MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
Volume 12 No 03
Tahun 2024

BILANGAN KROMATIK *GRACEFUL* UNTUK GRAF $(D_{m,2} \times P_n)$

Alwi Ni'mah Firdausy
Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail : alwi@undiksha.ac.id

Putu Kartika Dewi
Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha
*e-mail : kartika.dewi@undiksha.ac.id

I Gusti Putu Sudiarta
Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail : gussudiarta@undiksha

Raphita Yanisari Silalahi
Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail : rsilalahi@undiksha

Abstrak

Pewarnaan *graceful-k*, $k \geq 2$ pada graf G adalah pewarnaan titik $f: V(G) \to \{1, 2, .., k\}$, yang menginduksi pewarnaan sisi $f': E(G) \to \{1, 2, .., k-1\}$ yaitu $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, sedemikian hingga setiap titik dan sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan *graceful* pada graf G disebut dengan bilangan kromatik *graceful* pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_g(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik *graceful* dari graf hasil kali kartesius graf $D_{m,2}$ dengan graf P_n yaitu graf $D_{m,2} \times P_n$ untuk $m, n \geq 3$.
Kata kunci: pewarnaan *graceful*, hasil kali kartesius, bilangan kromatik *graceful*, graf $D_{m,2} \times P_n$.

Abstract

A k-graceful coloring, $k \geq 2$ in graph G is a vertex coloring $f: V(G) \to \{1, 2, .., k\}$, which induces the edge coloring $f': E(G) \to \{1, 2, .., k-1\}$ where $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, such that adjacent vertices and adjacent edges do not have the same color. The minimum number of colors used for graceful coloring on a graph is called the graceful chromatic number on a graph G, denoted by $\chi_g(G)$. This research purpose to determine graceful chromatic number of cartesian product graphs $D_{m,2}$ with graphs P_n aim graphs $D_{m,2} \times P_n$ for $m, n \geq 3$.
Keywords *: coloring graceful , caresian product, graceful chromatic number , graph $D_{m,2} \times P_n$.*

PENDAHULUAN

Pada tahun 1736, permasalahan Jembatan Konigsberg diselesaikan oleh Leonhard Euler dengan menggambar daerah-daerah yang dibatasi oleh Sungai Pregel sebagai simpul dan jembatan sebagai sisi. Hal tersebut yang menjadi dasar lahirnya teori graf (Buhaerah dkk., 2022). Pada masa ini teori graf menjadi alat bantu untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan manusia salah satunya digunakan untuk mencari jalur terpendek.

Dengan memperhatikan kegunaan dari graf, graf merupakan salah satu topik matematika yang penting untuk terus dikembangkan. Salah satu topik teori graf yang terus mengalami perkembangan adalah pewarnaan graf khususnya pewarnaan *graceful*. Pewarnaan *graceful* pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dan Zhang pada tahun 2015. Pewarnaan *graceful* pada graf G adalah pewarnaan titik $f: V(G) \to \{1,2, \dots, k\}$ yang menginduksi pewarnaan sisi $f': E(G) \to \{1,2, \dots, k-1\}$ yaitu $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, sedemikian hingga setiap sisi yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama. Minimum banyaknya warna yang dapat digunakan untuk pewarnaan *graceful* pada graf G disebut bilangan kromatik *graceful* pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_g(G)$ (Dhami, 2017).

Penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful* telah banyak dilakukan, diantaranya penelitian yang dilakukan oleh Bi et al telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf lingkaran dengan n titik C_n yaitu $\chi_g(C_n) = 4$ untuk $n \neq 5$ dan $\chi_g(C_n) = 5$ untuk $n = 5$. Selain itu Bi et al juga telah menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf lintasan dengan n titik P_n yaitu $\chi_g(P_n) = 4$ untuk ≥ 5. Penelitian yang dilakukan oleh Suparta et al menemukan bilangan kromatik *graceful* pada graf prisma $D_{m,2}$ yaitu $\chi_g(D_{m,2}) = 5$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4)$ dan $\chi_g(D_{m,2}) = 6$ untuk lainnya.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Suparta et al, penelitian ini berfokus untuk mengkaji bilangan kromatik *graceful* graf kali kartesius antara graf prisma $D_{m,2}$ dan graf lintasan P_n yaitu graf $D_{m,2} \times P_n$. Penelitian mengenai bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m, n \geq 3$ menjadi menarik untuk dilakukan mengingat $D_{m,2}$ merupakan subgraf bagian dari graf $D_{m,2} \times P_n$ yang dimungkinkan untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ memiliki bilangan kromatik *graceful* yang bilangan kromatik yang berbeda dengan graf $D_{m,2}$ karena derajat dari graf $D_{m,2} \times P_n$ berbeda dengan derajat graf $D_{m,2}$.

KAJIAN TEORI

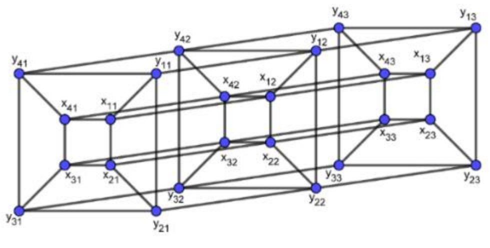
Hasil Kali Kartesius

Hasil kali kartesius dari dua graf yaitu G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1 \times G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan (u_1, u_2) bertetangga dengan (v_1, v_2) jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

(Avgustinovich & Fon-Der-Flaass, 2000)

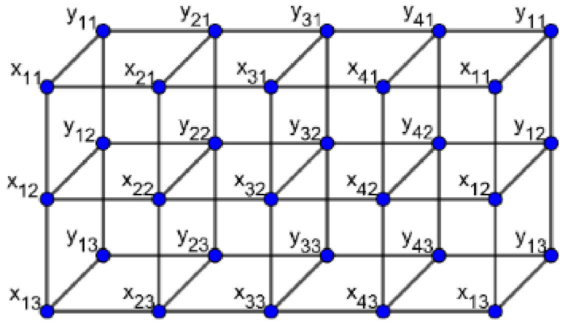
Graf $D_{m,2} \times P_n$

Graf $D_{m,2} \times P_n$ adalah graf hasil kali kartesius dua buah graf yaitu graf $D_{m,2}$ dengan graf P_n. Orde pada graf $D_{m,2} \times P_n$ yaitu $|V(D_{m,2} \times P_n)| = 2mn$ dan size pada graf $D_{m,2} \times P_n$ yaitu $E(D_{m,2} \times P_n) = 3mn$. Pada gambar 2.1 disajikan graf $D_{4,2} \times P_3$.



Gambar 2.1 Graf $D_{4,2} \times P_3$

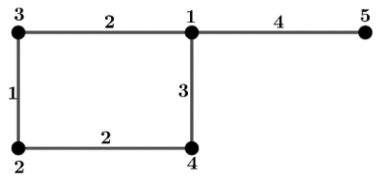
Graf $D_{4,2} \times P_3$ dapat direpresentasikan seperti gambar 2.2.



Gambar 2.2 Representasi Graf $D_{4,2} \times P_n$

Pewarnaan *Graceful*

Pewarnaan $k - graceful$ adalah pewarnaan titik $f: V(G) \to \{1, 2, .., k\}$, dimana $k \geq 2$ yang menginduksi pewarnaan sisi $f': E(G) \to \{1, 2, \dots, k - 1\}$ yaitu $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$, sehingga sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Pada gambar 2.3 disajikan pewarnaan *graceful* pada suatu graf.



Gambar 2.3 Pewarnaan *Graceful*

Minimum banyaknya warna yang dapat digunakan dalam pewarnaan *k – graceful* pada graf G disebut bilangan kromatik *graceful* pada graf G, dinotasikan dengan $\chi_g(G)$.

(Dhami, 2017)

Teorema 2.1

Jika H merupakan sebuah graf bagian dari graf G, maka $\chi_g(H) \leq \chi_g(G)$.

