebut subaljabar kubik persilangan dari K jika memenuhi syarat berikut:

$$(\forall a, b \in K) \left(\begin{aligned} &\hbar(a * b) \geq \min\{\hbar(a), \hbar(b)\} \\ &\zeta(a * b) \leq \max\{\zeta(a), \zeta(b)\} \end{aligned} \right) \quad (2.20)$$

Proposisi 2.15 ([14]) . Setiap subaljabar kubik persilangan $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$ dari BCK-aljabar K memenuhi $(\forall a \in K) (\hbar(0) \geq \hbar(a), \zeta(0) \leq \zeta(a))$ (2.21)

Definisi 2.16 ([15]) . Struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$ pada BCK-aljabar disebut ideal kubik persilangan (singkatnya, CC-ideal) dari K jika memenuhi syarat berikut:

$$(\forall a, b \in K) \left(\begin{aligned} &\hbar(0) \geq \hbar(a) \geq \min\{\hbar(x * y), \hbar(y)\} \\ &\zeta(0) \leq \zeta(a) \leq \max\{\zeta(x * y), \zeta(y)\} \end{aligned} \right) \quad (2.22)$$

PEMBAHASAN

A. Semigrup Struktur Himpunan Kubik Persilangan

Nyatakan $CCS(K)$ sebagai himpunan semua struktur himpunan kubik persilangan pada himpunan K .

Definisi 3.1 Misalkan $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$, $(K, C_{(\varepsilon, \eta)}) \in CCS(K)$. Jumlah $(K, C_{(\hbar, \zeta)})$ dan $(K, C_{(\varepsilon, \eta)})$, dilambangkan dengan $(K, C_{(\hbar, \zeta)}) \oplus (K, C_{(\varepsilon, \eta)})$, didefinisikan sebagai struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(\hbar \oplus \varepsilon, \zeta \oplus \eta)})$ dengan $\hbar \oplus \varepsilon: K \rightarrow [[0,1]]$ dan $\zeta \oplus \eta: K \rightarrow [-1,0]$ diberikan sebagai berikut:

$$(\hbar \oplus \varepsilon)(x) = [(\hbar \oplus \varepsilon)^-(x), (\hbar \oplus \varepsilon)^+(x)]$$

dan

$$(\zeta \oplus \eta)(x) = \zeta(x) + \eta(x) - \zeta(x) \cdot \eta(x)$$

di mana

$$(\hbar \oplus \varepsilon)^-(x) = \hbar^-(x) + \varepsilon^-(x) - \hbar^-(x) \cdot \varepsilon^-(x)$$

dan

$$(\hbar \oplus \varepsilon)^+(x) = \hbar^+(x) + \varepsilon^+(x) - \hbar^+(x) \cdot \varepsilon^+(x)$$

Contoh 3.2 Misalkan $K = [0,1]$ dan didefinisikan

$$\hbar: K \rightarrow [[0,1]], x \mapsto [0, 0.9x, x],$$

$$\zeta: K \rightarrow [-1,0], x \mapsto -x$$

dan

$$\varepsilon: K \rightarrow [[0,1]], x \mapsto [0, 0.5x^2, x^2]$$

$$\eta: K \rightarrow [-1,0], x \mapsto -\frac{1}{2}x.$$

Maka $(K, C_{(\hbar, \zeta)}), (K, C_{(\varepsilon, \eta)}) \in CCS(K)$, dan

jumlahnya

$$(K, C_{(\hbar, \zeta)}) \oplus (K, C_{(\varepsilon, \eta)}) = (K, C_{(\hbar \oplus \varepsilon, \zeta \oplus \eta)})$$

Ditentukan sebagai berikut:

$$\hbar \oplus \varepsilon: K \rightarrow [[0,1]], x \mapsto [0.9x + 0.5x^2 - 0.45x^3, x + x^2 - x^3]$$

$$\zeta \oplus \eta: K \rightarrow [-1,0], x \mapsto -x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

Misalkan $(K, C_{(\hbar, \zeta)}), (K, C_{(\varepsilon, \eta)}), (K, C_{(\delta, \tau)}) \in CCS(K)$.

