

KAJIAN TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG B -METRIK YANG DIPERPANJANG

Ahmad Khairul Umam

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Billfath, Lamongan, Indonesia

E-mail: ahmad.khairul.umam@gmail.com*

Aris Alfian¹⁾, Ahmad Isro'il²⁾, Zaqiyatus Shahadah³⁾, dan Amanda Fatma Muamalah⁴⁾

^{1), 2), 3), 4)} Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Billfath, Lamongan, Indonesia

E-mail: arisalfan@gmail.com¹⁾, ahmad.isroil@gmail.com²⁾, qisha3990@gmail.com³⁾, amandafatma2233@gmail.com⁴⁾

Abstrak

Penelitian ini memberikan penjelesan yang lebih banyak tentang bukti suatu teorema berkaitan dengan eksistensi dan tunggalnya suatu titik yang dinamakan titik tetap dalam suatu ruang b -metrik yang diperpanjang. Selain itu juga disajikan contoh tentang ruang b -metrik yang diperpanjang.

Kata Kunci: b -Metrik yang Diperpanjang, Titik Tetap.

Abstract

This research gives more explanation in proof of theorem. The theorem is about existence and uniqueness a point is called fixed point in an extended b -metric space. Beside that, also we give example about extended b -metric space.

Keywords: Extended b -Metrik, Fixed Point.

PENDAHULUAN

Ruang metrik merupakan salah satu topik di mata kuliah analisis real atau analisis fungsional. Banyak peneliti mengembangkan ruang metrik kerucut (*cone*), ruang metrik parsial, ruang b -metrik, dan lain-lain. Aksioma ketaksamaan segitiga ruang b -metrik berbeda dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik. Salah satu perluasan ruang metrik yaitu ruang b -metrik.

Beberapa peneliti, seperti (Mishra, 2014) membuktikan perluasan teorema titik tetap Hardy dan Reich di ruang b -metrik. (Agrawal, 2016) membuktikan ketunggalan dari suatu titik yaitu titik tetap dalam ruang b -metrik dengan tipe kontraktif yang berbeda. (Kamran, 2017) menjelaskan konsep ruang b -metrik yang diperpanjang. Pada penelitian ini memberikan penjelasan yang lebih banyak untuk pembuktian di teorema 2 pada (Kamran, 2017), serta memberikan contoh yang berbeda.

KAJIAN TEORI

Teorema 1 (Thomson, 2001) Jika suku-suku dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ semuanya positif dan rasio memenuhi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$$

maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.

Definisi 1 (Agrawal, 2016) Diberikan himpunan tidak kosong X dan $s \geq 1$ adalah bilangan real. Suatu fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dikatakan b -metrik jika untuk semua $x, y, z \in X$ terpenuhi sifat-sifat:

B1. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

B2. $d(x, y) = d(y, x)$.

B3. $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Ruang b -metrik adalah pasangan (X, d) .

Definisi 2 (Kamran, 2017) Suatu himpunan tidak kosong X dan $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$. Suatu fungsi $d_{\theta}: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dikatakan b -metrik yang diperpanjang jika untuk setiap $x, y, z \in X$ terpenuhi sifat-sifat:

E1. $d_{\theta}(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

E2. $d_{\theta}(x, y) = d_{\theta}(y, x)$.

E3. $d_{\theta}(x, z) \leq \theta[d_{\theta}(x, y) + d_{\theta}(y, z)]$.

Ruang b -metrik yang diperpanjang adalah pasangan (X, d_{θ}) .

METODE

Desain Penelitian

Penelitian ini termasuk penelitian dasar. Penelitian dasar adalah suatu penelitian untuk

menemukan suatu generalisasi teori atau prinsip tertentu untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Metode studi pustaka merupakan suatu metode penelitian yang mengumpulkan informasi secara mendalam melalui berbagai literatur, buku, artikel/jurnal, referensi lainnya, serta hasil penelitian sebelumnya yang relevan, untuk mendapatkan jawaban dan landasan teori mengenai masalah yang akan diteliti.

