MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115
Volume 12 No 03
Tahun 2024

PELABELAN TOTAL AJAIB TITIK GENAP BEBERAPA KELAS GRAF

Aisy Rohmah Najahy Mawaddah
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email : aisy.20043@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi : ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan G graf dengan n titik, m sisi, dan mempunyai $|V(G)| = n$, serta $|E(G)| = m$. Sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, m+n\}$ disebut pelabelan total ajaib titik pada G, jika $\forall v \in V(G)$, $f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx) = k$, untuk suatu konstanta k. Pelabelan total ajaib titik f dikatakan genap jika $f(v)$ genap untuk setiap $v \in V(G)$, serta memenuhi syarat perlu $m \geq n$. Kemudian, graf yang memenuhi dinamakan graf total ajaib titik genap. Secara umum, menentukan apakah suatu graf merupakan graf pelabelan total ajaib titik genap, merupakan permasalahan sulit. Dalam artikel ini akan dibuktikan hubungan antara k, m, dan n adalah $k = \frac{m^2+2mn+m}{n}$. Selain itu, akan dibuktikan juga bahwa sikel C_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika n ganjil. Demikian juga dibuktikan bahwa graf mC_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika m ganjil dan n ganjil. Kemudian dibuktikan juga apakah hanya $n = 2$ yang mengakibatkan graf kipas F_n adalah graf total ajaib titik genap. Selanjutnya untuk graf matahari M_n dengan $n \geq 3$ apakah benar merupakan graf total ajaib titik genap. Selain itu, dalam artikel ini juga akan dibuktikan beberapa kelas graf yang bukan graf total ajaib titik genap, yaitu graf roda (W_n) dengan $n \geq 3$, graf layang-layang $(L_{(n,t)})$, dan graf komplet (K_n) dengan $\equiv 0(\text{mod } 4)$.

Kata Kunci: Pelabelan total ajaib, titik genap, sikel C_n, graf mC_n, graf kipas (F_n), graf matahari (M_n), graf roda (W_n), graf layang-layang $\left(L_{(n,t)}\right)$, serta graf komplet (K_n).

Abstract

Let G be a graph with n vertex, m edges, and has $|V(G)| = n$, and $|E(G)| = m$. A bijective function $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, m+n\}$ is called the magic total labeling of vertex on G, if $\forall v \in V(G)$, $f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx) = k$, for some constant k. The magic total labeling of vertex f is said to be even if $f(v)$ is even for every $v \in V(G)$, and satisfies the necessary condition $m \geq n$. Then, the graph that satisfies is called the magic total graph of even vertex. In general, determining whether a graph is an even vertex magic total labeling graph is a difficult problem. In this article we will prove that the relationship between k, m, and n is $k = \frac{m^2+2mn+m}{n}$. In addition, it will also be proven that the cycle C_n is a magic total graph of even vertex if and only if n is odd. Likewise, it is proved that the graph mC_n is a magic-total graph of even vertex if and only if m is odd and n is odd. Then it is also proven whether only $n = 2$ causes the fan graph F_n to be a magic total graph of even vertex. Furthermore, for the sun graph M_n with $n \geq 3$, is it really a magic total graph with even vertex. Apart from that, in this article we will also prove several classes of graphs which are not magic total graphs with even vertex, namely wheel graphs (W_n) with $n \geq 3$, kite graphs $(L_{(n,t)})$, and complete graphs (K_n) with $\equiv 0(\text{mod } 4)$.

Keywords: *Magic total labeling, even vertex, cycle C_n, graph mC_n, fan graph (F_n), sun graph (M_n), wheel graph (W_n), kite graph $(L_{(n,t)})$, as well as the complete graph (K_n).*

PENDAHULUAN

Pada tahun 1763, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss yakni Leonhard Euler memperkenalkan pertama kali teori graf melalui tulisannya yang membahas tentang pemecahan masalah yang terjadi pada jembatan Konigsberg. Permasalahan yang muncul pada saat itu ialah adakah kemungkinan untuk bisa melewati tujuh jembatan yang terdapat tepat di atas Sungai Pregel, Kota Konigsberg tepat satu kali. Dari permasalahan inilah, kemudian Euler memisalkan daratan sebagai titik, dan dihubungkan dengan jembatan yang dinyatakan sebagai sisi. Konsep titik dan sisi tersebutlah yang kemudian dikenal pada pembelajaran teori graf.

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari elemennya yang disebut titik dan himpunan berhingga (bisa kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Pelabelan graf merupakan pemberian label. Akan disebut sebagai pelabelan titik, jika label diberikan pada setiap titik. Sebaliknya, jika label diberikan pada setiap sisi maka disebut sebagai pelabelan sisi, dan jika label diberikan pada setiap titik berikut sisinya maka disebut sebagai pelabelan total (Slamin, 2023).

Pelabelan graf memiliki peran yang sangat penting dan bermanfaat di beberapa sektor, khususnya sektor transportasi, sistem komunikasi, serta ilmu komputer (Wardhani dan Budayasa, 2019). Terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang kemudian dikembangkan, diantaranya ialah pelabelan harmoni, pelabelan *gracefull*, pelabelan total tak beraturan, pelabelan anti ajaib serta pelabelan ajaib. Pelabelan ajaib ini sendiri juga dikembangkan lagi menjadi pelabelan total sisi-ajaib, pelabelan total sisi-ajaib super, pelabelan total titik-ajaib, serta pelabelan total titik ajaib super (Irawati dan Heri, 2011).

MacDougall menjadi orang pertama yang memperkenalkan konsep pelabelan total ajaib titik. Menurut MacDougall, pelabelan total ajaib titik pada G adalah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, m+n\} \ni \forall v \in V(G), f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx) = k$, untuk suatu konstanta k (Nagaraj dkk., 2017). Sedangkan pelabelan total ajaib titik f dikatakan genap jika $f(v)$ genap, untuk setiap $v \in V(G)$, serta memenuhi syarat perlu $m \geq n$.