Maka

$$\begin{aligned} (\hbar \oplus \varepsilon)^-(x) + \delta^-(x) - (\hbar \oplus \varepsilon)^-(x) \cdot \delta^-(x) \\ = \hbar^-(x) + \varepsilon^-(x) - \hbar^-(x) \cdot \varepsilon^-(x) + \delta^-(x) \\ - (\hbar^-(x) + \varepsilon^-(x) - \hbar^-(x) \cdot \varepsilon^-(x)) \delta^-(x) \\ = \hbar^-(x) + \varepsilon^-(x) - \hbar^-(x) \cdot \varepsilon^-(x) + \delta^-(x) \\ - \hbar^-(x) \cdot \delta^-(x) - \varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x) + \hbar^-(x) \\ \cdot \varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \hbar^-(x) + (\varepsilon^- \oplus \delta^-)(x) - \hbar^-(x) \cdot (\varepsilon^- \oplus \delta^-)(x) \\ = \hbar^-(x) + (\varepsilon^-(x) + \delta^-(x) - \varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x)) \\ - \hbar^-(x) \cdot (\varepsilon^-(x) + \delta^-(x) - \varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x)) \\ = \hbar^-(x) + \varepsilon^-(x) + \delta^-(x) - \varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x) \\ - \hbar^-(x) \cdot \varepsilon^-(x) \\ - \hbar^-(x) \cdot \delta^-(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hbar \oplus \varepsilon)^+(x) + \delta^+(x) - (\hbar \oplus \varepsilon)^+(x) \cdot \delta^+(x) \\ = \hbar^+(x) + \varepsilon^+(x) - \hbar^+(x) \cdot \varepsilon^+(x) \\ + \delta^+(x) - (\hbar^+(x) + \varepsilon^+(x) - \hbar^+(x) \\ \cdot \varepsilon^+(x)) \cdot \delta^+(x) \\ = \hbar^+(x) + \varepsilon^+(x) - \hbar^+(x) \cdot \varepsilon^+(x) + \delta^+(x) - \hbar^+(x) \\ \cdot \delta^+(x) - \varepsilon^+(x) \cdot \delta^+(x) + \hbar^+(x) \\ \cdot \varepsilon^+(x) + \delta^+(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \hbar^+(x) + (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) - \hbar^+(x) \cdot (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) \\ = \hbar^+(x) \\ + (\varepsilon^+(x) + \delta^+(x) - \varepsilon^+(x) \cdot \delta^+(x)) \\ - \hbar^+(x) \cdot (\varepsilon^+(x) + \delta^+(x) - \varepsilon^+(x) \cdot \delta^+(x)) \\ = \hbar^+(x) + \varepsilon^+(x) + \delta^+(x) - \varepsilon^+(x) \\ \cdot \delta^+(x) - \hbar^+(x) \cdot \varepsilon^+(x) \\ - \hbar^+(x) \cdot \delta^+(x) + \hbar^+(x) \cdot \varepsilon^+(x) + \delta^+(x), \end{aligned}$$

yaitu $(\hbar \oplus \varepsilon)^-(x) + \delta^-(x) - (\hbar \oplus \varepsilon)^-(x) \cdot$

$\delta^-(x) = \hbar^-(x) + (\varepsilon^- \oplus \delta^-)(x) - \hbar^-(x) \cdot$

$(\varepsilon^- \oplus \delta^-)$ dan $(\hbar \oplus \varepsilon)^+(x) + \delta^+(x) - (\hbar \oplus \varepsilon)^+(x) \cdot$

$$\delta^+(x) = h^+(x) + (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) - h^+(x) \cdot (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) + \delta^+(x) - (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) \cdot \delta^+(x) = \\ & h^+(x) + (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) - h^+(x) \cdot (\varepsilon^+ \oplus \delta^+)(x) \end{aligned}$$

untuk semua $x \in K$.

Oleh karena itu, $(h \oplus \varepsilon) \oplus \eta = h \oplus (\varepsilon \oplus \eta)$. Di samping itu, juga diperoleh

$$\begin{aligned} ((\zeta \oplus \eta) \oplus \tau)(x) &= (\zeta \oplus \eta)(x) + \tau(x) - (\zeta \oplus \eta)(x) \cdot \tau(x) \\ &= \zeta(x) + \eta(x) - \zeta(x) \cdot \eta(x) + \tau(x) \\ &\quad - (\zeta(x) + \eta(x) - \zeta(x) \cdot \eta(x)) \cdot \tau(x) \\ &= \zeta(x) + \eta(x) - \zeta(x) \cdot \eta(x) + \tau(x) - \zeta(x) \cdot \tau(x) \\ &\quad - \eta(x) \cdot \tau(x) + \zeta(x) \cdot \eta(x) \cdot \tau(x) \\ &= \zeta(x) + \eta(x) + \tau(x) - \eta(x) \cdot \tau(x) - \zeta(x) \cdot \eta(x) \\ &\quad - \zeta(x) \cdot \tau(x) + \zeta(x) \cdot \eta(x) \cdot \tau(x) \\ &= \zeta(x) + (\eta(x) + \tau(x) - \eta(x) \cdot \tau(x)) - \zeta(x) \\ &\quad \cdot (\eta(x) + \tau(x) - \eta(x) \cdot \tau(x)) \\ &= \zeta(x) + (\eta \oplus \tau)(x) \\ &= (\zeta \oplus (\eta \oplus \tau))(x) \end{aligned}$$

untuk semua $x \in K$. Jadi,

$$\begin{aligned} & ((K, C_{(h,\zeta)}) \oplus (K, C_{(\varepsilon,\eta)})) \oplus (K, C_{(\delta,\tau)}) = \\ & (K, C_{(h,\zeta)}) \oplus ((K, C_{(\varepsilon,\eta)}) \oplus (K, C_{(\delta,\tau)})). \end{aligned}$$

Sekarang,

$$\begin{aligned} (h \oplus \varepsilon)^-(x) &= h^-(x) + \varepsilon^-(x) - h^-(x) \cdot \varepsilon^-(x) \\ &= \varepsilon^-(x) + h^-(x) - \varepsilon^-(x) \cdot h^-(x) \\ &= (\varepsilon \oplus h)^-(x), \\ (h \oplus \varepsilon)^+(x) &= h^+(x) + \varepsilon^+(x) - h^+(x) \cdot \varepsilon^+(x) \\ &= \varepsilon^+(x) + h^+(x) - \varepsilon^+(x) \cdot h^+(x) \\ &= (\varepsilon \oplus h)^+(x), \end{aligned}$$

$$\text{Dan } (\zeta \oplus \eta)^-(x) = \zeta^-(x) + \eta^-(x) - \zeta^-(x) \cdot \eta^-(x)$$

