

BIFURKASI HOPF PADA MODEL DINAMIK S-I-P DENGAN PENYAKIT PADA POPULASI PREY DAN FUNGSI RESPON HOLLING TYPE II DENGAN PEMANENAN PADA PREY

Gesti Essa Waldhani*

Jurusan Teknologi Informasi, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Bina Sarana Informatika, Jakarta, Indonesia,
gesti.gew@bsi.ac.id

Chalimatusadiah

Jurusan Teknologi Informasi, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Bina Sarana Informatika, Jakarta, Indonesia,
Berikan tanda bintang untuk email corresponding author

Abstrak

Pada penelitian ini, model dinamik S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling type II dengan pemanenan dan waktu tunda dibahas. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik tetap, kemudian menganalisis kestabilan titik tetap dan membahas keberadaan bifurkasi Hopf. Modifikasi lain yang diberikan pada model adalah penggunaan waktu tunda. Waktu tunda merupakan waktu yang dibutuhkan bagi predator untuk memburu mangsanya. Kasus pertama adalah model tanpa waktu tunda, diperoleh 2 titik tetap tidak stabil dan 2 titik tetap stabil. Salah satunya adalah titik tetap interior dengan uji kestabilan Routh-Hurwitz. Kasus kedua adalah model dengan waktu tunda diperoleh nilai kritis tundaan. Bifurkasi Hopf terjadi ketika nilai waktu tunda sama dengan nilai tundaan kritis dan juga memenuhi kondisi transversalitas. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Saat bifurkasi Hopf terjadi, grafik pada bidang solusi memperlihatkan pergerakan osilasi yang konstan. Apabila nilai waktu tunda yang diberikan kurang dari nilai kritis tundaan, solusi sistem terkontrol menuju kondisi yang seimbang. Kemudian ketika nilai waktu tunda lebih besar dari nilai kritis tundaan, solusi sistem terus berfluktuasi sehingga menyebabkan kondisi sistem yang tidak stabil.

Kata Kunci: Bifurkasi Hopf; Model S-I-P; Holling tipe II; Penyakit, Pemanenan.

Abstract

In this paper, a dynamic S-I-P model with disease in the prey population and Holling type II functional response with harvesting in prey and time-delay were discussed. Model analysis is carried out by determining fixed points, then analyzing the stability of the fixed points and discussing the existence of the Hopf bifurcation. Another modification given to the model is the use of time delays. Delay time is the time needed for a predator to hunt its prey. The first case is a model without time delay, it is obtained that 2 fixed points are unstable and 2 fixed points are stable. One of them is the interior fixed point tested with the Routh-Hurwitz criteria. The second case is a model with a delay time, the critical delay value is obtained. Hopf bifurcation occurs when the delay time value is equal to the critical delay value and also fulfills the transversality condition. Observations on the model simulation are carried out by varying the value of the delay time. When the Hopf bifurcation occurs, the graph on the solution plane shows a constant oscillatory movement. If the value of the delay time given is less than the critical value of the delay, the controlled system solution goes to a balanced state. Then when the delay time value is greater than the critical delay value, the system solution continues to fluctuate causing an unstable system condition.

Keywords: Hopf bifurcation; S-I-P model; Holling type II; Disease; Harvesting.

PENDAHULUAN

Salah satu contoh sistem yang merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik adalah sistem predator-prey, dimana prey sebagai populasi yang dimangsa dan predator sebagai populasi yang memangsa (Du et al., 2007). Sistem predator-prey (pemangsa-mangsa) adalah salah satu jenis sistem

yang merupakan gabungan atau interaksi dari dua populasi (kelompok individu) yaitu predator (pemangsa) dan prey (mangsa). Interaksi antar dua populasi ini sangat penting karena kelangsungan hidup makhluk hidup tergantung pada keseimbangan lingkungan disekitarnya.

Rantai makanan merupakan penentu keseimbangan ekosistem, sehingga perlu dikaji mendalam. Kajian mengenai rantai makanan salah satunya yaitu pemodelan matematika predator-prey yang dikembangkan dalam cabang ilmu matematika ekologi.

Permasalahan lainnya yang terjadi dalam suatu populasi adalah epidemi. Lee menjelaskan mengenai peristiwa epidemi dalam suatu populasi adalah "When a disease occurs at a frequency higher than is expected, it is said to be epidemic. A localized epidemic may be referred to as an outbreak". Oleh karena itu dalam pemodelan matematika di kaji berbagai macam model matematis untuk mengetahui terjadi atau tidaknya suatu epidemi dalam populasi. Model epidemi klasik membagi populasi menjadi dua kelas, yaitu kelas rentan (susceptible) dan terinfeksi (infected). Sub-populasi rentan, rentan terhadap infeksi dan sub-populasi yang terinfeksi dapat memindahkan infeksi ke individu rentan. Dalam model S-I ukuran populasi adalah $N = S + I$, di mana S adalah sub-populasi rentan dan I sub-populasi terinfeksi (Urena&Gonzalez,2021).

Model matematika predator-prey yang banyak dipakai adalah model yang terdiri atas dua spesies berbeda di mana salah satu dari keduanya menyediakan makanan untuk yang lainnya. Model predator-prey pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra (Yiannis, 2009). Model matematika Lotka-Volterra dua spesies predator-prey dapat di tulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x - \alpha xy,\end{aligned}$$

(1)

Model sederhana ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Salah satu modifikasi dilakukan dengan penambahan fungsi respon.

Fungsi respon dalam model interaksi predator-prey menurut Brauer & Chavez (2012) adalah jumlah makanan yang dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan makanan. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon tipe I, tipe II, dan tipe III. Fungsi respon tipe I terjadi pada predator yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu mangsanya. Fungsi

respon tipe II terjadi pada predator yang berkarakteristik aktif dalam mencari mangsa. Fungsi respon tipe III terjadi pada predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain ketika populasi prey yang dimakan mulai berkurang. Kemudian untuk membangun model yang lebih realistis, Ruan (2009) mempertimbangkan asumsi lain diantaranya adalah tingkat pemanenan konstan dan waktu tunda. Waktu tunda juga harus dipertimbangkan, karena predator membutuhkan waktu untuk memburu mangsanya.

