MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 12 *No* 03
Tahun 2024

PEWARNAAN MODULAR PADA BEBERAPA KELAS GRAF POHON

Panji Gesang Pamungkas
Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : panji.18033@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng
Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : budirahadjeng@ unesa.ac.id

Abstrak

Teori Graf merupakan cabang ilmu Matematika. Topik yang menarik dari teori graf adalah pewarnaan modular. Misalkan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v dan $\sigma(v)$ adalah jumlah label warna dengan $\sigma(v) = \sum u \in N(V)\ c(u)$. Pewarnaan modular graf G yaitu pemetaan $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ yang mana setiap titik bertetangga dapat berwarna sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ pada titik x, y yang bertetangga di G dengan $\sigma(v) = \sum_{u \in N(V)} c(u)$. Pewarnaan-$k$ modular G yaitu pewarnaan modular yang memakai k warna di G. Minimal k warna yang dipakai yaitu bilangan kromatik modular G atau $mc(G)$. Pembahasan ini akan meneliti tentang pewarnaan modular pada Graf Bintang Ganda ($S_{n,m}$), Graf Sapu (B_n), Graf Biner Lengkap ($T_{2,k}$), dan Graf Pohon Pisang ($Y_{n,m}$)

Kata Kunci: Graf Bintang Ganda, Graf Sapu, Graf Biner Lengkap, Graf Pohon Pisang, Pewarnaan Modular, Bilangan kromatik modular.

Abstract

Graph theory is a branch of Mathematics. An interesting topic of graph theory is modular coloring. Suppose $N(v)$ is the set of neighboring points with v and $\sigma(v)$ is the number of color labels with $\sigma(v) = \sum u \in N(V)\ c(u)$.The modular coloring of graph G is the mapping $c : V(G) \to Z\_k\ (k \geq 2)$ where each neighboring vertex can be the same color and $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ at neighboring x, y vertices in G with $\sigma(v) = \sum_{u \in N(V)} c(u)$. The G modular k staining is a modular coloring that uses k colors in G. At least the k colors used are the modular chromatic number G or $mc(G)$. This discussion will examine modular coloring on Multiple Star Graphs ($S_{n,m}$), Sweep Graphs (B_n), Complete Binary Graphs ($T_{2,k}$), and Banana Tree Graphs ($Y_{n,m}$)

Keywords: *Double Star Graph, Sweep Graph, Complee Binary Graph, Banana Tree Graph, Modular coloring, Modular chromatic number.*

PENDAHULUAN

Teori graf adalah bidang ilmu matematika yang mempelajari himpunan benda-benda yang disebut simpul yang dihubungkan oleh sisi. Grafis G memiliki dua himpunan. Pertama berhingga $V(G)$ yang tidak kosong, dan kedua berhingga $E(G)$ yang kemungkinan kosong. Setiap elemen e pada $E(G)$ adalah pasangan yang tidak berurutan dari titik pada $V(G)$ (Budayasa, 2007). Pewarnaan adalah salah satu cabang teori graf yang terus berkembang.

Terdapat tiga jenis pewarnaan graf: pewarnaan sisi, pewarnaan titik, dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan sisi memetakan sisi suatu graf dengan warna yang berbeda, sedangkan pewarnaan titik memetakan titik di sekitarnya dengan warna yang berbeda. Pewarnaan dapat menyelesaikan banyak masalah dalam kehidupan, seperti menjadwalkan dan mewarnai peta. Pewarnaan titik pada graf adalah masalah yang sering diperhatikan para peneliti tentang pewarnaan. Salah satu masalah dengan pewarnaan titik adalah pewarnaan modular.

Pewarnaan modular pada graf adalah pemetaan $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ memungkinkan setiap titik berdekatan memiliki warna yang sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ untuk titik x, y yang bertetangga di G. Dalam studi Okamoto, Salehi dan Zhang tentang tentang pewarnaan modular pada graf ulat mencapai beberapa hasil yang terkait dengan pewarnaan modular (Okamoto et al., 2009), kemudian Ajiji dan Rahadjeng melakukan penelitian tentang pewarnaan modular pada berbagai subkelas graf yaitu graf sikel, gear, persahabatan dan lintasan (Ajiji & Rahadjeng, 2020). Artikel ini akan mengkaji pewarnaan modular pada beberapa kelas graf pohon: sapu, biner lengkap, bintang ganda, dan pohon pisang.