$$\eta^-(x) = \eta^-(x) + \zeta^-(x) - \eta^-(x) \cdot \zeta^-(x) \text{ untuk}$$

semua $x \in K$. Jadi,

$$\begin{aligned} & ((K, C_{(h,\zeta)}) \oplus (K, C_{(\varepsilon,\eta)})) = ((K, C_{(h,\zeta)}) \oplus \\ & (K, C_{(\varepsilon,\eta)})). \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dibahas struktur himpunan kubik yang persilangan $(K, C_{(\bar{0},0)})$ pada K dengan:

$$\bar{0}: K \rightarrow [[0,1], x \mapsto [0,0]$$

dan

$$\mathbf{0}: K \rightarrow [-1,0], x \mapsto 0.$$

Untuk setiap $(K, C_{(h,\zeta)}) \in CCS(K)$, didapatkan

$$\begin{aligned} (h \oplus \bar{0})(x) &= [h^-(x) + \bar{0}^-(x) - h^-(x) \cdot \bar{0}^-(x), h^+(x) + \bar{0}^+(x) \\ &\quad - h^+(x) \cdot \bar{0}^+(x)] \\ &= [h^-(x) + h^+(x)] \end{aligned}$$

$$\text{dan } (\zeta \oplus \mathbf{0}) = \zeta(x) + \mathbf{0}(x) - \zeta(x) \cdot \mathbf{0}(x) = \zeta(x)$$

untuk semua $x \in K$. Dengan cara serupa, $(\bar{0} \oplus$

$h)(x) = [h^-(x), h^+(x)]$, dan $(\mathbf{0} \oplus \zeta)(x) = \zeta(x)$ untuk semua $x \in K$. Jadi,

$$\begin{aligned} (K, C_{(h,\zeta)}) \oplus (K, C_{(\bar{0},0)}) &= (K, C_{(h,\zeta)}) \\ &= (K, C_{(\bar{0},0)}) \oplus (K, C_{(h,\zeta)}). \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.3 Koleksi $CCS(K)$ merupakan monoid komutatif di bawah operasi " $\oplus$ " dengan identitas $(K, C_{(\bar{0},0)})$.

Definisi 3.4 Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)}), (K, C_{(\varepsilon,\eta)}) \in CCS(K)$. Maka produk $(K, C_{(h,\zeta)})$ dan $(K, C_{(\varepsilon,\eta)})$, dilambangkan dengan $(K, C_{(h,\zeta)}) \otimes (K, C_{(\varepsilon,\eta)})$, didefinisikan sebagai struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(h \otimes \varepsilon, \zeta \otimes \eta)})$ di mana

$$\begin{aligned} h \otimes \varepsilon : K &\rightarrow [[0,1], x \\ &\mapsto [h^-(x) \cdot \varepsilon^-(x), h^+(x) \cdot \varepsilon^+(x)] \end{aligned}$$

$$\zeta \otimes \eta : K \rightarrow [-1,0], x \mapsto -\zeta(x) \cdot \eta(x).$$

Contoh 3.5 Perhatikan struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(h,\zeta)}), (K, C_{(\varepsilon,\eta)})$ pada Contoh 3.2. Maka produk $(K, C_{(h,\zeta)}) \otimes (K, C_{(\varepsilon,\eta)}) = (K, C_{(h \otimes \varepsilon, \zeta \otimes \eta)})$ ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h \otimes \varepsilon : K &\rightarrow [[0,1], x \mapsto [0.45x^3, x^3], \\ \zeta \otimes \eta : K &\rightarrow [-1,0], x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Teorema 3.6 Koleksi $CCS(K)$ merupakan semigrup komutatif di bawah operasi " $\otimes$ ".

Bukti. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)}), (K, C_{(\varepsilon,\eta)}), (K, C_{(\delta,\tau)}) \in CCS(K)$. Maka

$$\begin{aligned} & ((h \otimes \varepsilon) \otimes \delta)(x) \\ &= [(h \otimes \varepsilon)^- \cdot \delta^-(x), (h \otimes \varepsilon)^+ \cdot \delta^+(x)] \\ &= [(h^-(x) \cdot \varepsilon^-(x)) \cdot \delta^-(x), (h^+(x) \cdot \varepsilon^+(x)) \cdot \delta^+(x)] \\ &= [h^-(x) \cdot (\varepsilon^-(x) \cdot \delta^-(x)), h^+(x) \cdot (\varepsilon^+(x) \cdot \delta^+(x))] \\ &= [h^-(x) \cdot (\varepsilon \otimes \delta)^-(x), h^+(x) \cdot (\varepsilon \otimes \delta)^+(x)] \\ &= (h \otimes (\varepsilon \otimes \delta))(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & ((\zeta \otimes \eta) \otimes \tau)(x) = (\zeta \otimes \eta)(x) \cdot \tau(x) \\ &= ((\zeta(x) \cdot \eta(x)) \cdot \tau(x)) \\ &= \zeta(x) \cdot ((\eta(x) \cdot \tau(x))) = \zeta(x) \cdot ((\eta \otimes \tau)(x)) \\ &= (\zeta \otimes (\eta \otimes \tau))(x) \end{aligned}$$

untuk semua $x \in K$. Maka itu,

$$\begin{aligned} & ((K, C_{(h,\zeta)}) \otimes (K, C_{(E,\eta)})) \otimes (K, C_{(0,\tau)}) \\ &= (K, C_{(h,\zeta)}) \\ & \otimes ((K, C_{(E,\eta)}) \otimes (K, C_{(0,\tau)})) \end{aligned}$$