Model dengan tingkat pemanenan sering kali mengaitkan populasi dengan masalah ekonomi. Pengaruh tingkat pemanenan telah dipelajari oleh Holmberg dan hasilnya menunjukkan bahwa kuota tangkapan dapat menyebabkan osilasi, kekacauan serta meningkatkan risiko eksploitasi (Toaha dan Hasan, 2008).

Para peneliti sebelumnya telah mengembangkan model predator-prey ketika terdapat wabah penyakit pada populasi predator atau prey. Tewa, dkk menganalisis stabilitas local dan global model predator-prey dengan penyakit menular SIS dan fungsi respon Holling type II. Solusi periodic menunjukkan paling sedikit satu populasi yang punah karena penyakit.

Moustafa menganalisis bifurkasi Hopf dan transkritik model eko-epidemiologi berorde fraksional. Simulasi menunjukkan orde fraksional dapat membantu mengendalikan koeksistensi prey yang rentan, prey yang terinfeksi dan predator.

Penelitian serupa dilakukan oleh Kooi et al (2011), yang meneliti model predator-prey dua spesies pada kasus penyakit hanya terjadi pada populasi predator. Pada model mekanisme cara predator berburu berdasarkan fungsi respon Holling Tipe II. Dari hasil analisis model tersebut juga diperoleh sistem yang lebih stabil dengan adanya kenaikan laju infeksi penyakit.

Berbeda dari kajian sebelumnya, dalam penelitian ini akan memodifikasi model epidemi predator-prey Khoirun (2016) dengan model epidemi predator-prey yang terdiri dari dua spesies di mana predator berburu mangsa mengikuti model Lotka-Volterra dan mekanisme penularan penyakit pada spesies prey. Pada penelitian ini akan dikonstruksi model matematika epidemi predator-prey di mana terdapat penyebaran penyakit pada populasi prey yang mengikuti hukum aksi masa

sederhana dan mekanisme cara berburu predator mengikuti fungsi respon Holling tipe II. Model matematika yang terbentuk terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan populasi Susceptible-prey, laju pertumbuhan populasi infected-prey, dan laju pertumbuhan populasi predator. Ketiga persamaan tersebut membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinear (Boyce & DiPrima, 2001). Pada model SIP ini diasumsikan adanya waktu tunda. Waktu tunda menyatakan waktu yang dibutuhkan bagi predator untuk memburu mangsanya.

Dari model tersebut dilakukan analisis dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang telah diperoleh (Pastor, 2008). Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk menganalisis perilaku sistem predator-prey dan fungsi respon Holling tipe II. Sebuah tulisan yang diformulasikan dengan judul "BIFURKASI HOPF PADA MODEL DINAMIK S-I-P DENGAN PENYAKIT PADA POPULASI PREY DAN FUNGSI RESPON HOLLING TYPE II DAN PEMANENAN PADA PREY".

KAJIAN TEORI (GUNAKAN STYLE SECTION)

Diberikan persamaan diferensial *nonlinear* sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x).$$

(2)

Persamaan (2) mempunyai titik ekuilibrium $x = \bar{x}$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Untuk suatu persamaan diferensial *nonlinear*, analisis kestabilannya dilakukan melalui pelinearan. Misalkan dilakukan pelinearan terhadap persamaan (2), maka persamaan (2) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x).$$

(3)

Persamaan (3) merupakan persamaan diferensial *nonlinear* dengan A matriks Jacobian dari persamaan (2) pada titik ekuilibrium $\bar{x}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix},$$

(Clark, 1999: 140).

dan $\varphi(x)$ sebagai bagian linear dari persamaan (2). Ax pada persamaan (2) disebut pelinearan dari persamaan *nonlinear* (2) yang dituliskan dalam bentuk $\dot{x} = Ax$.

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A jika

$$Ax = \lambda x,$$

(4)

untuk suatu $\lambda \in \mathbb{R}$. Bilangan λ yang memenuhi persamaan di atas disebut nilai eigen atau nilai karakteristik. Untuk mencari nilai eigen dari matriks yang berukuran $n \times n$ maka persamaan (4) dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

(5)

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (5) mempunyai penyelesaian *nontrivial* jika

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0.$$

(6)

Persamaan (6) disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Anton, 1987: 277).

$$\text{Misalkan } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Dari persamaan (6), maka persamaan karakteristiknya menjadi

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b & c \\ d & e - \lambda & f \\ g & h & i - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

demikian sehingga diperoleh persamaan

$$\lambda^3 + \lambda^2(a + e + i) + \lambda(-ae - ai + bd + cg - ei + fh) + aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg = 0,$$

Jadi semua akar polinomial $k_0\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + k_3 = 0$ mempunyai bagian real

negatif apabila

$$1. \quad k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0 \text{ dan } k_3 > 0$$

$$2. \quad k_1k_2 - k_0k_3 > 0.$$

Selanjutnya Guckenheimer dan Holmes (1990) menjelaskan bahwa struktur kualitatif dari suatu sistem dinamik dapat berubah karena adanya perubahan dari parameter sistem dinamik tersebut. Hal inilah yang disebut bifurkasi. Bifurkasi adalah perubahan stabilitas dan jumlah titik setimbang yang diakibatkan perubahan parameter. Pandang persamaan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu).\end{aligned}\quad (7)$$

Diasumsikan sistem (7) mempunyai titik setimbang (x^*, y^*) dan $\mu = \mu^*$ adalah nilai parameter yang menyebabkan terjadinya bifurkasi.

Menurut Guckenheimer dan Holmes (1990), bifurkasi Hopf terjadi jika titik setimbang (x^*, y^*) mempunyai sepasang nilai eigen kompleks yaitu $\lambda(\mu^*) = p(\mu^*) \pm iq(\mu^*)$ dengan $p(\mu^*) = 0, q(\mu^*) \neq 0$ dan memenuhi syarat transversal.

METODE

Langkah awal dari pembuatan tulisan ini adalah menentukan tema yang ingin diangkat pada penelitian, dalam tulisan ini temanya adalah kasus bifurkasi Hopf pada model S-I-P.