(Dhami, 2017)

Teorema 2.2

Bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_m \times P_n$ adalah $\chi_g(C_m \times P_n) = 7$ untuk $m \equiv 0(mod\ 3)$.

(Suparta et al., 2023)

Teorema 2.3

Bilangan kromatik *graceful* pada graf $C_m \times P_n$ adalah $7 \leq \chi_g(C_m \times P_n) \leq 10$ untuk $m \not\equiv 0(mod\ 3)$.

(Suparta et al., 2023)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam artikel ini, akan dicari bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ untuk $m, n \geq 3$ menggunakan teorema yang sebelumnya telah diteliti dan pewarnaan *graceful.*

Dalam mencari batas bawah bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$, bilangan kromatik *graceful* yang digunakan adalah bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,n}$ karena unsur matriks ketetanggaan dari graf $D_{m,n}$ lebih banyak yang sama dengan unsur matriks ketetanggaan graf $D_{m,2} \times P_n$ daripada dengan unsur matriks ketetanggaan graf $D_{m,2}$.

Lemma 3.1

Bilangan kromatik *graceful* $D_{m,2} \times P_n$ lebih dari atau sama dengan 7.

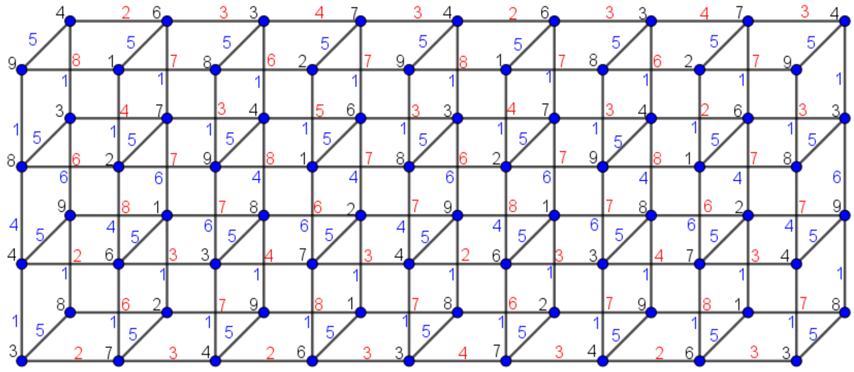
Bukti: Graf $D_{m,n}$ merupakan sebuah graf bagian dari graf $D_{m,2} \times P_n$, yaitu $V(D_{m,n}) \subseteq V(D_{m,2} \times P_n)$ dan $E(D_{m,n}) \subseteq E(D_{m,2} \times P_n)$.Sesuai dengan Teorema 2.1 - 2.3, dapat disimpulkan $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \geq 7$.

Dari Lemma 3.1 diperoleh batas bawah dari $\chi_g(D_{m,2} \times P_n)$. Selanjutnya, dikaji batas atas dari $\chi_g(D_{m,2} \times P_n)$ yang dibagi menjadi empat kasus yaitu $m \equiv 0(mod\ 4)$, $m \equiv 1(mod\ 4)$, $m \equiv 2(mod\ 4)$,dan $m \equiv 3(mod\ 4)$.

Teorema 3.1

Bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4)$ dengan $m, n \geq 3$ adalah $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 9$

Bukti: Dari lemma 3.1 kita ketahui bahwa batas bawah $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \geq 7$. Selanjutnya, akan dicari batas atas menggunakan pewarnaan *graceful.*



Gambar 3.1 Pewarnaan *Graceful* Graf $D_{8,2} \times P_4$

Pewarnaan titik pada gambar 3.1 merupakan pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{8,2} \times P_4$. Diperhatikan bahwa pewarnaan pada gambar 3.1, pewarnaan titik-titik x_{ij} dan y_{ij} berulang secara horisontal setiap 4 titik. Hal tersebut juga berlaku secara vertikal, pewarnaan titik-titik pada $D_{m,2} \times P_n$berulang setiap 4 titik. Pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 0(mod\ 4)$ didefinisikan dengan fungsi $f(x_{ij}) \rightarrow \{1,2,3,..,9\}$ dan $f(y_{ij}) \rightarrow \{1,2,3, \dots ,9\}$, sebagai berikut.