Pada artikel C.T. Nagaraj,dkk. yang berjudul "Even Vertex Magic Total Labeling" (Nagaraj dkk., 2017), terdapat beberapa teorema yang belum lengkap pembuktiannya, serta terdapat juga beberapa kesalahan, sehingga pada penelitian kali ini penulis akan melengkapi pembuktian dari teorema tersebut, serta merevisi kesalahan-kesalahan yang ada. Kemudian, juga menambahkan beberapa contoh dari pelabelan graf untuk lebih memperjelas teorema yang ada. Oleh karena itu, dalam penelitian kali ini yang akan dibahas ialah tentang pelabelan total ajaib titik genap beberapa kelas graf.

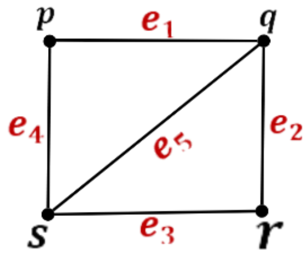
KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang elemennya disebut titik dan himpunan berhingga (bisa kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1:

Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi dapat dilihat pada Gambar 2.1.



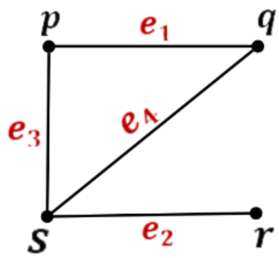
Gambar 2.1: Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi

Definisi 2.2:

Gelung *(loop)* ialah pengertian dari sisi graf yang menghubungkan suatu titik pada graf dengan dirinya sendiri. S**isi rangkap atau sisi ganda *(multiple-edges)*** ialah dua sisi atau lebih yang terkait satu pasang titik. **Graf sederhana** ialah graf yang tidak memiliki sisi rangkap, dan juga tidak memiliki gelung. Gambar 2.2 menyajikan contoh dari graf sederhana, sedangkan pada Gambar 2.3 bukan graf sederhana.

Contoh 2.2:

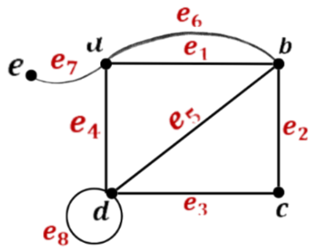
Berikut merupakan contoh dari graf sederhana:



Gambar 2.2: Graf sederhana dengan 4 titik dan 4 sisi

Contoh 2.3:

Berikut merupakan contoh dari graf tak sederhana:

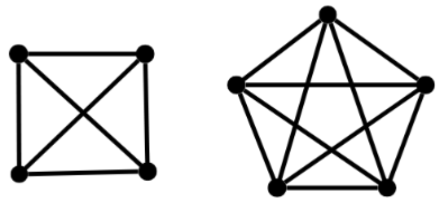


Gambar 2.3: Graf tak sederhana dengan 5 titik dan 8 sisi

Definisi 2.3:

Graf Komplet (graf lengkap) dengan n titik, dinotasikan dengan K_n, merupakan graf sederhana yang memiliki n titik dan setiap dua titik yang berlainan dihubungkan dengan sisi.

Contoh 2.4:



(a) (b)

Gambar 2.4: (a) K_4 graf komplet dengan 4 titik; (b) K_5 graf komplet dengan 5 titik

Definisi 2.4:

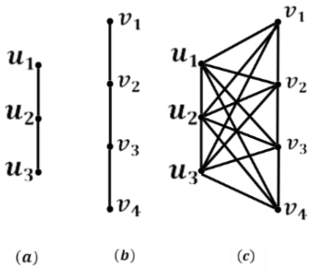
Misalkan G graf. Barisan berhingga yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i merupakan titik akhir dari sisi e_i, untuk $1 \leq i \leq k$, dinamakan **jalan *(walk)*** di G. Dimisalkan terdapat jalan dari dari titik v_0 ke titik v_k, dinotasikan dengan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$. **Titik awal** dari W tersebut ialah v_0, sedangkan, **titik akhir**nya ialah v_k. **Titik-titik internal** W antara lain $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$, dan **panjang jalan** W ialah k itu sendiri. Oleh karena itu, banyaknya sisi pada graf G ialah panjang jalan W. Titik pada graf G dimungkinkan muncul lebih dari satu kali di dalam jalan W, demikian juga dengan sisi nya juga dapat muncul lebih dari satu kali. W dikatakan sebagai **jejak *(trail)*** jika semua sisi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dalam jalan W berbeda, dan dikatakan sebagai **lintasan *(path)*** jika semua titik $v_0, v_1, \ldots, v_k$ dalam jalan W berbeda. Kemudian, disebut **sirkit** jika terdapat jejak yang tertutup (titik awal dan akhirnya sama). **Sirkit Euler** ialah sirkit di G yang memuat semua sisi G. Graf yang memuat sirkit euler disebut **graf Euler**. **Sikel *(cycle)*** ialah jejak tertutup *(closed trail)* yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda satu sama lain. Panjang dari sikel dapat dihitung dari banyaknya sisi dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k, dapat disimbolkan dengan C_k. **Sikel Hamilton** ialah sikel di G yang memuat semua titik G. Graf yang memuat sikel Hamilton disebut **graf Hamilton** (Budayasa, 2007).

Definisi 2.5:

Jumlah dua graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$. Himpunan titiknya ialah $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, serta himpunan sisinya ialah $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|\ u \in V(G_1)$ dan $v \in V(G_2)\}$ (Chartland dan Lesniak, 1986:11).

Contoh 2.5:

Berikut merupakan contoh ilustrasi jumlah dua graf:



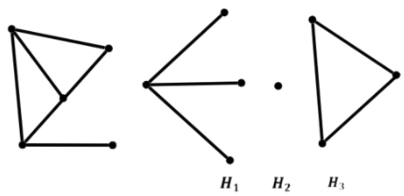
Gambar 2.5: (a) Graf G_1; (b) Graf G_2; (c) Graf $G_1 + G_2$

Definisi 2.6:

Graf G dikatakan terhubung *(connected)* jika untuk setiap dua titik G yang berbeda dihubungkan dengan lintasan. Sebaliknya, graf G dikatakan tak terhubung *(disconnected)* jika ada dua titik yang berbeda pada G tidak dihubungkan dengan lintasan. Pada graf tak terhubung biasanya terdiri atas beberapa komponen. Komponen sendiri adalah subgraf yang terhubung maksimal. (Budayasa, 2007).