KAJIAN TEORI

Definisi 1

Dua himpunan mengandung graf G: yang pertama berhingga $V(G)$ yang tidak kosong, dan yang kedua berhingga $E(G)$ yang kemungkinan kosong. Semua elemen e pada $E(G)$ adalah pasangan yang tidak berurutan dari titik pada $V(G)$.

(Budayasa, 2007).

Definisi 2

Pewarnaan-k pada garis G berarti memberi warna pada titik-titik dalam garis G menggunakan k warna sehingga titik-titik yang berdekatan dengan garis G memiliki warna berbeda. Misalnya, jika garis G memiliki pewarnaan-k, maka titik-titik dalam garis tersebut dapat diberi warna dengan k warna. Pewarnaan-k pada graf G menggunakan angka $1, 2, 3, \dots, k$ untuk melabeli titik-titiknya. Jumlah kromatik G, atau $X(G)$, dijelaskan sebagai berikut:

$$\chi(G) = min\{\ k | ada\ pewarnaan - k\ pada\ G\ \}.$$

(Budayasa, 2007)

Definisi 3

Graf pohon adalah graf yang terhubung tanpa memiliki sikel.

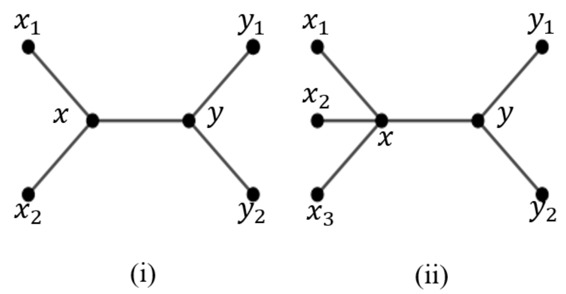
(Budayasa, 2007)

Definisi 4

Graf Bintang Ganda $S_{n,m}$ berisi dua titik pusat yang saling terhubung, yaitu x dan y, dengan x berderajat $n + 1$ dan y berderajat $m + 1$.

(Rohmatillah, 2018).

Contoh 2. 1:



Gambar 2. 1 *(i) Graf* $S_{2,2}$, *(ii) Graf* $S_{3,2}$

Definisi 5

Graf Lintasan P_n adalah graf yang hanya memiliki tpat satu lintasan dengan n titik.

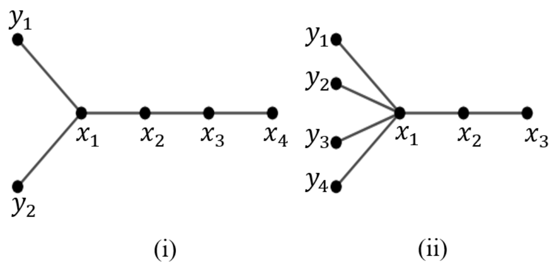
(Ajiji & Rahadjeng, 2020)

Definisi 6

Graf Sapu $B_{n,m}$ terdiri dari m titik yang hanya terhubung pada satu sisi dari graf lintasan P_n.

(Muzayyin, 2012)

Contoh 2. 2:



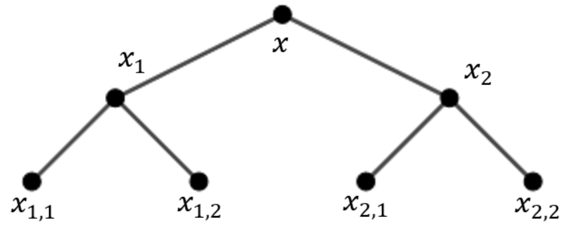
Gambar 2. 2 *(i) Graf* $S_{4,2}$, *(ii) Graf* $S_{3,4}$

Definisi 7

Graf Biner lengkap $T_{2,k}$ adalah graf pohon yang memiliki satu titik sebagai akar dengan kedalaman k, di mana semua titik memiliki 2 anak kecuali daunnya. Kedalaman dari $T_{2,k}$ yaitu panjang lintasan dari titik akar ke daunnya.