Tahapan Penelitian

Tahapan penelitiannya adalah:

1. Pencarian jurnal utama penelitian.
2. Pencarian beberapa pustaka yang relevan dengan penelitian.
3. Pembahasan tentang penelitian-penelitian sebelumnya yang berhubungan dengan penelitian ini.
4. Pembuktian teorema-teorema penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Contoh Diberikan suatu himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan fungsi $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ juga $d_\theta: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dimana $\theta(x, y) = \frac{x+y}{2}$, $d_\theta(1,1) = d_\theta(2,2) = d_\theta(3,3) = 0$ dan $d_\theta(1,2) = d_\theta(2,1) = 5$, $d_\theta(1,3) = d_\theta(3,1) = 10$, $d_\theta(2,3) = d_\theta(3,2) = 20$, maka (X, d_θ) merupakan ruang b -metrik yang diperpanjang.

Bukti

E1. $(\Rightarrow) d_\theta(x, y) = 0 = d_\theta(1,1) = d_\theta(2,2) = d_\theta(3,3)$, terlihat $x = y$.

$(\Leftarrow)$ Untuk $x = y = 1$, maka $d_\theta(x, y) = d_\theta(1,1) = 0$.

Untuk $x = y = 2$, maka $d_\theta(x, y) = d_\theta(2,2) = 0$.

Untuk $x = y = 3$, maka $d_\theta(x, y) = d_\theta(3,3) = 0$.

E2. Untuk $x = 1$ dan $y = 2$, maka

$$d_\theta(x, y) = d_\theta(1,2) = 5 = d_\theta(2,1) = d_\theta(y, x).$$

Untuk $x = 1$ dan $y = 3$, maka

$$d_\theta(x, y) = d_\theta(1,3) = 10 = d_\theta(3,1) = d_\theta(y, x).$$

Untuk $x = 2$ dan $y = 3$, maka

$$d_\theta(x, y) = d_\theta(2,3) = 20 = d_\theta(3,2) = d_\theta(y, x).$$

E3. Untuk $x = 1$, $y = 2$ dan $z = 3$ maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(1,3) = 10 < 37,5 = \frac{75}{2} = \frac{3(25)}{2} \\ &= \frac{3}{2} [5 + 20] = \frac{1+2}{2} [d_\theta(1,2) + d_\theta(2,3)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(1,2) + d_\theta(2,3)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Untuk $x = 1$, $y = 3$ dan $z = 2$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(1,2) = 5 < 60 = \frac{120}{2} = \frac{4(30)}{2} \\ &= \frac{4}{2} [10 + 20] = \frac{1+3}{2} [d_\theta(1,3) + d_\theta(3,2)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(1,3) + d_\theta(3,2)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Untuk $x = 2$, $y = 1$ dan $z = 3$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(2,3) = 20 < 22,5 = \frac{45}{2} = \frac{3(15)}{2} \\ &= \frac{3}{2} [5 + 10] = \frac{2+1}{2} [d_\theta(2,1) + d_\theta(1,3)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(2,1) + d_\theta(1,3)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Untuk $x = 2$, $y = 3$ dan $z = 1$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(2,1) = 5 < 75 = \frac{150}{2} = \frac{5(30)}{2} \\ &= \frac{5}{2} [20 + 10] = \frac{2+3}{2} [d_\theta(2,3) + d_\theta(3,1)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(2,3) + d_\theta(3,1)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Untuk $x = 3$, $y = 1$ dan $z = 2$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(3,2) = 20 < 30 = \frac{60}{2} = \frac{4(15)}{2} \\ &= \frac{4}{2} [10 + 5] = \frac{3+1}{2} [d_\theta(3,1) + d_\theta(1,2)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(3,1) + d_\theta(1,2)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Untuk $x = 3$, $y = 2$ dan $z = 1$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x, z) &= d_\theta(3,1) = 10 < 62,5 = \frac{125}{2} = \frac{5(25)}{2} \\ &= \frac{5}{2} [20 + 5] = \frac{3+2}{2} [d_\theta(3,2) + d_\theta(2,1)] \\ &= \frac{x+y}{2} [d_\theta(3,2) + d_\theta(2,1)] \\ &= \theta[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]. \end{aligned}$$