Contoh 2.6:

Berikut merupakan contoh dari graf terhubung dan graf tak terhubung:



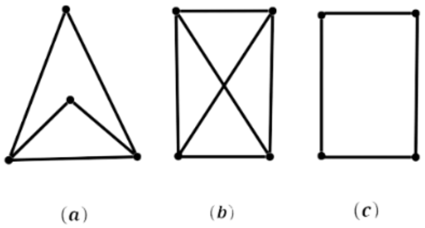
(a) (b)

Gambar 2.6: (a) G graf terhubung; (b) H graf tak terhubung dengan 3 komponen, yaitu H_1, H_2, dan H_3

Definisi 2.7:

Dua graf G dan H dikatakan isomorfik, jika terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$, serta banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G, sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u dan v.

Contoh 2.7:
Berikut merupakan contoh dari isomorfisme pada graf:



Gambar 2.7: (a) Graf G_1; (b) Graf G_2; (c) Graf G_3

Pada Gambar 2.8, Graf G_1 isomorfik dengan Graf G_2. Akan tetapi, Graf G_1 tidak isomorfik dengan Graf G_3.

Definisi 2.8:
Graf Sikel (*cycle graph*) C_n ialah graf terhubung yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi, dengan setiap titiknya berderajat dua (Chartland dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 2.9:
Titik *pendant* merupakan titik yang berderajat 1, sedangkan sisi *pendant* adalah sisi yang terkait dengan titik pendant (Faizah & Narwen, 2016).

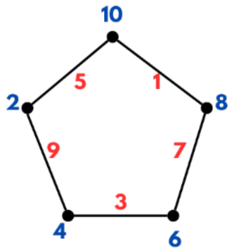
Definisi 2.10:
Graf pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel (Maharani & Budayasa, 2021).

Definisi 2.11:
Graf Lintasan (P_n) adalah pohon khusus yang memiliki tepat dua titik berderajat 1 yaitu titik awal dan titik akhir dan setiap titik internal berderajat 2 (Maharani & Budayasa, 2021).

PEMBAHASAN

Definisi 3.1
Misalkan G graf dengan n titik dan m sisi. Pelabelan total ajaib titik pada G adalah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \dots, m+n\}$ sedemikian hingga $\forall v \in V(G),\ f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx) = k$, untuk suatu konstanta k. Pelabelan total ajaib titik f dikatakan genap jika $f(v)$ genap, untuk setiap $v \in V(G)$, serta memenuhi syarat perlu $m \geq n$. Selanjutnya, graf G yang memiliki pelabelan demikian disebut **graf total ajaib titik genap.**

Contoh 3.1:
Pelabelan total ajaib titik genap pada graf $G = C_5$ dapat dilihat pada Gambar 3.1



Gambar 3.1: Pelabelan f pada C_5

Dalam hal ini, $n = 5, m = 5$, dan $k = 16$.

Lemma 3.1:
Misalkan G graf dengan n titik dan m sisi, dan f pelabelan total ajaib titik pada G dengan konstanta ajaib k. Jika, S_n = total label semua titik G, dan S_m = total label semua sisi G, maka $kn = S_n + 2S_m$

Bukti:
Misalkan G graf, dan f adalah pelabelan total ajaib titik pada G, dengan konstanta ajaib k. Karena $\forall v \in V(G)$, berlaku:

$$k = f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx)$$

$$\sum_{v \in V(G)} k = \sum_{v \in V(G)} f(v) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{x \in N(v)} f(vx)$$

$$k\,n = S_n + 2S_m$$

Dengan demikian, lemma terbukti. ■

Berikut hubungan antara banyaknya titik G, banyaknya sisi G, dan konstanta ajaib k dalam pelabelan total ajaib titik genap pada graf G.

Teorema 3.2:
Jika G graf nontrivial dengan n titik dan m sisi dengan konstanta ajaib k, maka:

$$k = \frac{m^2 + 2mn + m}{n}$$

Bukti:
Misalkan
S_n= jumlah label semua titik G, dan
S_m= jumlah label semua sisi G.
Misalkan f pelabelan total ajaib titik genap pada G dengan konstanta ajaib k. Maka:

$$S_n = \sum_{v \in V(G)} f(v)$$
$$= 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$
$$= n^2 + n$$

dan

$$S_m = (1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{m} + \mathrm{n}) - S_n$$
$$= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - (n^2 + \mathrm{n})$$
$$= \frac{m^2 - n^2 + 2mn + m - n}{2}$$

Karena $kn = S_n + 2S_m$, maka $kn = m^2 + 2mn + m$
Kedua ruas dibagi dengan n, diperoleh:

$$k = \frac{m^2 + 2mn + m}{n}$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi pelabelan total ajaib titik genap pada C_5 seperti pada Gambar 3.1 untuk $n = 5$, dan $m = 5$, diperoleh:

$$k = \frac{m^2 + 2mn + m}{n} = 16$$

Teorema 3.3:
Sikel C_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika n ganjil, untuk $n \geq 3$.

Bukti:
($\Rightarrow$) Jika sikel C_n adalah graf ajaib titik genap, maka n ganjil.

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dengan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}, \text{ dan}$$
$$E(C_n) = \{e_i = v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n = v_n v_1\}$$

Karena $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$, dan C_n adalah graf ajaib titik genap dengan konstanta ajaib k, maka berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh $k = 3n + 1$

Andaikan n genap , maka k ganjil.

Misalkan untuk $1 \leq i \leq n - 1$ terdapat 2 sisi C_n yang terkait di titik v_i yaitu sisi $e_{i-1} = v_{i-1} v_i$ dan sisi $e_i = v_i v_{i+1}$. Karena C_n adalah graf total ajaib titik genap, dan $m = n$. Maka, $f(v_i)$ adalah bilangan genap dan $f(e_{i-1})$ dan $f(e_i)$ masing-masing bilangan ganjil, sehingga

$$k = f(v_i) + f(e_{i-1}) + f(e_i) \text{ bilangan genap.}$$

Kontradiksi. Dengan demikian, n haruslah ganjil.