Berikut diberikan gambaran secara umum langkah-langkah dalam melakukan penelitian pada model S-I-P ditinjau dari terjadinya bifurkasi satu parameter yang dikaji dalam artikel ini:

- (1) Menurunkan model matematika dari model S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda.
- (2) Menentukan semua titik tetap (titik kesetimbangan) dari sistem persamaan diferensial (sistem dinamik).
- (3) Menentukan persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian sistem yang dihitung pada setiap titik kesetimbangan.
- (4) Menentukan nilai parameter terjadinya bifurkasi Hopf (τ_k), yaitu nilai parameter pada saat nilai eigen titik kesetimbangan imajiner murni.
- (5) Menghitung syarat transversal untuk lebih meyakinkan bahwa terjadi bifurkasi Hopf pada titik kesetimbangan dalam $E^*(x^*, x^*)$.
- (6) Membuat simulasi numerik dari modifikasi model S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda dengan menggunakan *software* Maple 12 dan *Mathematica* 9.

Tahap akhir dari penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari pembahasan masalah dan pemecahan yang disesuaikan dengan konsep yang terkait.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Matematika

Model yang akan dibahas dalam artikel ini adalah model S-I-P interaksi dua spesies predator-prey dengan fungsi respon Holling tipe II dan pemanenan. Asumsi-asumsi yang digunakan pada model predator-prey sebagai berikut.

1. Laju pertumbuhan populasi prey memiliki pola pertumbuhan logistic
2. Penyakit hanya menginfeksi populasi prey dan prey yang terinfeksi tidak bisa disembuhkan atau menjadi kebal.
3. Makanan dari prey memiliki jumlah yang terbatas sehingga terjadi kompetisi antara prey sendiri dalam memperebutkan makanan.
4. Persediaan makanan predator bergantung pada populasi prey.
5. Pada saat terjadinya interaksi prey dengan predator, populasi prey akan menurun sedangkan populasi predator akan meningkat.
6. Dalam interaksinya, predator hanya memakan mangsa yang terinfeksi.
7. Dalam ekosistem, hanya ada 1 jenis mangsa untuk dikonsumsi oleh predator.
8. Prey merespon kehadiran predator sehingga predator memerlukan waktu untuk menangkap prey (predator mengikuti fungsi respon Holling tipe II).
9. Pada populasi prey dilakukan pemanenan setelah banyaknya populasi prey mencapai ambang batas pemanenan.

Modifikasi model predator-prey S-I-P dengan fungsi respon Holling tipe II dengan pemanenan dapat diekspresikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \beta x_1 x_2 - qEx_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta x_1 x_2 - \frac{ax_2 y}{b+x_2} - cx_2 - qEx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \mu \left(\frac{ax_2 x_3}{b+x_2}\right) - dx_3 \end{cases}$$

(8)

dengan $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ dan $x_3(0) > 0$

dimana $S = \frac{x_1}{K}, I = \frac{x_2}{K}, P = \frac{x_3}{K}, T = rt > 0, A = \frac{a}{r} > 0, B = \frac{b}{K} > 0, C = \frac{c}{r} > 0, D = \frac{d}{r} > 0$ dan $m = \frac{\beta K}{r} > 0$.

Pada sistem (8), $x_1 = \frac{S}{K}$ mempresentasikan kepadatan populasi *prey* rentan penyakit disertai dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $x_2 = \frac{I}{K}$ mengartikan kepadatan populasi *prey* yang terinfeksi disertai pengaruh dari lingkungan, $x_3 = \frac{P}{K}$ mengartikan kepadatan populasi predator disertai pengaruh lingkungan, $\frac{T}{r} = t$ mempresentasikan kelipatan dari waktu t , $a = Ar$ angka penurunan kepadatan populasi *prey* akibat interaksi antara *prey* dan *predator*, $b = BK$ mempresentasikan tingkat kejenuhan pemangsaan dengan adanya pengaruh dari lingkungan, $\beta = \frac{mK}{r}$ tingkat penyebaran penyakit menular pada populasi mangsa $c = Cr$ dan $d = Dr$ masing-masing adalah laju kematian alami dari mangsa dan predator, μ tingkat pertumbuhan populasi predator, $h_1 = \frac{q_1 E}{r}$ mempresentasikan energi yang digunakan untuk memanen mangsa rentan dan $h_2 = \frac{q_2 E}{r}$ mempresentasikan energi yang digunakan untuk memanen mangsa terinfeksi. Sistem (8) dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS(T)}{dT} = S(T)(1 - S(T)) - mS(T)I(T) - h_1 S \\ \frac{dI(T)}{dT} = mS(T)I(T) - \frac{AS(T)P(T-\tau)}{B+I(T-\tau)} - CI - h_2 S \\ \frac{dP(T)}{dT} = \mu \left(\frac{AI(T)P(T-\tau)}{B+I(T-\tau)} \right) - DP(T) \end{cases}$$

(9)
dengan $S(0) > 0, I(0) > 0$ dan $P(0) > 0$.

2. Titik Ekuilibrium

Sistem (9) mencapai titik kesetimbangan ketika $\frac{dS}{dT} = 0, \frac{dI}{dT} = 0$ dan $\frac{dP}{dT} = 0$, sehingga sistem (10) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dS}{dT} &= S(1 - S) - mSI - h_1 S = 0, \\ (b) \quad \frac{dI}{dT} &= mSI - \frac{ASP}{B+I} - CI - h_2 I = 0, \\ (c) \quad \frac{dP}{dT} &= \mu \left(\frac{AIP}{B+I} \right) - DP = 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan (10), diperoleh $\mu \left(\frac{AIP}{B+I} \right) - DP = 0 \Leftrightarrow P = 0 \vee I = \frac{DB}{\mu A - D}$. Jika $P = 0$ dari persamaan (b) pada sistem (10), diperoleh

$$\begin{aligned} mSI - CI - h_2 I &= 0 \Leftrightarrow I(mS - C - h_2) = 0 \Leftrightarrow I \\ &= 0 \vee S = \frac{C + h_2}{m}. \end{aligned}$$