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 9, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 6, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 6, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 4, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 6, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 6, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

Pewarnaan di atas menginduksi pewarnaan sisi sehingga setiap sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Banyak warna yang digunakan pada fungsi f adalah 9. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* dari graf $D_{m,2} \times P_n$ adalah 9. Jadi, $7 \le \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \le 9$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4)$.

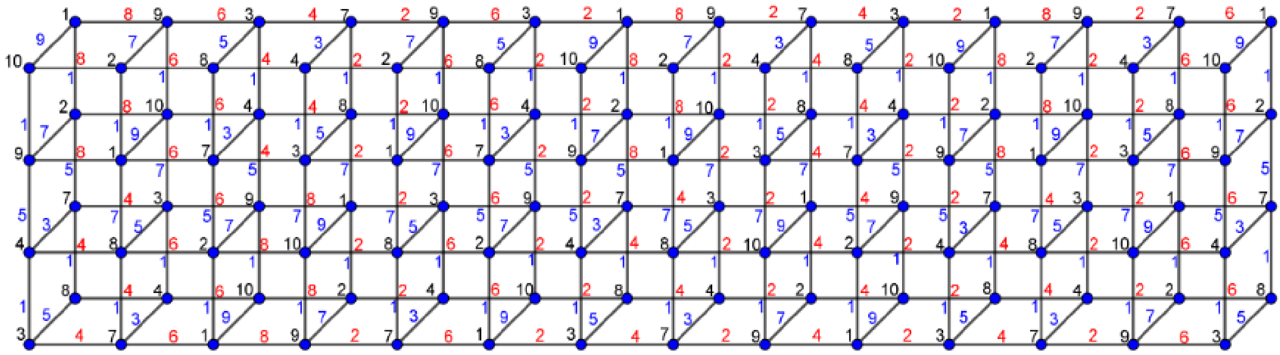
Teorema 3.2

Bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ untuk $m \not\equiv 0(mod\ 4)$ dengan $m, n \ge 3$ adalah $7 \le \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \le 10$.

Bukti: Dari lemma 3.1 kita ketahui bahwa batas bawah $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \ge 7$. Dalam mencari batas atas bulangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ akan dibagi menjadi 3 kasus yaitu $m \equiv 1(mod\ 4), m \equiv 2(mod\ 4)$, dan $m \equiv 3(mod\ 4)$.

Kasus 1. $m \equiv 1(mod\ 4)$

Dari lemma 3.1 didapat batas bawah $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \ge 7$. Selanjutnya, akan dicari batas atas menggunakan pewarnaan *graceful* pada graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 1(mod\ 4)$.



Gambar 3.2 Pewarnaan *Graceful* untuk Graf $D_{13,2} \times P_4$

Pewarnaan titik pada gambar 3.2 merupakan pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{9,2} \times P_4$. Diperhatikan bahwa pewarnaan pada gambar 3.2, pewarnaan titik-titik x_{ij} dan y_{ij} berulang secara horisontal setiap 4 titik dari $i = 6$.Hal tersebut juga berlaku secara vertikal, pewarnaan titik-titik pada $D_{m,2} \times P_n$ berulang setiap 4 titik. Pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 1(mod\ 4)$ didefinisikan dengan fungsi $f(x_{ij}) \to \{1,2,3,..,10\}$ dan $f(y_{ij}) \to \{1,2,3,\dots,10\}$ berikut.