($\Leftarrow$) Misalkan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$
$$E(C_n) = \{e_i = v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n = v_n v_1\}$$

Konstruksi pelabelan

$$f : V(C_n) \cup E(C_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

sedemikian hingga:

$$f(v_i) = 2i, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$f(e_i) = \begin{cases} 2n - i, & jika\ i\ ganjil \\ n - i, & jika\ i\ genap \end{cases}$$

Pertama akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif.

$$A = \{f(v_i) = 2i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$
$$B = \{f(e_i) = n - i \mid i\ genap\} = \{n-2, n-4, \dots, 1\}$$
$$C = \{f(e_i) = 2n - i \mid i\ ganjil\}$$
$$= \{2n-1, 2n-3, \dots, n\}$$

Sehingga

$$R_f = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$$
$$|R_f| = 2n \qquad \textbf{(*)}$$

Sedangkan,

$$D_f = V(C_n) \cup E(C_n)$$
$$|D_f| = |V(C_n)| + |E(C_n)| = 2n \qquad \textbf{(**)}$$

Dari **(*)** dan **(**)**, dapat disimpulkan bahwa f merupakan fungsi bijektif.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa konstanta ajaib di C_n adalah $3n + 1$.

Ditinjau dari 2 kasus, yaitu:

Kasus 1: $1 \leq i \leq n - 1$

$$f(v_i) = 2i$$

Sisi yang terkait di v_i adalah $e_i = v_i v_{i+1}$, dan $e_{i-1} = v_{i-1} v_i$

Terdapat 2 subkasus:

Subkasus 1.1: i ganjil

Maka diperoleh:

$$f(e_i) = 2n - i$$
$$f(e_{i-1}) = n - (i - 1)$$

Sehingga

$$k = f(v_i) + f(e_i) + f(e_{i-1})$$
$$= 3n + 1$$

Subkasus 1.2: i genap

Maka diperoleh:

$$f(e_i) = n - i$$
$$f(e_{i-1}) = 2n - (i - 1)$$

Sehingga

$$k = f(v_i) + f(e_i) + f(e_{i-1})$$
$$= 3n + 1$$

Kasus 2: $i = n$

Dalam hal ini,

$$f(v_i) = f(v_n) = 2n$$

Sisi C_n yang terkait di titik v_n adalah $e_n = v_n v_1$, dan $e_{n-1} = v_{n-1} v_n$.

Dikarenakan n ganjil, maka:

$$f(e_n) = 2n - n = n$$
$$f(e_{n-1}) = n - (n - 1) = 1$$

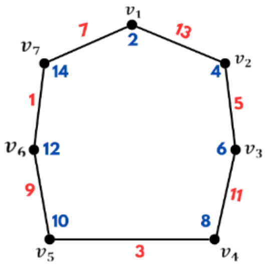
Sehingga

$$k = f(v_n) + f(e_n) + f(e_{n-1})$$

$$k \;= 3n + 1$$

Jadi, dapat disimpulkan setiap titik C_n memiliki total label yang sama yaitu $k = 3n + 1$. Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.2:
Sebagai ilustrasi untuk Teorema 3.3, diperoleh pelabelan total ajaib titik genap dari graf C_7 seperti pada Gambar 3.2.

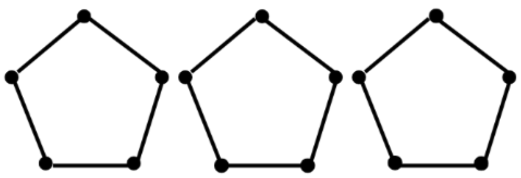


Gambar 3.2: Pelabelan Total Ajaib Titik Genap pada Graf C_7

Dalam hal ini, banyak titik C_7 adalah 7 (ganjil), dan tiap-tiap titiknya dilabel dengan bilangan genap, sedangkan sisinya dilabel dengan bilangan ganjil. Pelabelan total ajaib titik genap pada graf C_7 tersebut memiliki nilai $k = 22$. Ini berarti sudah sesuai dengan pembuktian Teorema 3.3, yaitu $k = 3n + 1 = 22$.

Misalkan C_n sikel dengan n titik $(n \geq 3)$. Graf yang didapat dari m jiplakan C_n yang saling lepas, dilambangkan dengan mC_n . Perhatikan bahwa untuk $m \geq 2$, maka mC_n adalah graf tak terhubung dengan m komponen, dan tiap-tiap komponen berupa C_n.

Contoh 3.3:



Gambar 3.3: Tiga jiplakan C_5 $(3C_5)$

Perhatikan graf $G = 3C_5$ pada Gambar 3.3, graf tersebut merupakan graf tak terhubung dengan 3 komponen, dan masing-masing komponen merupakan C_5.

Teorema 3.4:
Graf mC_n adalah graf total-ajaib titik genap jika dan hanya jika m ganjil dan n ganjil.

Bukti:
(⇒) Misalkan $G = mC_n$, dan k adalah konstanta ajaib, maka:

$$|V(G)| = mn$$
$$|E(G)| = mn$$

Berdasarkan Teorema 3.2, kemudian diperoleh

$$k = 3(mn) + 1 \qquad \textbf{(***)}$$

Misalkan sikel ke-i pada G dengan $1 \leq i \leq m$ adalah

$$C_n{}^{(i)} = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}, v_{i1})$$

Misalkan v_{ij} elemen $V(C_n{}^{(i)})$, $1 \leq j \leq n-1$. Maka sisi-sisi yang terkait dengan titik v_{ij} adalah $v_{ij}v_{ij+1}$ dan $v_{ij}v_{ij-1}$. Karena f adalah pelabelan total ajaib titik genap dengan konstanta ajaib k,

$$k = f(v_{ij}) + f(v_{ij}v_{ij+1}) + f(v_{ij}v_{ij-1})$$

dengan $f(v_{ij})$ genap, $f(v_{ij}v_{ij+1})$ ganjil, dan $f(v_{ij}v_{ij-1})$ ganjil, sehingga k genap. Dari **(***)** didapatkan bahwa $3(mn) + 1$ genap. Jadi, $3(mn)$ ganjil, sehingga m ganjil, dan n ganjil.