Teorema 2 Diberikan ruang b -metrik lengkap yang diperpanjang (X, d_θ) dimana d_θ bersifat kontinu. Diberikan juga fungsi $f: X \rightarrow X$ dengan

$$d_\theta(f(x), f(y)) \leq \alpha d_\theta(x, y) \quad (1)$$

untuk semua $x, y \in X$ dimana $\alpha \in [0, 1)$. Selanjutnya untuk setiap $x_0 \in X$ dan $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \theta(x_n, x_m) < \frac{1}{\alpha}$ dimana $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, maka fungsi f mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti

Ambil $x_0 \in X$, selanjutnya bentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan suku-suku sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_0, x_1 &= f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) \\ &= f^2(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f(f(x_{n-2})) = f^2(x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$= \dots = f^n(x_0)$$

Berdasarkan (1), selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy.

$$\begin{aligned} d_\theta(x_n, x_{n+1}) &= d_\theta(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq \alpha d_\theta(x_{n-1}, x_n) \\ &= \alpha d_\theta(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leq \alpha^2 d_\theta(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d_\theta(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (2)$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga dan (2), untuk $m > n$ maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x_n, x_m) &\leq \theta(x_n, x_m)[d_\theta(x_n, x_{n+1}) + d_\theta(x_{n+1}, x_m)] \\ &= \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m) \\ &\quad [d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_\theta(x_{n+2}, x_m)] \\ &= \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)d_\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\leq \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad [d_\theta(x_{n+2}, x_{n+3}) + d_\theta(x_{n+3}, x_m)] \\ &= \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad d_\theta(x_{n+2}, x_{n+3}) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m) \\ &\quad \theta(x_{n+2}, x_m)d_\theta(x_{n+3}, x_m) \\ &\leq \theta(x_n, x_m)d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad d_\theta(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + \theta(x_n, x_m) \\ &\quad \theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\theta(x_{n+3}, x_m) \dots \\ &\quad \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)d_\theta(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \theta(x_n, x_m)\alpha^n d_\theta(x_0, x_1) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\alpha^{n+1}d_\theta(x_0, x_1) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad \alpha^{n+2}d_\theta(x_0, x_1) + \dots + \theta(x_n, x_m) \\ &\quad \theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\theta(x_{n+3}, x_m) \dots \\ &\quad \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)\alpha^{m-1}d_\theta(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Karena $\alpha \in [0, 1)$, maka

$$\begin{aligned} d_\theta(x_n, x_m) &\leq \theta(x_n, x_m)\alpha^n d_\theta(x_0, x_1) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\alpha^{n+1}d_\theta(x_0, x_1) \\ &\quad + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \\ &\quad \alpha^{n+2}d_\theta(x_0, x_1) + \dots + \theta(x_n, x_m) \\ &\quad \theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\theta(x_{n+3}, x_m) \dots \\ &\quad \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)\alpha^{m-1}d_\theta(x_0, x_1) \\ &\leq d_\theta(x_0, x_1)[\theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \\ &\quad \dots \theta(x_{n-1}, x_m)\theta(x_n, x_m)\alpha^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \theta(x_{n-1}, x_m) \\ &\theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\alpha^{n+1} \\ &+ \theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \theta(x_{n-1}, x_m) \\ &\theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\alpha^{n+2} \\ &+ \dots + \theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \\ &\theta(x_{n-1}, x_m)\theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m) \\ &\theta(x_{n+2}, x_m)\theta(x_{n+3}, x_m) \\ &\dots \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)\alpha^{m-1}] \\ &= d_\theta(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m) \right) \alpha^k \\ &= d_\theta(x_0, x_1) \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m) \right) \alpha^k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m) \right) \alpha^k \right] \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \theta(x_n, x_m) < \frac{1}{\alpha}$ atau $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \theta(x_n, x_m)\alpha < 1$ maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\prod_{i=1}^{k+1} \theta(x_i, x_m))\alpha^{k+1}}{(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m))\alpha^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(x_{k+1}, x_m)\alpha < 1$$