$$
f(x_{ij}) = \begin{cases}
10, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
2, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
8, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
4, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
2, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
8, & i \ge 6\ \ i \equiv 2\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
10, & i \ge 7\ \ i \equiv 3\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
2, & i \ge 8\ \ i \equiv 0\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
4, & i > 9\ \ i \equiv 1\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
9, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
1, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
7, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
3, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
1, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
7, & i \ge 6\ \ i \equiv 2\ (mod\ 4);\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
9, & i \ge 7\ \ i \equiv 3\ (mod\ 4);\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
1, & i \ge 8\ \ i \equiv 0\ (mod\ 4);\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
3, & i \ge 9\ \ i \equiv 1\ (mod\ 4);\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
4, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
8, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
2, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
10, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
8, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
2, & i \ge 6\ \ i \equiv 2\ (mod\ 4);\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
4, & i \ge 7\ \ i \equiv 3\ (mod\ 4);\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
8, & i \ge 8\ \ i \equiv 0\ (mod\ 4);\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
10, & i \ge 9\ \ i \equiv 1\ (mod\ 4);\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \\
3, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
7, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
1, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
9, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
7, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
1, & i \ge 6\ \ i \equiv 2\ (mod\ 4);\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
3, & i \ge 7\ \ i \equiv 3\ (mod\ 4);\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
7, & i \ge 8\ \ i \equiv 0\ (mod\ 4);\ j \equiv 0\ (mod\ 4) \\
9, & i \ge 9\ \ i \equiv 1\ (mod\ 4);\ j \equiv 0\ (mod\ 4)
\end{cases}
$$

$$
f(y_{ij}) = \begin{cases}
1, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
9, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
3, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
7, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
9, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
3, & i \ge 6\ \ i \equiv 2\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
1, & i \ge 7\ \ i \equiv 3\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
9, & i \ge 8\ \ i \equiv 0\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
7, & i \ge 9\ \ i \equiv 1\ (mod\ 4);\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \\
2, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
10, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
4, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \\
2, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 2\ (mod\ 4)
\end{cases}
$$

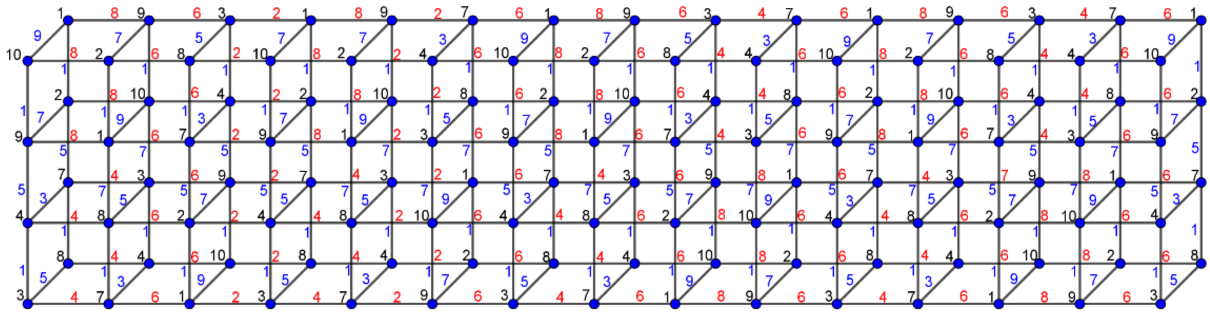
$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 8, & i = 5 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 6 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i = 1 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i = 2 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 9, & i = 3 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & i = 4 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i = 5 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 6 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 8, & i = 1 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i = 2 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 10, & i = 3 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 2, & i = 4 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i = 5 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 10, & i \geq 6 \;\; i \equiv 2 \pmod 4 \;\; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Pewarnaan di atas menginduksi pewarnaan sisi sehingga setiap sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Banyak warna yang digunakan pada fungsi f dan f^* adalah 10. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* dari graf $D_{m,2} \times P_n$ adalah 10. Jadi, $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 10$ untuk $m \equiv 1(mod\ 4)$.

Kasus 2. $m \equiv 2(mod\ 4)$

Dari lemma 3.1 didapat batas bawah $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \geq 7$. Selanjutnya, akan dicari batas atas menggunakan pewarnaan *graceful* pada graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 2(mod\ 4)$.