(⇐) Misalkan m ganjil, dan n ganjil, untuk $1 \leq i \leq m$

$$v_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$$
$$e_i = \{e_{ij} = v_{ij}v_{ij+1} \mid 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{e_{in} = v_{in}v_{i1}\}$$

Sehingga,

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{m} \{v_i\}$$
$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{m} \{e_i\}$$

Konstruksi pelabelan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2\,mn\}$
sedemikian hingga:

1) $f(v_{i1}) = 2i, \quad i = 1, 2, \dots, m$

2) $$f(v_{i2}) = \begin{cases} 4m - 4i + 2, & 1 \leq i \leq \frac{(m-1)}{2} \\ 6m - 4i + 2, & \frac{(m+1)}{2} \leq i \leq m \end{cases}$$

3) Untuk $j = 3, 4, 5, \dots, n$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} (2j-1)m + 2i + 1, & 1 \leq i \leq \dfrac{m-1}{2} \\ (2j-3)m + 2i + 1, & \dfrac{(m+1)}{2} \leq i \leq m \end{cases}$$

4) $$f(e_{i1}) = \begin{cases} 2mn + 2i - m, & 1 \leq i \leq \frac{(m-1)}{2} \\ 2mn - 3m + 2i, & \frac{(m+1)}{2} \leq i \leq m \end{cases}$$

5) Untuk $j = 2, 4, 6, \dots, n-1$

$$f(e_{ij}) = mn + 2i - 1 - (j+1)m, \quad 1 \leq i \leq m$$

6) Untuk $j = 3, 5, 7, \dots, n$

$$f(e_{ij}) = \begin{cases} 2mn - 4i + 1 - (j-1)m, & 1 \leq i \leq \dfrac{(m-1)}{2} \\ 2mn - 4i + 1 - (j-3)m, & \dfrac{(m+1)}{2} \leq i \leq m \end{cases}$$

Pertama akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif:
Berdasarkan rumus fungsi f di atas, maka diperoleh:

- Himpunan label titik-titik pada graf G adalah
$$A = \{2, 4, 6, \dots, 2mn\}$$
- Himpunan label sisi-sisi pada graf G adalah
$$B = \{1, 3, 5, \dots, 2mn - 1\}$$

sehingga $R_f = A \cup B$, dan $|R_f| = |A \cup B|$
$$= |A| + |B|$$
$$= 2mn \quad \text{(****)}$$

Selanjutnya, untuk $D_f = V(G) \cup E(G)$, maka:
$$|D_f| = |V(G) \cup E(G)|$$
$$= |V(G)| + |E(G)|$$
$$= mn + mn = 2mn \qquad \text{(*****)}$$

Dari **(****)** dan **(*****)** dapat disimpulkan bahwa f fungsi bijektif.
Selanjutnya, ditunjukkan bahwa konstanta ajaib di G adalah $3mn + 1$.
Ditinjau dari 3 kasus, yaitu:

Kasus 1: $3 \le j \le n$

Subkasus 1.1: untuk $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$

Maka diperoleh:
$$k = f(v_{ij}) + f(e_{ij-1}) + f(e_{ij})$$
$$= 3mn + 1$$

Subkasus 1.2: untuk $\frac{m+1}{2} \le i \le m$

Maka diperoleh:
$$k = f(v_{ij}) + f(e_{ij-1}) + f(e_{ij})$$
$$= 3mn + 1$$

Kasus 2: $j = 1$

Subkasus 2.1: untuk $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$

Maka diperoleh:
$$k = f(v_{i1}) + f(e_{in}) + f(e_{i1})$$
$$= 3mn + 1$$

Subkasus 2.2: untuk $\frac{m+1}{2} \le i \le m$

Maka diperoleh:
$$k = f(v_{i1}) + f(e_{in}) + f(e_{i1})$$
$$= 3mn + 1$$

Kasus 3: $j = 2$

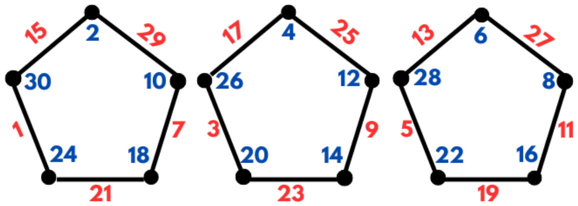
Subkasus 3.1: untuk $1 \le i \le \frac{m-1}{2}$
$$k = f(v_{i2}) + f(e_{i1}) + f(e_{i2})$$
$$= 3mn + 1$$

Subkasus 3.2: untuk $\frac{m+1}{2} \le i \le m$

Maka diperoleh:
$$k = f(v_{i2}) + f(e_{i1}) + f(e_{i2})$$
$$= 3mn + 1$$

Jadi, dapat disimpulkan setiap titik G memiliki total label yang sama yaitu $k = 3(mn) + 1$.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.4:
Sebagai ilustrasi dari Teorema 3.4, diperoleh pelabelan total ajaib titik genap dari graf $3C_5$ seperti pada Gambar 3.4.

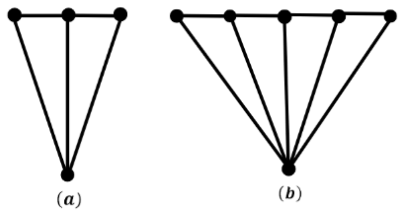


Gambar 3.4: Pelabelan Total Ajaib Titik Genap pada Graf $3C_5$

Dalam hal ini, $m = 3$, dan $n = 5$. Tiap-tiap titik dari Graf $3C_5$ dilabel dengan bilangan genap, sedangkan sisinya dilabel dengan bilangan ganjil. Pelabelan total ajaib titik genap pada Graf $3C_5$ tersebut memiliki nilai $k = 46$. Ini berarti sudah sesuai dengan pembuktian Teorema 3.4, yaitu $k = 3(mn) + 1 = 46$.

Definisi 3.2:
Jika terdapat P_n dan K_1 adalah graf komplet dengan 1 titik, maka graf kipas F_n didefinisikan sebagai berikut:
$$F_n = K_1 + P_n$$
Perhatikan $|V(F_n)| = n + 1$, dan $|E(F_n)| = 2n - 1$.