Selain itu, juga diperoleh

$$\begin{aligned} (\hbar \otimes E)(x) &= [\hbar^-(x) \cdot E^-(x), \hbar^+(x) \cdot E^+(x)] \\ &= E^-(x) \cdot \hbar^-(x), E^+(x) \\ & \cdot \hbar^+(x) = (E \otimes \hbar)(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (\zeta \otimes \eta)(x) &= [\zeta^-(x) \cdot \eta^-(x), \zeta^+(x) \cdot \eta^+(x)] \\ &= [\eta^-(x) \cdot \zeta^-(x), \eta^+(x) \\ & \cdot \zeta^+(x)] = (\zeta \otimes \eta)(x) \end{aligned}$$

untuk semua $x \in K$. Maka $(K, C_{(h,\zeta)}) \otimes (K, C_{(E,\eta)}) = (K, C_{(E,\eta)}) \otimes (K, C_{(h,\zeta)})$ dan dengan demikian $CCS(K)$ adalah semigrup komutatif.

B. Ideal Kubik Persilangan Komutatif pada BCK"-Aljabar"

Pada bagian berikut ini, himpunan K diasumsikan sebagai BCK-aljabar kecuali ditentukan lain.

Definisi 3.7 Struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(h,\zeta)})$ pada K disebut ideal kubik persilangan komutatif (secara singkat, ideal-cCC) dari K jika memenuhi

$$(\forall x \in K) (\hbar(0) \geq \hbar(x), \zeta(0) \leq \zeta(x)) \quad (3.1)$$

$$(\forall a, b, c \in K) \left(\begin{aligned} & \hbar(a * (b \wedge a)) \geq \min\{\hbar((a * b) * c) \hbar(b)\} \\ & \zeta(a * (b \wedge a)) \leq \max\{\zeta((a * b) * c) \zeta(b)\} \end{aligned} \right) \quad (3.2)$$

Jika K komutatif, maka syarat (18) ekuivalen dengan syarat berikut:

$$(\forall a, b, c \in K) \left(\begin{aligned} & \hbar(a * (b \wedge a)) \geq \min\{\hbar((a * b) * c) \hbar(b)\} \\ & \zeta(a * (b \wedge a)) \leq \max\{\zeta((a * b) * c) \zeta(b)\} \end{aligned} \right) \quad (3.3)$$

Contoh 3.8. Misalkan $K = \{0, 1, 2, 3\}$ himpunan dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.1. Tabel Cayley untuk operasi biner $*$

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	3	0

Maka K merupakan BCK-aljabar. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ struktur himpunan kubik persilangan pada K yang ditentukan oleh Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Representasi Tabular Untuk $(K, C_{(h,\zeta)})$

K	$\hbar(x)$	$\zeta(x)$
0	[0.39,0.76]	-0.8
1	[0.23,0.63]	-0.4

2	[0.23,0.63]	-0.4
3	[0.15,0.47]	-0.6

Mudah diverifikasi bahwa $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan CC-ideal di K .

Berikut ini akan dibicarakan hubungan antara CC-ideal dan cCC-ideal.

Teorema 3.9. Setiap cCC-ideal merupakan CC-ideal.

Penjelasan di bawah ini menginformasikan eksistensi CC-ideal, bukan cCC-ideal.

Bukti. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ cCC-ideal dari K . Substitusikan $y = 0$ pada Persamaan (3.2) dan gunakan Persamaan (2.5) dan (2.6) untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} \hbar(x) &= \hbar(a * (0 \wedge a)) \geq \min\{\hbar((a * 0) * c), \hbar(c)\} \\ &= \min\{\hbar(a * c), \hbar(c)\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \zeta(a * (0 \wedge a)) \leq \max\{\zeta((a * 0) * c), \zeta(c)\} \\ &= \max\{\zeta(a * c), \zeta(c)\} \end{aligned}$$

untuk semua $a, c \in K$. Oleh karena itu, $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan CC-ideal dari K .

Penjelasan di bawah ini menginformasikan eksistensi CC-ideal, bukan cCC-ideal.

Contoh 3.10. Misalkan $K = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ himpunan dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan dalam Tabel 3.3. Maka K merupakan BCK-aljabar.

Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ struktur himpunan kubik persilangan pada K yang ditentukan oleh Tabel 3.4.

Tabel 3.3. Tabel Cayley untuk operasi biner $*$

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	3	0

Tabel 3.4. Representasi tabular untuk $(K, C_{(h,\zeta)})$

K	$\hbar(x)$	$\zeta(x)$
0	[0.42,0.84]	-0.87
1	[0.37,0.74]	-0.74
2	[0.28,0.66]	-0.58
3	[0.17,0.52]	-0.43
4	[0.17,0.52]	-0.43

Mudah diverifikasi bahwa $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan CC-ideal dari K , tetapi bukan cCC-ideal dari K , karena

$$h(2 * (3 \wedge 2)) = h(2) = [0.28, 0.66] \not\supseteq [0.42, 0.84] = \text{rmin}\{h((2 * 3) * 0), h(0)\}$$

atau

$$\zeta(2 * (3 \wedge 2)) = \zeta(2) = -0.58 \not\leq -0.87 = \max\{\zeta((2 * 3) * 0), \zeta(0)\}.$$