Gambar 3.3 Pewarnaan *Graceful* Graf $D_{14,2} \times P_4$

Pewarnaan titik pada gambar 3.3 merupakan pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{14,2} \times P_4$. Diperhatikan bahwa pewarnaan pada gambar 3.3, pewarnaan titik-titik x_{ij} dan y_{ij} berulang secara horisontal setiap 4 titik dari $i = 7$. Hal tersebut juga berlaku secara vertikal, pewarnaan titik-titik pada $D_{m,2} \times P_n$ berulang setiap 4 titik. Pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 2(mod\ 4)$ didefinisikan dengan fungsi $f(x_{ij}) \to \{1,2,3,..,10\}$ dan $f(y_{ij}) \to \{1,2,3,\ldots,10\}$ sebagai berikut.

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 10, & i = 1 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i = 2 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 8, & i = 3 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 10, & i = 4 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i = 5 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 4, & i = 6 \quad ; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 10 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & i = 1 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 1, & i = 2 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i = 3 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 9, & i = 4 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 1, & i = 5 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 3, & i = 6 \quad ; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 10 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 2 \pmod 4 \\ 4, & i = 1 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 8, & i = 2 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 2, & i = 3 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 4, & i = 4 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 8, & i = 5 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 10, & i = 6 \quad ; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 10 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i = 1 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 7, & i = 2 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 1, & i = 3 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 3, & i = 4 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 7, & i = 5 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 9, & i = 6 \quad ; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 7 \;\; i \equiv 3 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 8 \;\; i \equiv 0 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 9 \;\; i \equiv 1 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 10 \;\; i \equiv 2 \pmod 4; \; j \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

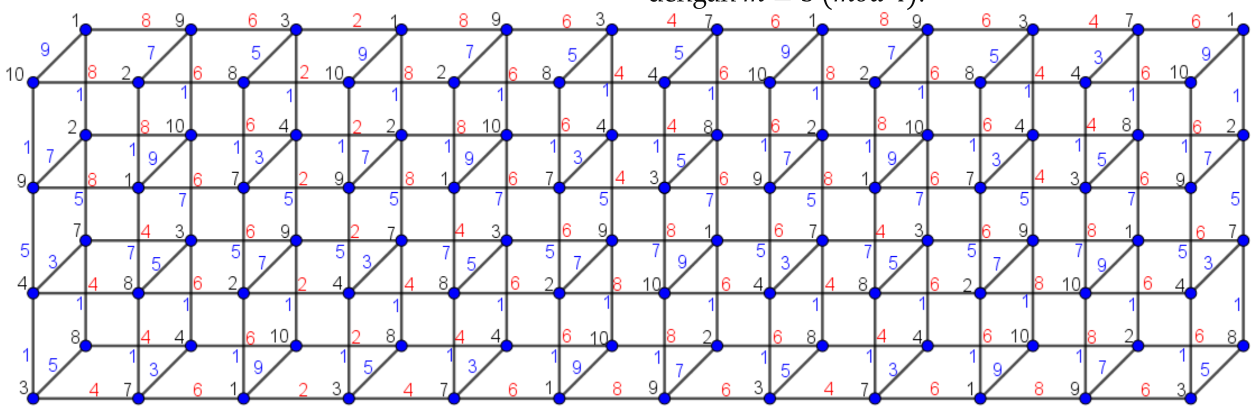
$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 3, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 1, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 7, & i = 6 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 8 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 9 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 10 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 10, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 4, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 2, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 10, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 8, & i = 6 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 8 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 9 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 10 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 9, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 7, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & i = 6 \quad ;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 8 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 4, & i \geq 9 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 8 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 9 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 10 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 3 \pmod 4 \\ 8, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 10, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 8, & i = 4 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i = 5 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 2, & i = 6 \quad ;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 8 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 9 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 0 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 10 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

Pewarnaan di atas menginduksi pewarnaan sisi sehingga setiap sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Banyak warna yang digunakan pada fungsi f adalah 10. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* dari graf $D_{m,2} \times P_n$ adalah 10. Jadi, $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 10$ untuk $m \equiv 2 \pmod 4$.