Contoh 3.5:
F_3 dan F_5 dapat terlihat seperti gambar berikut:



Gambar 3.5: (a) Graf F_3; (b) Graf F_5

Teorema 3.5:
Graf kipas F_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika $n = 2$

Bukti:
$(\Rightarrow)$ Misalkan f adalah pelabelan total ajaib titik genap pada F_n dengan konstanta ajaib k . Karena $|V(F_n)| = n + 1$, dan $|E(F_n)| = 2n - 1$, maka berdasarkan Teorema 3.2,

$$k = \frac{8n^2 - 2}{n+1}$$

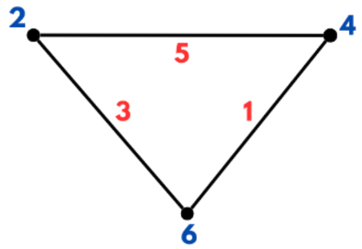
Dikarenakan k haruslah berupa bilangan bulat positif, ini akan terjadi jika:

Kasus 1: $n = 1$

Maka F_1 isomorfik dengan K_2 , dan peta $f\big(V(F_1) \cup E(F_1)\big) = \{1, 2, 3\}$. Sehingga tidak mungkin kedua titik di F_1 berlabel genap.

Kasus 2: $n = 2$

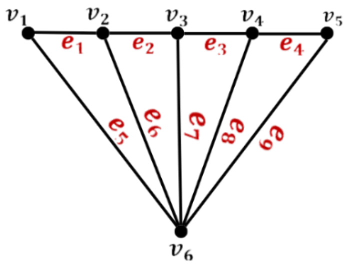
Maka pelabelan total ajaib titik genap pada graf F_2 tampak seperti Gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.6: Pelabelan Total Ajaib Titik Genap pada Graf F_2.

Kasus 3: $n = 5$

Graf F_5 dapat dilihat seperti Gambar 3.7 berikut:



Gambar 3.7: Graf F_5

Untuk $n = 5$, maka $k = 33$, karena f merupakan pelabelan total ajaib-titik genap,

$$f\big(V(F_5)\big) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$f\big(E(F_5)\big) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15\}$$

Dari himpunan fungsi f tersebut berarti ada sisi dari F_5 yang mendapat label 14.

- Andaikan $f(e_i) = 14$, dengan $i \in \{1,2,3\}$, maka

  $$k = f(v_{i+1}) + f(e_i) + f(e_{i+1}) + f(e_{i+5}).$$

  $f(v_{i+1})$ genap, $f(e_i)$ genap, $f(e_{i+1})$ ganjil, $f(e_{i+5})$ ganjil, sehingga k genap. **Kontradiksi,** karena $k = 33$.
- Jika $f(e_4) = 14$, maka $k = f(v_4) + f(e_3) + f(e_4) + f(e_8)$

  $f(v_4)$ genap, $f(e_3)$ ganjil, $f(e_4)$ genap, $f(e_8)$ ganjil, sehingga k genap. **Kontradiksi**, karena $k = 33$.
- Misalkan $f(e_i) = 14$, dengan $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, maka:

  $$k = f(v_6) + \sum_{i=5}^{9} f(e_i)$$

  $f(v_6)$ genap dan $\sum_{i=5}^{9} f(e_i)$ juga genap, sehingga k genap. **Kontradiksi**, karena $k = 33$.

Maka, untuk $n = 5$, graf Kipas F_5 bukan graf total ajaib titik genap.

($\Leftarrow$) Jika $n = 2$, maka pelabelan total ajaib titik pada graf F_2 bisa dilihat pada Gambar 3.6. Pada gambar tersebut, graf F_2 memiliki nilai

$$k = \frac{8n^2 - 2}{n+1} = 10$$

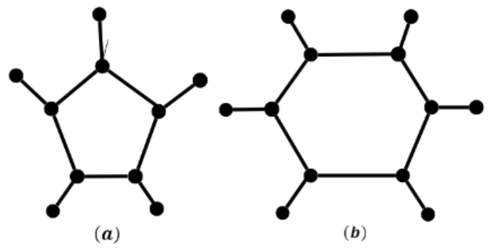
Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ∎

Definisi 3.3:

Graf Matahari M_n dibentuk dari satu sikel dengan n titik (C_n) dan menambahkan sisi *pendant* di setiap titik C_n. Perhatikanlah bahwa banyaknya titik graf M_n adalah $2n$, dan banyaknya sisi M_n adalah $2n$. Selanjutnya, himpunan titik-titik M_n pada C_n adalah $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, dan himpunan titik *pendant* yang berhubungan dengan v_i dilambangkan dengan $u_i, 1 \le i \le n$.

Contoh 3.6:

Graf Matahari M_5 dan M_6 dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.8: (a) Graf M_5; (b) Graf M_6

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa graf Matahari M_n adalah graf total ajaib titik genap.

Teorema 3.6:

Jika $n \ge 3$, maka graf Matahari M_n adalah graf total ajaib titik genap.

Bukti:

Karena $|V(M_n)| = 2n$, dan $|E(M_n)| = 2n$, maka berdasarkan Teorema 3.2, $k = 6n + 1$

Konstruksi pelabelan $f : V(M_n) \cup E(M_n) \to \{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$

Sedemikian hingga,

1) $f(v_i) = 2i, \quad 1 \le i \le n$
2) $f(u_i) = \begin{cases} 2n+2, & i = 1 \\ 4n-2i+4, & 2 \le i \le n \end{cases}$
3) $f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 2n-2i+1, & 1 \le i < n \\ 1, & i = n \end{cases}$

   Catatan: Indeks diambil modulo n
4) $f(v_i u_i) = \begin{cases} 4n-1, & i = 1 \\ 2n+2i-3 & 2 \le i \le n \end{cases}$

Pertama akan ditunjukkan bahwa fungsi f merupakan fungsi bijektif:

Berdasarkan rumus fungsi f di atas, kemudian diperoleh:

- Himpunan label titik-titik pada graf M_n adalah
$$A = \{2, 4, 6, \dots, 4n\}$$
- Himpunan label sisi-sisi pada graf M_n adalah
$$B = \{1, 3, 5, \dots, 4n-1\}$$

Sehingga $R_f = A \cup B$, dan $|R_f| = |A \cup B|$
$$= |A| + |B|$$
$$= 4n \qquad \text{(******)}$$

Selanjutnya, untuk $D_f = V(G) \cup E(G)$, sehingga
$$|D_f| = |V(M_n) \cup E(M_n)|$$
$$= |V(M_n)| + |E(M_n)|$$
$$= 2n + 2n = 4n \qquad \text{(*******)}$$

Dari **(******)** dan **(*******)** dapat disimpulkan bahwa Selanjutnya, ditunjukkan bahwa konstanta ajaib di M_n adalah $6n+1$.