untuk semua $m \in \mathbb{N}$. Berdasarkan teorema 1 (uji rasio) maka deret $\sum_{k=1}^{m-1} (\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m))\alpha^k$ dan $\sum_{k=1}^{n-1} (\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m))\alpha^k$ adalah konvergen. Anggap deret $\sum_{k=1}^{m-1} (\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m))\alpha^k$ konvergen ke s_{m-1} dan deret $\sum_{k=1}^{n-1} (\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m))\alpha^k$ konvergen ke s_{n-1} . Karena $m > n$ maka untuk $n \rightarrow \infty$, berakibat

$$\begin{aligned} d_\theta(x_n, x_m) &\leq d_\theta(x_0, x_1) \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m) \right) \alpha^k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^k \theta(x_i, x_m) \right) \alpha^k \right] \\ &= d_\theta(x_0, x_1)[s_{m-1} - s_{n-1}] \\ &= d_\theta(x_0, x_1)[0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

sehingga barisan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena (X, d_θ) adalah ruang b -metrik lengkap yang diperpanjang, maka semua barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang tersebut konvergen, anggap $x_n \rightarrow x$. Selanjutnya, ditunjukkan jika x merupakan suatu titik tetap dari suatu fungsi yaitu fungsi f . Berdasarkan sifat dari ketaksamaan segitiga di definisi 2 serta sifat kontraksi (1), diperoleh:

$$\begin{aligned} d_\theta(x, f(x)) &\leq \theta(x, f(x))[d_\theta(x, x_n) + d_\theta(x_n, f(x))] \\ &\leq \theta(x, f(x))[d_\theta(x, x_n) + \alpha d_\theta(x_{n-1}, x)] \end{aligned}$$

untuk $\alpha \in [0, 1)$. Untuk $n \rightarrow \infty$ didapatkan

$$\begin{aligned} d_\theta(x, f(x)) &\leq \theta(x, f(x))[d_\theta(x, x_n) + \alpha d_\theta(x_{n-1}, x)] \\ &= \theta(x, f(x))[0 + \alpha(0)] \\ &= \theta(x, f(x))[0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $x = f(x)$. Jadi titik x merupakan titik tetap suatu fungsi f .

Misalkan x, y merupakan titik tetap fungsi f sehingga $x = f(x)$ juga $y = f(y)$ oleh karena itu

$$\begin{aligned} d_{\theta}(x, y) &= d_{\theta}(f(x), f(y)) \\ &\leq \alpha d_{\theta}(x, y). \end{aligned}$$

Dikarenakan $\alpha \in [0, 1)$ merupakan bilangan real yang tidak berubah, maka seharusnya $d_{\theta}(x, y) = 0$. Oleh karena itu dari aksioma b -metrik yang diperpanjang diperoleh $y = x$. Akhirnya, terbukti fungsi f mempunyai titik tetap yang tunggal.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Billfath atas dukungan dana yang diberikan.

PENUTUP

SIMPULAN

Ruang b -metrik termasuk perluasan dari ruang metrik biasa. Aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b -metrik berbeda dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik. Aksioma ketaksamaan segitiga ruang b -metrik yang diperpanjang juga berbeda dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b -metrik. Peneliti berhasil memberikan penjelasan yang lebih rinci terkait bukti teorema 2 sehingga teorema dan bukti tersebut bisa dijadikan referensi bagi pembaca.

SARAN

Saran untuk pembaca dapat membuktikan teorema 2 pada artikel ini dengan cara yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Agrawal, S., Qureshi, K., & Nema, J. (2016). A Fixed Point Theorem for b -Metric Space. *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences*, 9(1), 45-50.
- Kamran, T., Samreen, M., & Ain, Q. U. (2017). A Generalization of b -Metric Space and Some Fixed Point Theorems. *Mathematics*, 5(19), 1-7. <https://doi.org/10.3390/math5020019>.
- Mishra, P. K., Sachdeva, S., & Banerjee, S. K. (2014). Some Fixed Point Theorems in b -Metric Space. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(1), 19-22. <https://doi.org/10.12691/tjant-2-1-5>.
- Thomson, B. S., Bruckner, J. B., & Bruckner, A. M. (2001). *Elementary Real Analysis*. In Prentice Hall, Inc.