Substitusi $I = 0$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (10), maka

$$S(1 - S - h_1) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = 1 - h_1.$$

Jadi, untuk $I = 0$ dan $P = 0$ titik kesetimbangannya adalah $E_0(0,0,0)$ dan $E_1(1 - h_1, 0, 0)$. Substitusi $S = \frac{C+h_2}{m}$ dan $P = 0$ ke persamaan (a) pada sistem (10) yang menghasilkan $I = \frac{m-C-h_1m-h_2}{m^2}$. Jadi, jika $C + h_1m + h_2 < m$, maka titik kesetimbangannya adalah $E_2\left(\frac{C+h_2}{m}, \frac{m-C-h_1m-h_2}{m^2}, 0\right)$. Jika $I = \frac{DB}{\mu A - D}$ dari persamaan (a) pada sistem (10), diperoleh sebagai berikut.

$S(1 - S - mI - h_1) = 0 \Leftrightarrow S = 0 \vee S = \frac{-Ah_1\mu - BDM + A\mu + Dh_1 - D}{\mu A - D}$. Substitusi $I = \frac{DB}{\mu A - D}$ dan $S = \frac{-Ah_1\mu - BDM + A\mu + Dh_1 - D}{\mu A - D}$ ke persamaan (a) pada sistem (10) sehingga diperoleh $P = \frac{DB^2(A\mu(h_1m + C + h_2 - m) - D(-Bm^2 + h_1m + C + h_2 - m)\mu)}{(D - \mu A)^2(D(Bm - h_1 + 1) + A\mu(h_1 - 1))}$. Maka jika $A\mu(h_1m + C + h_2 - m) - D(-Bm^2 + h_1m + C + h_2 - m) > 0$ and $D(Bm - h_1 + 1) + A\mu(h_1 - 1) > 0$, $E^*(S^*, I^*, P^*)$ adalah titik ekuilibrium.

3. Stabilitas Tanpa Waktu

Matriks Jacobian dari persamaan (10) diberikan oleh

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2S - h_1 - mI & -mS & 0 \\ mI - \frac{AP}{B+I} & mS + \frac{ASP}{(B+I)^2} - C - h_2 & -\frac{AS}{B+I} \\ 0 & \frac{\mu AP}{B+I} - \frac{\mu AIP}{(B+I)^2} & \frac{\mu AI}{B+I} - D \end{pmatrix}$$

Pada titik E_0 , matriks Jacobian adalah $J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -h_1 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C - h_2 & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = -h_1 + 1 \vee \lambda_2 = -C - h_2 \vee \lambda_3 = -D$. Jadi E_0 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_1 , matriks Jacobian adalah $J(0,0,-h_1 + 1) = \begin{pmatrix} h_1 - 1 & -m(-h_1 + 1) & 0 \\ 0 & m(-h_1 + 1) - C - h_2 & -\frac{A(-h_1 + 1)}{B} \\ 0 & 0 & -D \end{pmatrix}$. Diperoleh $\lambda_1 = h_1 - 1 \vee \lambda_2 = -h_1m - C - h_2 \vee \lambda_3 = -D$. Jadi, E_1 adalah titik pelana yang tidak stabil.

Pada titik E_2 , matriks Jacobian adalah $J\left(\frac{C+h_2}{m}, \frac{m-C-h_1m-h_2}{m^2}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{-C-h_2}{m} & -C - h_2 & 0 \\ \frac{m-h_1m-C-h_2}{m} & 0 & \frac{-mA(C+h_2)}{m(mb-h_1+1)-C-h_2} \\ 0 & 0 & \frac{-\mu A(h_1m+C+h_2-m)}{bm^2-h_1m-C-h_2+m} - D \end{pmatrix}$.

$$b_1 b_5 b_6 \sin \omega \tau - \omega^3) = 0 \quad (16)$$

Persamaan (16) bernilai nol jika bagian imajiner dan real sama dengan nol sehingga diperoleh

$$(\omega b_1 b_7 + \omega b_4 b_7 - \omega b_5 b_6) \sin \omega \tau + (b_2 b_3 b_7 + \omega^2 b_7^2 + b_1 b_5 b_6 - b_1 b_4 b_7) \cos \omega \tau = -\omega^2 b_1 - \omega^2 b_4 \quad (17)$$

And

$$(b_1 b_4 b_7 - b_2 b_3 b_7 - \omega^2 b_7 - b_1 b_5 b_6) \sin \omega \tau + (\omega b_1 b_7 + \omega b_4 b_7 - \omega b_5 b_6) \cos \omega \tau = -\omega b_1 b_4 + \omega b_2 b_3 + \omega^3 \quad (18)$$

Kemudian mengeliminasi persamaan (17) dan (18) terhadap τ dengan mengkuadratkan setiap ruas persamaan tersebut, maka diperoleh.