Lemma 3.11. ([15]). *Setiap CC-ideal $(K, C_{(h,\zeta)})$ dari K memenuhi syarat berikut:*

$$(\forall a, b, c \in K) \left(a * b \leq c \Rightarrow \begin{pmatrix} h(0) \supseteq h(a) \supseteq \text{rmin}\{h(x * y), h(y)\} \\ \zeta(0) \leq \zeta(a) \leq \max\{\zeta(x * y), \zeta(y)\} \end{pmatrix} \right) \quad (3.4)$$

Teorema 3.12. *Dalam cBCK-aljabar, setiap CC-ideal merupakan cCC-ideal.*

Bukti. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ CC-ideal dari cBCK-aljabar K . Kombinasi dari Persamaan (1), (3), (7), dan komutativitas dari K menghasilkan hubungan berikut:

$$\begin{aligned} & ((a * (b \wedge a)) * ((a * b) * c) * c) * c(7) \\ & = (a * (b \wedge a)) * ((a * b) * c) \\ & * c(7 \& 8) \leq (a * (b \wedge a)) * (a * b) \\ & = (7 \text{ dan definisi meet}) (a \wedge b) * (b \wedge c) = 0, \end{aligned}$$

yaitu, $(a * (b \wedge a)) * ((a * b) * c) \leq c$ untuk semua $a, b, c \in K$. Berdasarkan Lemma 3.11, dapat disimpulkan bahwa $h(a * (b \wedge a)) \supseteq \text{rmin}\{h((a * b) * c), h(c)\}$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq \max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\}$

Oleh karena itu, $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan cCC-ideal dari K .

Akibat 3.13. *Jika BCK-aljabar K memenuhi salah satu dari syarat berikut:*

$$(\forall a, b \in K) (a \wedge b \leq b \wedge a), \quad (3.5)$$

$$(\forall a, b \in K) (a \wedge b = b * (b * (a \wedge b))), \quad (3.6)$$

$$(\forall a, b \in K) (a \leq b \Rightarrow a = b \wedge a), \quad (3.7)$$

maka setiap CC-ideal merupakan cCC-ideal.

Bukti. Jika sebuah aljabar BCK K memenuhi salah satu dari tiga kondisi Persamaan (3.5) - (3.7), maka K merupakan sebuah aljabar cBCK. Oleh karena itu, setiap ideal CC adalah ideal cCC menurut Teorema 4.

Teorema 3.14. *Setiap CC-ideal $(K, C_{(h,\zeta)})$ dari K yang memenuhi*

$$(\forall a, b, c \in K) \left(\begin{pmatrix} h((a * c) * (b \wedge a)) \supseteq h((a * b) * c) \\ \zeta((a * c) * (b \wedge a)) \leq \zeta((a * b) * c) \end{pmatrix} \right) \quad (3.8)$$

merupakan cCC-ideal untuk K .

Bukti. Mari $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan CC-ideal dari K yang memenuhi syarat Persamaan (3.8). Kombinasi Persamaan (2.7), (2.22), dan (3.8) menghasilkan

$$h(a * (b \wedge a)) \supseteq \text{rmin}\{h(a * (b \wedge a)) * c, h(c)\} \quad (16)$$

$$= \text{rmin}\{h((a * c) * (b \wedge a)), h(c)\} \quad (7)$$

$$\supseteq \text{rmin}\{h((a * b) * c), h(c)\} \quad (24)$$

Dan

$$\begin{aligned} \zeta(a * (b \wedge a)) & \leq \max\{\zeta(a * (b \wedge a)) * c, \zeta(c)\} \\ & = \max\{\zeta((a * c) * (b \wedge a)), \zeta(c)\} \\ & \leq \max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \end{aligned}$$

Untuk semua $a, b, c \in K$. Maka dari itu, $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan cCC-ideal untuk K jika, dan hanya jika, yaitu sebuah CC-ideal untuk K yang memenuhi

$$(\forall a, b, c \in K) \left(\begin{pmatrix} h(a * (b \wedge a)) \supseteq h(a * b) \\ \zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(a * b) \end{pmatrix} \right) \quad (3.9)$$

Bukti. Asumsikan bahwa $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah sebuah ideal-CC dari K . Maka, merupakan sebuah ideal-CC dari K menurut Teorema 3, dan oleh karena itu kita mengganti z dengan 0 pada Persamaan (3.2) dan kemudian menggunakan Persamaan (2.6) dan (2.22) untuk menemukan Persamaan (3.9).

Sebaliknya, mari kita misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan ideal-C dari K yang memenuhi kondisi Persamaan (3.9). Maka, $h(a * (b \wedge a)) \supseteq h(a * b) \supseteq \text{rmin}\{h((a * b) * c), h(c)\}$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \supseteq \zeta(a * b) \leq \max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\}$ untuk semua $a, b, c \in K$. Oleh karena itu, $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan CC-ideal untuk K .

$$K_v := \{a \in K \mid h(a) \supseteq h(v), \zeta(a) \leq \zeta(v)\}. \quad (3.10)$$

Bukti. Mari $v \in K$. Jelas benar $0 \in K_v$ dengan persamaan (3.1). Mari $a, b, c \in K$ sedemikian rupa sehingga $z \in K_v$ dan $(a * b) * c \in K_v$. Kemudian, $h(c) \geq h(v)$, $h((a * b) * c) \geq h(v)$, $\zeta(c) \leq \zeta(v)$ dan $\zeta((a * b) * c) \leq \zeta(v)$ dari persamaan (3.2) dapat disimpulkan bahwa

$$h(a * (b \wedge a)) \geq rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v)$$

dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v)$. Oleh karena itu $a * (b \wedge a) \in K_v$, dan oleh karena itu K_v merupakan himpunan komutatif ideal dari K .