(Putri & Narwen, 2017)

Contoh 2. 3:



Gambar 2. 3 *Graf* $T_{2,2}$

Perhatikan **Gambar 2.3**, titik akar x berada pada level 0, titik x_1 dan x_2 berada pada level 1, titik $x_{1,2}, x_{1,2}, x_{2,1}$, dan $x_{2,2}$ berada pada level 2, sehingga **Gambar 2.4** merupakan graf binair lengkap dengan kedalamannya adalah 2 atau $T_{2,2}$.

Definisi 8

Dalam keluarga graf pohon, graf bintang Sn terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi. Sebuah graf bintang terdiri dari satu titik pusat yang terhubung dengan sejumlah n daun.

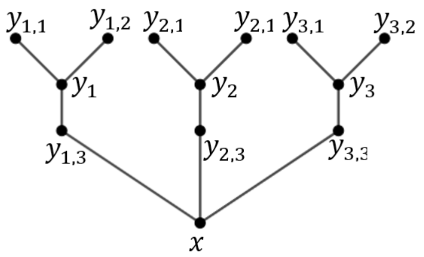
(Muzayyin, 2012)

Definisi 9

Graf pohon pisang $Y_{n,m}$ merupakan graf yang terbentuk dari n buah graf bintang S_m dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 3$, satu daun dari setiap graf bintang dihubungkan ke satu titik sebagai titik akar.

(Asmiati et al., 2011)

Contoh 2. 4:



Gambar 2. 4 *Graf pohon pisang $Y_{3,3}$*

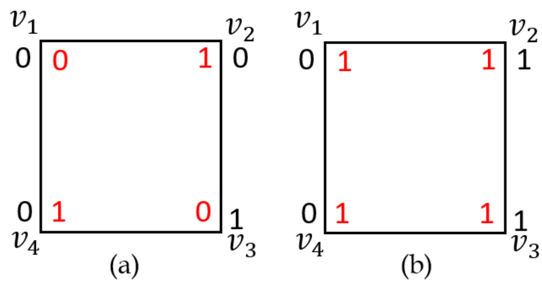
Perhatikan **Gambar 2.4**, titik x sebagai akar, $y1{,}3$, $y2{,}3$ dan $y3{,}3$ sebagai daun dari graf bintang yang terhubung dengan titik akar, $y1$,$y2$, dan $y3$ sebagai titik pusat dari graf bintang dan titik lainnya sebagai daun dari graf bintang.

Definisi 10

Misalkan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v. Pewarnaan modular dalam graf yaitu pemetaan $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k (k \geq 2)$ setiap titik yang bertetangga diberi warna yang sama dan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ untuk titik x, y yang bertetangga di G dan $\sigma(v)$ merupakan jumlah label warna pada titik v di G dengan $\sigma(v) = \sum_{u \in N(V)} c(u)$. Pewarnaan-$k$ modular G yaitu pewarnaan modular dengan menggunakan k warna di G.

(Okamoto et al., 2010)

Contoh 2. 5:



Gambar 2. 5 *(a) Pewarnaan-2 modular C_4*
(b) Bukan pewarnaan-2 modular C_4

Pewarnaan $c(v)$ dilabeli angka hitam dan jumlah label warna $\sigma(v)$ dilabeli angka merah.

Perhatikan graf pada Gambar 2.5 (a)
Misalkan $c : V(C_n) \to \mathbb{Z}_2$ menjadi pewarnaan titik pada C_4, ada titik-titik yang bertetangga yang memiliki $c(v)$ yang sama, misalkan titik v_1 dan v_2 memiliki $c(v)$ yang sama yaitu 0, sedangkan untuk jumlah label warna $\sigma(v)$, tidak ada 2 titik bertetangga yang memiliki $\sigma(v)$ yang sama. Karena pada gambar 2.5 (a) menunjukkan $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ dengan anggota $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, maka c adalah pewarnaan-2 modular pada C_4.