$$\begin{aligned} & (b_1^2 b_7^2 \omega^2 + 2b_1 b_4 b_7^2 \omega^2 - 2b_1 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + b_4^2 b_7^2 \omega^2 - 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + b_5^2 b_6^2 \omega^2) \sin^2 \omega \tau + \\ & 2(-b_1^2 b_4 b_7^2 \omega + b_1^2 b_5 b_6 b_7 \omega - b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 + b_1 b_2 b_3 b_7^2 \omega + 2b_1 b_4 b_5 b_6 b_7 \omega - b_1 b_4^2 b_7^2 \omega^2 - b_1 b_5^2 b_6^2 \omega + b_1 b_7^2 \omega^3 + b_2 b_3 b_4 b_7^2 \omega - b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 \omega + b_4 b_7^2 \omega^3 - b_5 b_6 b_7 \omega^3) \cos \omega \tau \sin \omega \tau + (b_1^2 b_4^2 b_7^2 - 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 + b_1^2 b_5^2 b_6^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 + 2b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 \omega - 2b_1 b_4 b_7^2 \omega^2 + 2b_1 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + b_2^2 b_3 b_7^2 + 2b_2 b_3 b_7^2 \omega^2 + b_7^2 \omega^4) \cos^2 \omega \tau = \omega^4 b_1^2 + 2\omega^4 b_1 b_4 + \omega^4 b_4^2 \quad (19) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & (\omega^4 b_7^2 + b_1^2 b_7^2 b_4^2 + b_2^2 b_7^2 b_3^2 - 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 + b_1^2 b_5^2 b_6^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 + 2b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 - 2b_1 b_4 b_7^2 \omega^2 + 2b_1 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + 2b_2 b_3 b_7^2 \omega^2) \sin^2 \omega \tau + \\ & 2(b_1^2 b_4 b_7^2 \omega - b_1^2 b_5 b_6 b_7 \omega - b_1 b_2 b_3 b_7^2 \omega + b_1 b_4^2 b_7^2 \omega - 2b_1 b_4 b_5 b_6 b_7 \omega + b_1 b_5^2 b_6^2 \omega - b_1 b_7^2 \omega^3 - b_2 b_3 b_4 b_7^2 \omega + b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 \omega - b_4 b_7^2 \omega^3 + b_5 b_6 b_7 \omega^3) \cos \omega \tau \sin \omega \tau + (b_1^2 b_7^2 \omega^2 + 2\omega^2 b_1 b_7^2 b_4 - 2b_1 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + b_4^2 b_7^2 \omega^2 - 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega^2 + b_5^2 b_6^2 \omega^2) \cos^2 \omega \tau = b_1^2 b_4^2 \omega^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_4 \omega^2 + b_2^2 b_3^2 \omega^2 + 2b_1 b_4 \omega^4 - 2b_2 b_3 b_4 \omega^4 + \omega^6 \quad (20) \end{aligned}$$

Persamaan (19) dan (20) dijumlahkan dan dikelompokkan berdasarkan pangkatnya, sehingga diperoleh persamaan polinomial berderajat enam sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & -b_1^2 b_7^2 b_4^2 - b_2^2 b_7^2 b_3^2 + 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 - b_1^2 b_5^2 b_6^2 + 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 + (2b_1 b_4 b_7^2 - 2b_1 b_5 b_6 b_7 - 2b_2 b_3 b_7^2 - b_1^2 b_7^2 - 2b_1 b_7^2 b_4 + 2b_1 b_5 b_6 b_7 - b_4^2 b_7^2 + 2b_4 b_5 b_6 b_7 - b_5^2 b_6^2 + b_1^2 b_4^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_4 + b_2^2 b_3^2) \omega^2 + (b_1^2 - b_7^2 + 2b_1 b_4 + b_4^2 + 2b_1 b_4 - 2b_2 b_3 b_4) \omega^4 + \omega^6 \quad (21) \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai waktu tunda kritis (τ_k) dengan tahapan sebagai berikut.

Langkah pertama substitusi ω_k ke persamaan (17) dan (18) kemudian mengeliminasi fungsi cosinus dari persamaan (17) dan (18)

$$\begin{aligned} & (-\omega_k^2 b_1^2 b_4^2 - 2\omega_k^2 b_1 b_4 b_2 b_3 - \omega_k^2 b_7^2 b_4^2 - \omega_k^2 b_2^2 b_3^2 - \omega_k^4 b_4^2 - b_1^2 b_7^2 b_4^2 - 2b_1 b_7^2 b_4 b_2 b_3 - b_2^2 b_3^2 b_7^2) \sin \omega_k \tau = -b_1^2 b_4^2 b_7 \omega_k + b_1^2 b_4 b_5 b_6 \omega_k - b_1^2 b_7 \omega_k^3 + 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7 \omega_k - b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 \omega_k - b_2^2 b_3^2 b_7 \omega_k - 2b_2 b_3 b_7 \omega_k^3 - b_4^2 b_7 \omega_k^3 - b_7 \omega_k^5 \quad (22) \end{aligned}$$

Selanjutnya mengeliminasi fungsi sinus dari persamaan (17) dan (18)

$$\begin{aligned} & (-b_1^2 b_4^2 b_7^2 + 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 - b_1^2 b_5^2 b_6^2 - b_1^2 b_7^2 \omega_k^2 + 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 - b_2^2 b_3^2 b_7^2 - 2b_2 b_3 b_7^2 \omega_k^2 - b_4^2 b_7^2 \omega_k^2 + 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega_k^2 - b_5^2 b_6^2 \omega_k^2 - b_7^2 \omega_k^4) \cos \omega_k \tau = \omega_k^2 b_1^2 b_5 b_6 + \omega_k^4 b_5 b_6 + b_6 b_5 b_3 b_2 \omega_k^2 \quad (23) \end{aligned}$$

(23) Dari (22) dan (23) diperoleh

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(\frac{-b_1^2 b_4^2 b_7 \omega_k + b_1^2 b_4 b_5 b_6 \omega_k - b_1^2 b_7 \omega_k^3 + 2b_1 b_2 b_3 b_4 b_7 \omega_k - b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 \omega_k - b_2^2 b_3^2 b_7 \omega_k - 2b_2 b_3 b_7 \omega_k^3 - b_4^2 b_7 \omega_k^3 - b_7 \omega_k^5}{\omega_k^2 b_1^2 b_5 b_6 + \omega_k^4 b_5 b_6 + b_6 b_5 b_3 b_2 \omega_k^2} \right) \quad (24)$$

Selanjutnya diferensialkan persamaan (14)

terhadap τ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + J\lambda^2 + K\lambda + L\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + M\lambda e^{-\lambda\tau} + N e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (25) \\ & \text{dengan } J = -b_1 - b_4, K = b_1 b_4 - b_2 b_3, L = -b_7, M = b_1 b_7, N = -b_1 b_7 b_4 + b_2 b_3 b_7 + b_1 b_5 b_6 \\ & \Leftrightarrow \frac{d(\lambda^3)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + J \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + K \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + L \left\{ \lambda^2 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} \\ & + M \left\{ \lambda \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} + N \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] = 0 \\ & \Leftrightarrow 3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} + 2J\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + K \frac{d\lambda}{d\tau} - L\lambda^3 e^{-\lambda\tau} - L\lambda^2 \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + 2L\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - M\lambda^2 e^{-\lambda\tau} - M\lambda \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + M \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - N\lambda e^{-\lambda\tau} - N\tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{(L\lambda^2 + M\lambda + N)\lambda e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - (L\lambda^2 + M\lambda + N)\tau e^{-\lambda\tau} + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}}. \end{aligned}$$