Ditinjau 3 kasus, yaitu:

Kasus 1: $2 \le i \le n-1$

Total label di titik v_i, diperoleh:
$$k = f(v_i) + f(v_i u_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_i v_{i-1})$$
$$= 6n+1$$

Total label di titik u_i, diperoleh:
$$k = f(u_i) + f(v_i u_i)$$
$$= 6n+1$$

Kasus 2: $i = 1$

Total label di titik v_1, diperoleh:
$$k = f(v_1) + f(v_1 u_1) + f(v_1 v_2) + f(v_1 v_n)$$
$$= 6n+1$$

Total label di titik u_1, diperoleh:
$$k = f(u_1) + f(v_1 u_1)$$
$$= 6n+1$$

Kasus 3: $i = n$

Total label di titik v_n, diperoleh:
$$k = f(v_n) + f(v_n u_n) + f(v_n v_1) + f(v_n v_{n-1})$$
$$= 6n+1$$

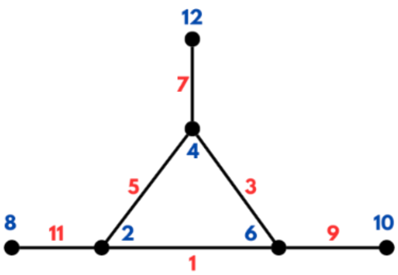
Total label di titik u_n, diperoleh:
$$k = f(u_n) + f(v_n u_n)$$
$$= 6n+1$$

Jadi, dapat disimpulkan setiap titik M_n memiliki total label yang sama yaitu
$k = 6n+1$.

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.7:

Sebagai ilustrasi untuk Teorema 3.6, diperoleh pelabelan total ajaib titik genap dari graf M_3 seperti pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9: Pelabelan Total Ajaib Titik Genap pada Graf M_3

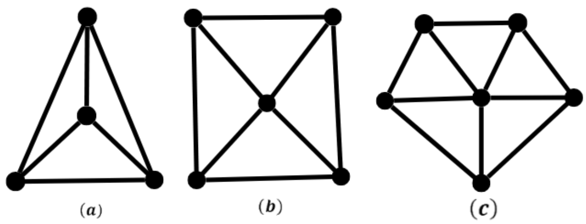
Dalam hal ini, $n = 3$. Tiap-tiap titik dari graf M_3 dilabel dengan bilangan genap, sedangkan sisinya dilabel dengan bilangan ganjil. Pelabelan total ajaib titik genap pada Graf M_3 tersebut memiliki nilai $k = 19$. Ini berarti sudah sesuai dengan pembuktian Teorema 3.6, yaitu $k = 6n + 1 = 19$.

Definisi 3.4:

Graf roda (W_n) adalah graf yang dibentuk dari sikel dengan $n \ge 3$ dan titik di luar C_n (K_1) dengan menghubungkan titik tersebut ke setiap titik C_n dengan sisi. Jadi, bisa dinotasikan:
$$W_n = C_n + K_1$$
Jelas bahwa, banyaknya titik dari graf roda (W_n) adalah $n+1$, dan banyak sisinya adalah $2n$.

Contoh 3.8:

Graf roda W_3, W_4, dan W_5 dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.10: (a) Graf W_3; (b) Graf W_4; (c) Graf W_5

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa graf roda (W_n) bukan graf total ajaib titik genap.

Teorema 3.7:
Graf roda (W_n) dengan $n \geq 3$ bukan graf total ajaib titik genap.

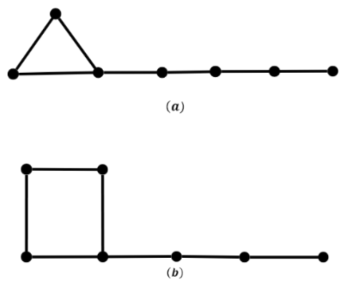
Bukti:
Andaikan ada pelabelan total ajaib titik genap pada graf roda W_n dengan konstanta ajaib k. Karena banyak titik W_n adalah $n+1$, dan banyak sisi dari W_n adalah $2n$. Maka berdasarkan Teorema 3.2

$$k = \frac{(2n)^2 + 2\,(2n)\,(n+1) + 2n}{n+1}$$
$$= \frac{8n^2 + 6n}{n+1}$$

Perhatikan bahwa k itu bukan bilangan bulat, kecuali untuk $n = 1$. Hal tersebut bersifat kontradiksi. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Definisi 3.5:
Graf layang-layang $(L_{(n,t)})$ adalah graf yang dibentuk dari sikel C_n dan lintasan P_t untuk $t \geq 1$ dengan menghimpitkan salah satu titik ujung lintasan dengan titik C_n . Perhatikan bahwa banyaknya titik graf layang-layang $(L_{(n,t)})$ adalah $n+t$, dan banyaknya sisinya juga $n+t$.

Contoh 3.9:
Graf layang-layang $(L_{(3,4)})$, $(L_{(4,3)})$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.11: (a) Graf $(L_{(3,4)})$; (b) Graf $(L_{(4,3)})$

Teorema 3.8:
Graf layang-layang $(L_{(n,t)})$ bukan graf total ajaib titik genap.