Proposisi 3.15. Jika suatu struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(h, \zeta)})$ pada K , jika K_v merupakan suatu ideal komutatif dari K untuk $v \in K$, maka pernyataan berikut ini berlaku

$$\begin{cases} rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v) \Rightarrow h(a * (b \wedge a)) \geq h(v), \\ max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v) \Rightarrow \zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(v). \end{cases} \quad (3.11)$$

Untuk semua $a, b, c \in K$

Observasi (3.11)

$$\begin{aligned} rmin(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \geq \tilde{b} &\Leftrightarrow \tilde{a}_1 \geq \tilde{b} \text{ dan } \tilde{a}_2 \geq \tilde{b} \\ [min\{\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_2^-\}, min\{\tilde{a}_1^+, \tilde{a}_2^+\}] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] \\ min\{\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_2^-\} &\geq \tilde{b}^- \begin{cases} \tilde{a}_1^- \geq \tilde{b}^- \\ \tilde{a}_2^- \geq \tilde{b}^- \end{cases} \\ \tilde{a}_1 = [\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_1^+] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] = \tilde{b} \\ min\{\tilde{a}_1^+, \tilde{a}_2^+\} &\geq \tilde{b}^+ \begin{cases} \tilde{a}_1^+ \geq \tilde{b}^+ \\ \tilde{a}_2^+ \geq \tilde{b}^+ \end{cases} \\ \tilde{a}_2 = [\tilde{a}_2^-, \tilde{a}_2^+] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] = \tilde{b} \end{aligned}$$

Pada K_v merupakan ideal komutatif dari K untuk $v \in K$. Mari $a, b, c \in K$ sedemikian hingga bahwa $rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v)$ dan $\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v)$. Maka, $(a * b) * c \in K_v$ dan $c \in K_v$ dengan implikasi dari persamaan (2.17) bahwa $(b \wedge a) \in K_v$. Oleh karena itu $h(a * (b \wedge a)) \geq h(v)$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(v)$.

Bukti. Mari $(KC_{(h, \zeta)})$ merupakan sebuah struktur himpunan kubik persilangan pada K yang memenuhi Persamaan (3.1) dan (3.11) Misalkan $v, a, b, c \in K$ sehingga $(a * b) * c \in K_v$ dan $c \in K_v$. Maka, $h((a * b) * c) \geq h(v)$, $\zeta((a * b) * c) \leq \zeta(v)$, $h(v) \geq h(c)$ dan $\zeta(c) \leq \zeta(v)$ mengimplikasi bahwa $rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v)$ dan $max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v)$. Menggabungkan ini dengan persamaan (27) menghasilkan $h(a * (b \wedge a)) \geq h(v)$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(v)$. Oleh karena itu, $a * (b \wedge a) \in K_v$ Kondisi Persamaan (3.1) mengiduksi $0 \in K_v$. Oleh karena itu K_v merupakan komutatif ideal di K

Mari $(K, C_{(h, \zeta)})$ merupakan struktur himpunan kubik persilangan pada K . Kita mendefinisikan himpunan level $(K, C_{(h, \zeta)})$ di tulis sebagai $\mathcal{L}(K, C_{(h, \zeta)})$, mengajak $\mathcal{L}(K, C_{(h, \zeta)}, \tilde{\beta}, t) = \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta}, t) \cap \mathcal{L}(K, \zeta, t)$ (4.1) Observasi (3.11)

Untuk semua $a, b, c \in K$

$$\begin{aligned} rmin(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) \geq \tilde{b} &\Leftrightarrow \tilde{a}_1 \geq \tilde{b} \text{ dan } \tilde{a}_2 \geq \tilde{b} \\ [min\{\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_2^-\}, min\{\tilde{a}_1^+, \tilde{a}_2^+\}] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] \\ min\{\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_2^-\} &\geq \tilde{b}^- \begin{cases} \tilde{a}_1^- \geq \tilde{b}^- \\ \tilde{a}_2^- \geq \tilde{b}^- \end{cases} \\ \tilde{a}_1 = [\tilde{a}_1^-, \tilde{a}_1^+] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] = \tilde{b} \\ min\{\tilde{a}_1^+, \tilde{a}_2^+\} &\geq \tilde{b}^+ \begin{cases} \tilde{a}_1^+ \geq \tilde{b}^+ \\ \tilde{a}_2^+ \geq \tilde{b}^+ \end{cases} \\ \tilde{a}_2 = [\tilde{a}_2^-, \tilde{a}_2^+] &\geq [\tilde{b}^-, \tilde{b}^+] = \tilde{b} \end{aligned}$$

Pada K_v merupakan ideal komutatif dari K untuk $v \in K$. Mari $a, b, c \in K$ sedemikian hingga bahwa $rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v)$ dan $\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v)$. Maka, $(a * b) * c \in K_v$ dan $c \in K_v$ dengan implikasi dari persamaan (2.17) bahwa $(b \wedge a) \in K_v$. Oleh karena itu $h(a * (b \wedge a)) \geq h(v)$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(v)$