From equation (18), we have $e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda}{L\lambda^2 + M\lambda + N}$. Then

we get

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{\lambda(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda)}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - \tau(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda) + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}} \\ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_b} &= \frac{\lambda(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda)}{3\lambda^2 + 2J\lambda + K - \tau(-\lambda^3 - J\lambda^2 - K\lambda) + (2L\lambda + M)e^{-\lambda\tau}} \end{aligned}$$

$$= \frac{i\omega_b(-i\omega_b)^3 - J(i\omega_b)^2 - K i\omega_b}{3(i\omega_b)^2 + 2J i\omega_b + K - \tau_b(-i\omega_b)^3 - J(i\omega_b)^2 - K i\omega_b) + (2Li\omega_b + M)(\cos \omega_b \tau_b - i \sin \omega_b \tau_b)}$$

$$= \frac{-\omega_b^4 + iJ\omega_b^3 + K\omega_b^2}{-3\omega_b^2 + 2J i\omega_b + K - \tau_b i\omega_b^3 - \tau_b J\omega_b^2 + \tau_b K i\omega_b + 2Li\omega_b \cos \omega_b \tau_b + 2L\omega_b \sin \omega_b \tau_b + M \cos \omega_b \tau_b - M i \sin \omega_b \tau_b}$$

$$= \frac{-\omega_b^4 + K\omega_b^2 + J\omega_b^3 i}{P_1^2 + Q_1^2} \cdot (P_1 - Q_1 i)$$

dengan

$$P_1 = -3\omega_b^2 + K - \tau_b J\omega_b^2 + 2L\omega_b \sin \omega_b \tau_b +$$

$$M \cos \omega_b \tau_b$$

$$Q_1 = 2J\omega_b - \tau_b \omega_b^3 + \tau_b K\omega_b + 2L\omega_b \cos \omega_b \tau_b -$$

$$L \sin \omega_b \tau_b$$

$$= \frac{3\omega_b^6 - 4K\omega_b^4 + 2J^2\omega_b^4 + K^2\omega_b^2}{P_1^2 + Q_1^2}$$

Jika ω_b adalah akar positif terkecil dari (14) (kecuali jika akar tersebut merupakan akar kembar maka pilihlah akar terkecil berikutnya), maka

$$\frac{d\lambda}{d\tau}|_{\tau=\tau_b} = \frac{\omega_b^2(3\omega_b^4 + (-4K + 2J^2)\omega_b^2)}{P_1^2 + Q_1^2} \neq 0$$

4.14 Simulasi Tanpa Waltu Tunda

Pada bagian ini, dibahas simulasi model di titik $E_0, E_1, E_2, E_0, E_1, E_2$ and E^* . Untuk menemukan solusi, dipilih nilai-nilai parameter sebagai berikut.

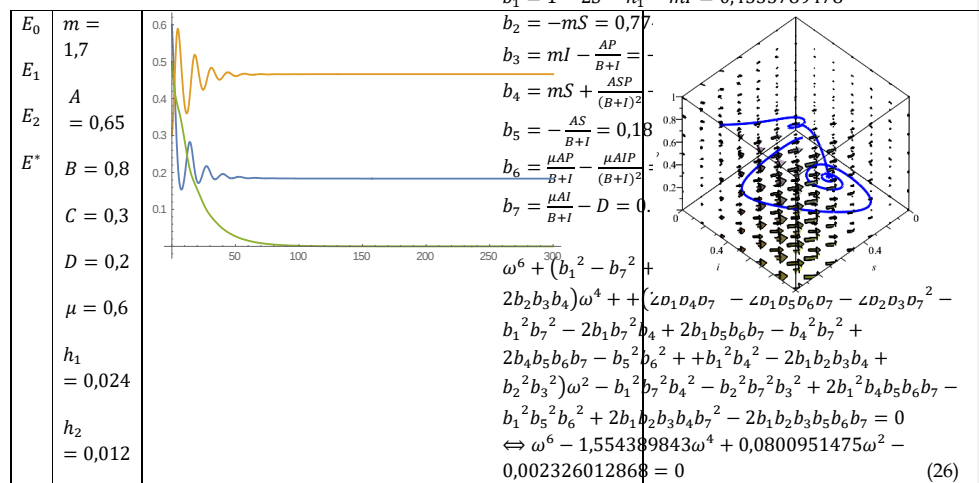


Figure 1. Solution fields and phase portrait

4.15 Simulasi

Simulasi numerik model predator-prey dengan waktu tunda dilakukan untuk menunjukkan adanya pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap E^* .

Tabel 2. Nilai parameter di titik ekuilibrium E^* dengan waktu tunda

Parameter	Value
A	0,65
B	0,8
C	0,3
D	0,2
μ	0,6
h_1	0,024
h_2	0,012

Dari table diperoleh

$$S^* = \frac{-Ah_1\mu - BDm + A\mu + Dh_1 - D}{\mu A - D} = 0,4555789474.$$

$$I^* = \frac{DB}{\mu A - D} = 0,8421052632.$$

$$P^* = \frac{DB^2(A\mu(h_1m + C + h_2 - m) - D(-Bm^2 + h_1m + C + h_2 - m))\mu}{(D - \mu A)^2(D(Bm - h_1 + 1) + A\mu(h_1 - 1))} =$$

$$5,073571564.$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium $E^*(0,45; 0,84; 5,07)$.