Bukti:
Andaikan graf $(L_{(n,t)})$ merupakan graf total ajaib-titik genap. Misalkan f adalah pelabelan total ajaib-titik genap dengan konstanta ajaib adalah k . Dikarenakan banyak titik dari $L_{(n,t)}$ adalah $n+t$, demikian juga banyak sisi $L_{(n,t)}$ adalah $n+t$. Maka berdasarkan Teorema 3.2,

$$k = \frac{(n+t)^2 + 2\,(n+t)\,(n+t) + (n+t)}{n+t}$$
$$= 3n + 3t + 1$$

Misalkan $C_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$ adalah sikel yang terdapat pada $L_{(n,t)}$ dan $P = (u_0, u_1, u_{2,} \dots, u_t)$ adalah ekor dari $L_{(n,t)}$, sedemikian hingga u_0 berhimpit dengan v_0.
Akan ditinjau dari 4 kasus:
Kasus 1: n genap, t genap
Maka $k = 3n + 3t + 1$ adalah ganjil. Selanjutnya, $\forall i,\ 1 \leq i \leq n-1$ diperoleh:

$$k = f(v_i) + f(v_i v_{i-1}) + f(v_i v_{i+1})$$

Karena $f(v_i)$ genap, $f(v_i v_{i-1})$ ganjil, dan $f(v_i v_{i+1})$ ganjil maka k bilangan genap. Hal tersebut bersifat **kontradiksi.**
Catatan: Indeks diambil modulo $n-1$.
Kasus 2: n genap, t ganjil
Maka $k = 3n + 3t + 1$ adalah bilangan bilangan genap. Perhatikan bahwa total label di titik u_t adalah

$$k = f(u_t) + f(u_t u_{t-1})$$

Karena $f(u_t)$ genap dan $f(u_t u_{t-1})$ ganjil, akibatnya k bilangan ganjil. Hal tersebut bersifat **kontradiksi.**
Kasus 3: n ganjil, t genap
Maka $k = 3n + 3t + 1$ adalah bilangan bilangan genap. Perhatikan bahwa total label di titik u_t adalah

$$k = f(u_t) + f(u_t u_{t-1})$$

Karena $f(u_t)$ genap dan $f(u_t u_{t-1})$ ganjil, maka k bilangan ganjil. Hal tersebut bersifat **kontradiksi.**
Kasus 4: n ganjil, t ganjil
Maka $k = 3n + 3t + 1$ adalah bilangan bilangan ganjil. Total label di titik v_1 adalah

$$k = f(v_1) + f(v_1 v_0) + f(v_1 v_2)$$

Karena $f(v_1)$ bilangan genap, $f(v_1 v_0)$ bilangan ganjil, dan $f(v_1 v_2)$ bilangan ganjil, maka k bilangan genap. Hal tersebut bersifat **kontradiksi.**
Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Teorema 3.9:
Jika $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$, maka graf komplet (K_n) bukan graf total ajaib-titik genap.

Bukti:
Andaikan untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$, K_n merupakan graf total ajaib-titik genap. Dikarenakan $|V(K_n)| = n$, dan $|E(K_n)| = \frac{n\,(n-1)}{2}$, maka berdasarkan Teorema 3.2

$$k = \frac{(\frac{n(n-1)}{2})^2 + 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)n + \frac{n(n-1)}{2})}{n}$$
$$= \frac{(n-1)\,(n+1)\,(n+2)}{4}$$

Jika $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$, maka k bukan bilangan bulat. Sehingga diperoleh suatu kontradiksi. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, terdapat beberapa kesimpulan, yaitu antara lain:

1) Pelabelan total ajaib titik pada G adalah fungsi bijektif
$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+n\}$$
sedemikian hingga $\forall v \in V(G)$, $f(v) + \sum_{x \in N(v)} f(vx) = k$, untuk suatu konstanta k. Pelabelan total ajaib titik f dikatakan genap jika $f(v)$ genap, untuk setiap $v \in V(G)$, serta memenuhi syarat perlu $m \geq n$.
2) Jika G graf dengan n titik dan m sisi, serta f merupakan pelabelan total ajaib titik pada G dengan konstanta ajaib k, maka
$$kn = S_n + 2S_m$$
dengan $S_n =$ total label semua titik G, dan $S_m =$ total label semua sisi G.
3) Jika G graf dengan n titik, m sisi, dan mempunyai pelabelan total ajaib titik genap dengan konstanta ajaibnya yaitu k, maka berlaku:
$$k = \frac{m^2 + 2mn + m}{n}$$
4) Sikel C_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika n ganjil.
5) Graf mC_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika m ganjil dan n ganjil.
6) Graf kipas F_n adalah graf total ajaib titik genap jika dan hanya jika $n = 2$
7) Jika $n \geq 3$, maka graf matahari M_n adalah graf total ajaib titik genap.
8) Graf roda (W_n) dengan $n \geq 3$ bukan graf total ajaib titik genap.
9) Graf layang-layang $(L_{(n,t)})$ bukan graf total ajaib titik genap.
10) Jika $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$, maka graf komplet (K_n) bukan graf total ajaib titik genap.

SARAN

Pada pembahasan artikel ini, penulis hanya membahas beberapa graf saja, yaitu sikel C_n, graf mC_n, graf kipas (F_n), graf matahari (S_n), graf roda (W_n), graf layang-layang $\left(L_{(n,t)}\right)$, serta graf komplet (K_n). Harapan dari penulis sendiri, pembaca dapat mengkonstruksikan pelabelan total ajaib titik genap pada kelas-kelas graf lain yang belum dibahas.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Buhaerah, Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Makassar: Living Spiritual Quotient.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1986). *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: a Division of Wadsworth, Inc.

Faizah, & Narwen. (2016). Karakterisasi Graf Pohon dengan Bilangan Kromatik Lokasi 3. *Jurnal Matematika UNAND, 5*(2), 71-77. doi:https://doi.org/10.25077/jmu.5.2.71-77.2016

Irawati, N., & Heri, R. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph Kn dengan n Ganjil. *Jurnal Matematika*, 136-142.

Irawati, N., & Heri, R. (2011). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph Kn dengan n Genap. *Seminar Nasional Teknologi Informasi & Komunikasi Terapan*.

Maharani, M., & Budayasa, I. K. (2021). Pelabelan Total Ajaib Titik Berlabel Ganjil pada Graf Pohon. *Math Unesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 171-179.

Nagaraj, C., Ganesan, P., & Ponnappan, C. (2017). Even Vertex Magic Total Labeling. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 363-375.

Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Malang: Rumpun Dua Belas (R12 Grup).