Bukti. Mari $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan sebuah struktur himpunan kubik persilangan pada K yang memenuhi Persamaan (3.1) dan (3.11)

Misalkan $v, a, b, c \in K$ sehingga $(a * b) * c \in K_v$ dan $c \in K_v$. Maka, $h((a * b) * c) \geq h(v)$, $\zeta((a * b) * c) \leq \zeta(v)$, $h(v) \geq h(c)$ dan $\zeta(c) \leq \zeta(v)$ mengimplikasi bahwa $rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq h(v)$ dan $max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq \zeta(v)$. Menggabungkan ini dengan persamaan (3.11) menghasilkan $h(a * (b \wedge a)) \geq h(v)$ dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq \zeta(v)$. Oleh karena itu, $a * (b \wedge a) \in K_v$ Kondisi Persamaan (3.1) mengiduksi $0 \in K_v$. Oleh karena itu K_v merupakan komutatif ideal di K .

Mari $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan struktur himpunan kubik persilangan pada K . Dapat mendefinisikan himpunan level $(K, C_{(h,\zeta)})$ di tulis sebagai

$\mathcal{L}(K, C_{(h,\zeta)})$, mengajak

$$\mathcal{L}(K, C_{(h,\zeta)}, \tilde{\beta}, t) = \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta}) \cap \mathcal{L}(K, \zeta, t) \quad (4.2)$$

Dimana $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta}) = \{x \in K | h(x) \geq \tilde{\beta}\}$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, t) = \{x \in K | \zeta(x) \leq t\}$ untuk $\tilde{\beta} := [\tilde{\beta}^-, \tilde{\beta}^+] \in [[0,1]]$ dan $t \in [-1,0]$. Dapat dikatakan $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, t)$ merupakan hitungan h -level dan hitungan ζ -level dari $(K, C_{(h,\zeta)})$ dengan indeks level $\tilde{\beta}$ dan t , masing-masing

Teorema 3.16. Jika $(K, C_{(h,\zeta)})$ merupakan ideal cCC dari K , maka himpunan h -level nya yang tidak kosong dan himpunan ζ -level merupakan ideal komutatif dari K untuk semua indeks level.

Bukti. Misalkan $\tilde{\beta}$ dan t merupakan indeks level dari $(K, C_{(h,\zeta)})$ sedemikian hingga $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, t)$ bersifat tidak kosong. Maka terdapat $x \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$, dan sehingga $h(0) \geq h(x) \geq \tilde{\beta}$ dan $\zeta(0) \leq \zeta(x)$. Jadi, $0 \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$. Misalkan $x, y, z \in K$ maka dapat $(a * b) * c \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $z \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ sedemikian hingga $h((a * b) * c) \geq \tilde{\beta}$, $h(c) \geq \tilde{\beta}$, $\zeta((a * b) * c) \leq$

t , $\zeta(c) \leq t$ Dari Persamaan (3.2) dapat disimpulkan bahwa

$$h(a * (b \wedge a)) \geq rmin\{h((a * b) * c), h(c)\} \geq \tilde{\beta}$$

dan $\zeta(a * (b \wedge a)) \leq max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\} \leq t$. Oleh karena itu, $a * (b \wedge a) \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta}) \cap \mathcal{L}(K, \zeta, t)$. Oleh karena itu, $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, t)$ adalah ideal komutatif dari K .

Akibat 3.17. Jika $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah suatu ideal CC dari K , maka himpunan tak kosong $\mathcal{L}(K, C_{(h,\zeta)}, \tilde{\beta}, t)$ adalah suatu ideal komutatif dari K untuk semua $\tilde{\beta} := [\tilde{\beta}^-, \tilde{\beta}^+] \in [[0,1]]$ dan $t \in [-1,0]$.

Teorema 3.18. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah sebuah struktur himpunan kubik persilangan pada K dimana himpunan level h -nya yang tidak kosong dan himpunan level dan himpunan level- ζ yang tidak kosong adalah ideal komutatif dari K untuk semua indeks level. Kemudian, $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah sebuah ideal cCC dari K .

Bukti. Asumsikan bahwa $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, t)$ adalah ideal komutatif tak kosong dari K untuk semua $\tilde{\beta} := [\tilde{\beta}^-, \tilde{\beta}^+] \in [[0,1]]$ dan $t \in [-1,0]$. Misalkan $(K, C_{(h,\zeta)})$ bukan merupakan ideal cCC dari K . Maka Maka paling tidak satu dari Persamaan (3.1) dan (3.2) tidak valid. Misalkan Persamaan (3.2) tidak valid. Maka, ada $a, b, c \in K$ sedemikian hingga $h(a * (b \wedge a)) \not\geq rmin\{h((a * b) * c), h(c)\}$ atau $\zeta(a * (b \wedge a)) \not\leq max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\}$. Jika kita ambil $\tilde{\beta} := [\tilde{\beta}^-, \tilde{\beta}^+] = rmin\{h((a * b) * c), h(c)\}$, maka $(a * b) * c \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ dan $c \in \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$ tetapi $a * (b \wedge a) \notin \mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta})$. Sebagai tambahan, jika kita mengambil $t = max\{\zeta((a * b) * c), \zeta(c)\}$, maka $(a * b) * c \in \mathcal{L}(K, \zeta, t)$ dan $z \in \mathcal{L}(K, \zeta, t)$, tetapi $x \div (y \wedge x) \notin \mathcal{L}(K, \zeta, t)$. Ini adalah sebuah kontradiksi, sehingga Persamaan (3.2) adalah valid. Dengan cara yang sama, jika Persamaan (3.1) tidak ditetapkan, maka

akan terjadi kontradiksi. Oleh karena itu, $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah sebuah ideal-CC dari K.