Kemudian dari nilai-nilai parameter yang disajikan pada Tabel 1, diperoleh

$$b_1 = 1 - 2S - h_1 - ml = 0,4555789478$$

$$b_2 = -mS = 0,77$$

$$b_3 = ml - \frac{AP}{B+I} = -$$

$$b_4 = mS + \frac{ASP}{(B+I)^2} = -$$

$$b_5 = -\frac{AS}{B+I} = 0,18$$

$$b_6 = \frac{\mu AP}{B+I} - \frac{\mu AIP}{(B+I)^2} = -$$

$$b_7 = \frac{\mu AI}{B+I} - D = 0$$

$$\omega^6 + (b_1^2 - b_7^2 +$$

$$2b_2b_3b_4)\omega^4 + (2b_1b_4b_7 - 2b_1b_5b_6b_7 - 2b_2b_3b_7^2 -$$

$$b_1^2b_7^2 - 2b_1b_7^2b_4 + 2b_1b_5b_6b_7 - b_4^2b_7^2 +$$

$$2b_4b_5b_6b_7 - b_5^2b_6^2 + b_1^2b_4^2 - 2b_1b_2b_3b_4 +$$

$$b_2^2b_3^2)\omega^2 - b_1^2b_7^2b_4^2 - b_2^2b_7^2b_3^2 + 2b_1^2b_4b_5b_6b_7 -$$

$$b_1^2b_5^2b_6^2 + 2b_1b_2b_3b_4b_7^2 - 2b_1b_2b_3b_5b_6b_7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^6 - 1,554389843\omega^4 + 0,0800951475\omega^2 -$$

$$0,002326012863 = 0$$

$$(26)$$

$$\omega > 0$$

$$\omega_1 = 1,225601311.$$

$$\omega_k$$

$$\tau_k =$$

$$\frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(-\frac{-b_1^2b_4^2b_7\omega_k + b_1^2b_4b_5b_6\omega_k - b_1^2b_7\omega_k^3 + 2b_1b_2b_3b_4b_7\omega_k - b_1b_2b_3b_5b_6\omega_k - b_2^2b_3^2b_7\omega_k - 2b_2b_3b_7\omega_k^3 - b_4^2b_7\omega_k^3 - b_7\omega_k^5}{\omega_k^2b_1^2b_5b_6 + \omega_k^4b_5b_6 + b_6b_5b_3b_2\omega_k^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \tau_k = 0,07.$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

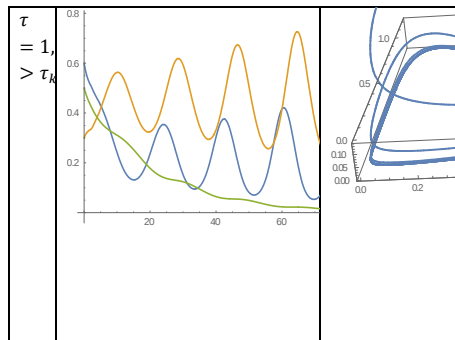
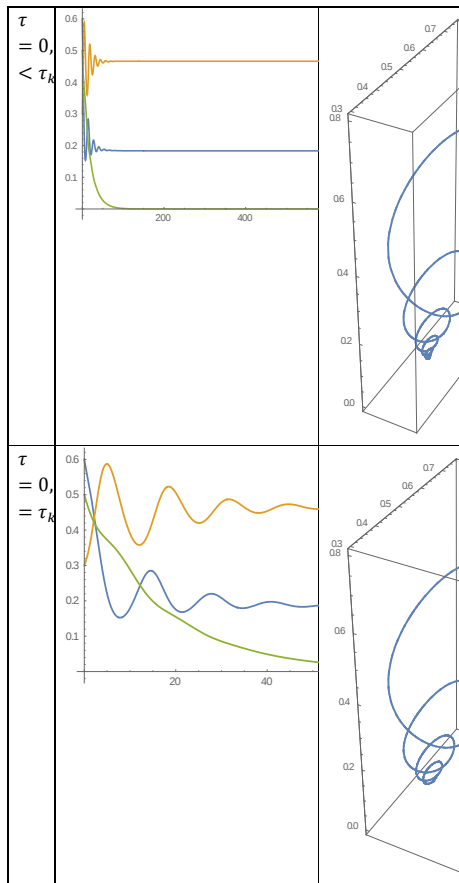
$$\tau_k$$

$$\tau_k$$

Table 3. Time Delay at $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

k	τ
0	0,0723705
1	5,198984904
2	10,32559929
$\vdots$	$\vdots$
n	τ_n

Dalam artikel ini, hanya dibahas nilai waktu tunda pada saat, sebelum dan sesudah nilai batas waktu tunda pada jarak $k = 0$. Pada simulasi ini akan disediakan tiga kasus untuk menunjukkan keberadaan bifurkasi Hopf.

**Gambar 2.** Bidang Solusi dan potret fase di E^* 

PENUTUP

SIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan penondimensioalan model, diperoleh model matematika S-I-P dengan penyakit pada populasi *prey* dan fungsi respon Holling tipe II dengan pemanenan.

Dari model tersebut diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu E_0 , E_1 , E_2 dan E^* dengan asumsi terdapat titik ekuilibrium E_0, E_1, E_2 and E^* if $C + h_1 m + h_2 < m$ dan $A\mu(h_1 m + C + h_2 - m) - D(-Bm^2 + h_1 m + C + h_2 - m) > 0$ and $D(Bm - h_1 + 1) + A\mu(h_1 - 1) > 0$.

Dari analisis kestabilan, kita memperoleh titik ekuilibrium E_2 stable if jika $-M_1 - M_4 > 0, M_1 M_4 - M_2 M_3 - M_5 M_6 > 0$ dan $(-M_1 - M_4)(M_1 M_4 - M_2 M_3 - M_5 M_6) > M_1 M_5 M_6$ with $M_1 =$