Kasus 3. $m \equiv 3 \pmod 4$

Dari lemma 3.1 didapat batas bawah $\chi_g(D_{m,2} \times P_n) \geq 7$. Selanjutnya, akan dicari batas atas dari bilangan kromatik *graceful* pada graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 3 \pmod 4$.



Gambar 3.4 Pewarnaan *Graceful* Graf $D_{11,2} \times P_4$

Pewarnaan titik pada gambar 3.4 merupakan pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{11,2} \times P_4$. Diperhatikan bahwa pewarnaan pada gambar 3.4, pewarnaan titik-titik x_{ij} dan y_{ij} berulang secara horisontal setiap 4 titik dari $i = 4$.Hal tersebut juga berlaku secara vertikal, pewarnaan titik-titik pada $D_{m,2} \times P_n$ berulang setiap 4 titik. Pewarnaan *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m \equiv 3 \pmod 4$ didefinisikan dengan fungsi $f(x_{ij}) \to \{1,2,3,..,10\}$ dan $f(y_{ij}) \to \{1,2,3,\ldots,10\}$ sebagai berikut.

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 10, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 8, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 10, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 2, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 8, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 4, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 1 \pmod 4 \\ 9, & i = 1 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 1, & i = 2 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i = 3 \quad ;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 9, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 1, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 7, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \\ 3, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \pmod 4;\ j \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} 4, & i = 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 8, & i = 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 2, & i = 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 10, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 3, & i = 1 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 7, & i = 2 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 1, & i = 3 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$f(y_{ij}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \ ;\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 9, & i = 2 \ ;\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 3, & i = 3 \ ;\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ 2, & i = 1 \ ;\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 10, & i = 2 \ ;\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 4, & i = 3 \ ;\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 10, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 2 \ (mod\ 4) \\ 7, & i = 1 \ ;\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 3, & i = 2 \ ;\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 9, & i = 3 \ ;\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 7, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 3, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 9, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 1, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 3 \ (mod\ 4) \\ 8, & i = 1 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 4, & i = 2 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 10, & i = 3 \ ;\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 8, & i \geq 4 \ \ i \equiv 0 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 4, & i \geq 5 \ \ i \equiv 1 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 10, & i \geq 6 \ \ i \equiv 2 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \\ 2, & i \geq 7 \ \ i \equiv 3 \ (mod\ 4);\ j \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

Pewarnaan di atas menginduksi pewarnaan sisi sehingga setiap sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Banyak warna yang digunakan pada fungsi f adalah 10. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas atas dari bilangan kromatik *graceful* dari graf $D_{m,2} \times P_n$ adalah 10. Jadi, $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 10$ untuk $m \equiv 3(mod\ 4)$.

PENUTUP

SIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan, dapat simpulkan bahwa bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$ dengan $m, n \geq 3$ adalah $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 9$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4)$, dan $7 \leq \chi_g(D_{m,2} \times P_n) \leq 10$ untuk $m \not\equiv 0(mod\ 4)$.

SARAN

Saran kepada pembacara yaitu untuk dapat menemukan nilai eksak dari bilangan kromatik *graceful* untuk graf $D_{m,2} \times P_n$.

DAFTAR PUSTAKA

Avgustinovich, S., & Fon-Der-Flaass, D. (2000). Cartesian products of graphs and metric spaces. *European Journal of Combinatorics*, *21*(7), 847–851. https://doi.org/10.1006/eujc.2000.0401

Bi, Z. and P. Zhang., Byers, A., English, S., Laforge, E., & Zhang, P. (2017). Graceful colorings of graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, *101*, 101–119.

Buhaerah, Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). *Teori graf dan aplikasinya*. Living Spiritual Quotient.

Dhami, K. K. (2017). *An evaluation on the gracefulness and colouring of graphs*. University of York.

Suparta, I. N., Venkatachalam, M., Gunadi, I. G. A., & Pratama, P. A. C. (2023). Graceful chromatic number of some cartesian product graphs. *Ural Mathematical Journal*, *9*(2), 193. https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.016