Teorema 3.19 Diberikan sebuah subset L dari K , didefinisikan sebuah struktur himpunan kubik persilangan $(K, C_{(h,\zeta)})$ pada K sebagai berikut

$$h: K \rightarrow [[0,1]], x \mapsto \begin{cases} \tilde{\beta} := [\beta^-, \beta^+] & \text{jika } x \in L, \\ \tilde{0}: [0,0] & \text{jika tidak} \end{cases}$$

$$\zeta: K \rightarrow [-1,0], x \mapsto \begin{cases} t & \text{jika } x \in L, \\ 0 & \text{jika tidak} \end{cases}$$

$$\beta^-, \beta^+ \in (0, 1] \text{ dengan } \beta^- < \beta^+ \text{ dan } t \in [-1, 0)$$

dan $\beta^-, \beta^+ \in (0, 1]$ dengan $\beta^- < \beta^+$ dan $t \in [-1, 0)$ Maka L adalah ideal komutatif dari K jika dan hanya jika $(K, C_{(h,\zeta)})$ adalah ideal cCC dari K.

Definisi $(K, C_{(h,\zeta)})$ menurunkan $\mathcal{L}(K, h, \tilde{\beta}) = \mathcal{L}(K, h, \tilde{0}) = K, \mathcal{L}(K, \zeta, t) = \mathcal{L}$ dan $\mathcal{L}(K, \zeta, 0) = K$. Oleh karena itu, hasil yang diinginkan dapat diperoleh dengan Teorema 3.16 dan 3.18. Perhatikan bahwa sebuah ideal-CC mungkin bukan sebuah ideal-CC (lihat Contoh 4), tetapi kita dapat mempertimbangkan sifat perluasan untuk sebuah ideal-CC sifat perluasan untuk sebuah ideal-CC.

PENUTUP

SIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan penelitian dapat disimpulkan bahwa:

1. Dari konsep struktur himpunan kubik persilangan menyatakan CCS(K) sebagai himpunan semua struktur himpunan kubik persilangan pada himpunan K (untuk semua $x \in K$). Maka $K, C(h, \zeta) \oplus K, C(\xi, \eta) = K, C(\xi, \eta) \oplus K, C(h, \zeta)$ dan dengan demikian CCS(K) adalah semigrup komutatif.
2. Struktur himpunan kubik persilangan pada ideal komulatif dalam BCK-aljabar disebut ideal kubik persilangan komutatif (secara singkat, cCC-ideal) dari K jika memenuhi $(\forall x \in K)(h(0) \geq h(x), \zeta(0) \leq \zeta(x))$ (3.2)

$$(\forall a, b, c \in K) \left(\begin{matrix} h(a * (b \wedge a)) \geq \min\{h((a * b) * c)h(b)\} \\ \zeta(a * (b \wedge a)) \leq \max\{\zeta((a * b) * c)\zeta(b)\} \end{matrix} \right) \quad (3.3)$$

sehingga mudah diverifikasi bahwa $K, C(h, \zeta)$ merupakan CCideal di K.

3. Hubungan antara ideal kubik persilangan dan ideal kubik persilangan komutatif adalah Setiap cCC-ideal merupakan CC-ideal (untuk semua $a, c \in K$). Oleh karena itu, $K, C(h, \zeta)$ merupakan CC-ideal dari K.
4. Jika sebuah aljabar BCK - K memenuhi salah satu dari 3 kondisi persamaan (3.6)-(3.8), maka K merupakan sebuah cBCKAljabar. Oleh karena itu, setiap CC-ideal adalah cCC-ideal menurut Teorema 3.12.
5. Himpunan level kubik persilangan mempresentasikan tingkat struktur pada ideal kubik persilangan komutatif.

SARAN

Dari hasil yang diuraikan dari penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi untuk penelitian selanjutnya. Peneliti juga berharap agar penelitian ini dapat dikembangkan secara lebih lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

- Alifviansyah K., & Lukito, A. (2022). BCK-ALJABAR KUADRUPEL NEUTROSOFIK. *MATHunesa Jurnal*, XX, 1-13.
- Huang, Y. (2006). *BCI-Algebra*. Science Press: Beijing, China.
- Jun Y. B., & Song, S. Z. (2021). Journal of Algebraic Hyperstructures Crossing cubic ideals of BCK / BCI-algebras. *Journal of Algebraic Hyperstructures and Logical Algebras*, 1(2), 17-31.
- Jun Y.B., H. K. L. J. G., & Kim, J. (2021). Crossing Cubic Structures as an Extension of Bipolar Fuzzy Sets. *Annals of Fuzzy Mathematics and Information*, 1(22), 1-15.
- Kirana D. G., & Lukito, A. (2022). BCK-ALJABAR KUADRUPEL NEUTROSOFIK. *MATHunesa Jurnal*, 10(1), 21-32.
- Ozturk M. A., Y. D., & Jun, Y. B. (2022). Semigroup Structures and Commutative Ideals of BCK-Algebras Based on Crossing Cubic Set Structures. *Axioms*, 11(1), 1-16.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, 338-353.