$$M_1 = \frac{Ah_1\mu + Bm - A\mu - Dh_1 + D}{\mu A - D}, M_2 = \frac{m(Ah_1\mu + Bm - A\mu - Dh_1 + D)}{\mu A - D}, M_3 = \frac{mBD}{\mu A - D} - \frac{m(A\mu(h_1 - 1) + D(Bm - h_1 + 1)) + A\mu(C + h_2) + D}{A\mu(A\mu(h_1 - 1) + D(Bm - 3h_1 + 3)) - 2D(Bm + 3h_1)^2 + D(Bm - h_1)^3 \left(\frac{BA\mu}{\mu A - D}\right)}, M_4 = \frac{m(Ah_1\mu + Bm - A\mu - Dh_1 + D)}{\mu A - D} - \frac{-A(Ah_1\mu + Bm - A\mu - Dh_1 + D)B^2D\mu(D(Bm^2 - h_1m - C - h_2 + m) + A\mu(h_1m + C - h_2 - m))}{A\mu(A\mu(h_1 - 1) + D(Bm - 3h_1 + 3)) - 2D(Bm + 3h_1)^2 + D(Bm - h_1)^3 \left(\frac{BA\mu}{\mu A - D}\right)}, M_5 = \frac{Ah_1\mu + Bm - A\mu - Dh_1 + D}{B\mu}, M_6 = \frac{(A\mu BD - BD^2)(Ah_1m\mu + BDm^2 + AC\mu + Ah_2\mu - Am\mu - Dh_1m - CD - Dh_2 + Dm)(\mu A - D)}{A(A^3h_1\mu^3 + A^2BDm\mu^2 - A^3\mu^3 - 3A^2Dh_1\mu^2 - 2ABD^2m\mu + 3A^2D\mu^2 + 3AD^2h_1\mu + BD^3m - 3AD^2\mu - D^3h_1 + D^3)}$$

Dalam menganalisis keberadaan bifurkasi Hopf, model dibagi menjadi tiga kasus dimana setiap kasus mengalami peningkatan nilai parameter waktu tunda pada populasi predator (τ). Pada kasus $\tau = \tau_k$ terjadi perubahan kestabilan titik interior dari spiral stabil menjadi spiral tidak stabil dan muncul limit cycle. Fenomena ini merupakan ciri dari bifurkasi Hopf. Dengan memilih parameter bifurkasi yang tepat, dianalisis stabilitas local dan bifurkasi Hopf. Pengamatan pada simulasi model dilakukan dengan memvariasikan nilai waktu tunda. Ketika terjadi bifurkasi Hopf, grafik pada bidang solusi menunjukkan Gerakan osilasi yang konstan. Jika $\tau < \tau_k$, maka solusi system terkendali berada dalam keadaan seimbang. Kemudian Ketika $\tau > \tau_k$ solusi system terus berfluktuasi menyebabkan kondisi system tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- Usmandjanovna AK. Ecology as an Independent Science. International Journal on Orange Technologies. 2020; 02: 52-53;
- Basilaia M, Bogdanova I & Dymnikova. Cosmoharmonic principles of environmental safety. E3S Web of Conferences. 2019; 135;
- Chow A. Food Chain in Biodiversity. Journal of Ecosystem & Ecography. 2022; 12;
- Riley L W. Differentiating Epidemic from Endemic or Sporadic Infectious Disease Occurrence. ASM Journal. 2019; 7; 4;
- Lopez L A U & Morales A X G. Time-dependent SI model for epidemiology and applications to Covid-19. Gravitation, Mathematical Physics and Field Theory. 2021; 67: 1-15;
- Blasius B. Permanent predator-prey oscillations. Research elucidates fundamental ecological concept of predator-prey interactions. NATURE. UNIVERSITY OF OLDENBURG. 2019
- Christodoulides Y T & Damianou P A. DARBOUX POLYNOMIALS FOR LOTKA-VOLTERRA SYSTEMS IN THREE DIMENSIONS. Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2009; 16; 3: 339-354;
- Guerrant RL, Walker DH & Weller PF. Tropical Infectious Diseases: Principles, Pathogens and Practice, Edisi Ketiga, Saunders Elseviers, China. 2011;
- Joydip D & Anuj Kumar S. The Role of The Incubation Period In A Disease Model. Applied Mathematics E-Notes. 2009;9: 146-153;
- Nguyen HD, Nguyen MM & Tong TT. Dynamics Of Predator-Prey Population with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. Acta Mathematica Vietnamica. 2007; 32(1): 99-111;
- William EB & Richard CD. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Seventh Edition, John Wiley & Sons, New York. 2001;
- Brauer, F. & C.C. Chaves. 2012. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer Science & Business Media: New York;
- Tewa IJ, Djewnan YV dan Bowong. Predator Prey Model with Holling Response Function Of ype II and SIS Infectious Disease. Applied Mathematical Modelling. 2013; 37: 4825-4841;
- Mahmoud M, Mohd HM, A. I. Ahmad II, and Farah AA. Dynamical analysis of a fractional-order ecoepidemiological model with disease in prey population. Advances in Difference Equations. 2020; 1: 48;
- Bob WK, George AKVV, & Krishna PD. Stabilization and Complex Dinamics in Predator-Prey Model with Predator Suffering from an Infectious Disease. Ecological Complexity. 2011; 8: 113-122;
- Ni'mah K, Waluya SB, Kharis M. A dynamic S-I-P model with disease in the prey population and holling type II functional response. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS). 2016; 100; 5: 727-746;
- Pastor J. Mathematical Ecology of Population and Ecosystem. John Willey & Son, Singapore. 2008.
- Ruan, S. 2009. On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay. *Math. Model. Nat. Phenom*, 4: 140-188.
- Asrun, B., Toaha, S., Azis, M. I. Stability of Predator Prey Model with Holling Type II Functional Response and Time Delay. *Jurnal Matematika*. Makasar: FMIPA Universitas Hasanuddin.
- Clark, D. N. 1999. *Analysis Calculus and Differential Equation*. New York: CRC Press.
- Guckenheimer, J. M. & Holmes, P. J. 1990. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York. *Appl. Math Sciences: Springer-Verlag*.
- Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga
- Chau, M., & Reith, R. (2020). IDC - Smartphone

- Market Share - Vendor. Retrieved January 8, 2021, from Smartphone Market Share website: <https://www.idc.com/promo/smartphone-market-share/vendor>
- Masitoh, S. (2018). Blended Learning Berwawasan Literasi Digital Suatu Upaya Meningkatkan Kualitas Pembelajaran dan Membangun Generasi Emas 2045. Proceedings of the ICECRS, 1(3), 13-34. <https://doi.org/10.21070/picecrs.v1i3.1377>