Sedangkan pada **Gambar 2.5 (b)**, semua titik memiliki jumlah label warna yang sama, yaitu $\sigma(v_i) = 1$ dimana $ii = 1,2,3,4$. Karena $\sigma(x) = \sigma(y)$ untuk titik x, y yang bertetangga, maka Gambar 2.5 (b) bukan pewarnaan-2 modular pada C_4.

Definisi 11

Bilangan kromatik modular dari graf G, bernotasikan $mc(G)$ merupakan minimum k warna di mana terdapat pewarnaan k modular di G.

(Okamoto et al., 2010)

Teorema 2.1

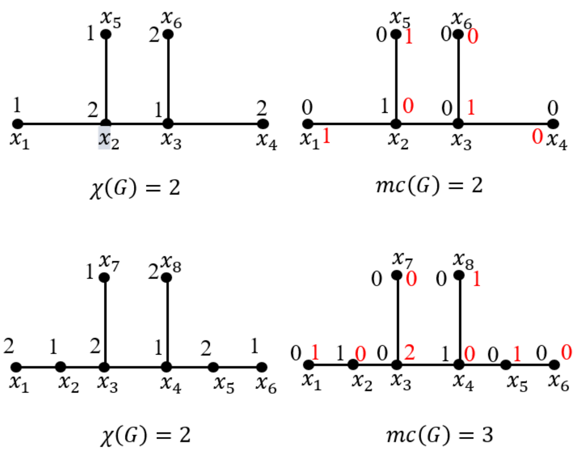
Untuk setiap graf terhubung nontrivial G, berlaku $mc(G) \geq \chi(G)$.

(Okamoto et al., 2009)

Bukti:

Jumlah kromatik pada graf G adalah jumlah warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di dalamnya sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang memiliki warna yang sama. Jumlah k warna yang diperlukan untuk pewarnaan modular sehingga titik-titik bertetangga dapat memiliki warna yang sama dikenal sebagai jumlah kromatik modular. Karena $\sigma(x) \in \mathbb{Z}_k$ dan $mc(G) = k$, dari definisi $\chi(G)$ diperoleh $mc(G) \geq \chi(G)$.

Contoh 2. 6:



Gambar 2. 6 *Graf G dengan* $mc(G) \geq \chi(G)$

Teorema 2.2

Setiap graf pohon nontrivial T memiliki bilangan kromatik 2 atau $\chi(T) = 2$.

(Okamoto et al., 2009)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam artikel ini, kami akan menyelidiki pewarnaan modular pada tiga jenis grafik: bintang ganda, sapu, binair lengkap, dan pohon pisang.

Teorema 3.1:

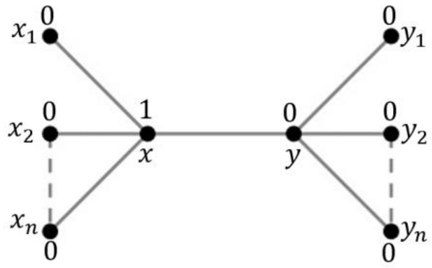
Misalkan $S_{n,m}$ adalah graf bintang ganda dengan $n, m \geq 2$. Maka $mc((S_{n,m}) = 2$.

Bukti:

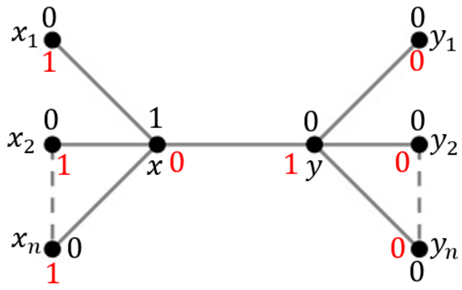
Misalkan x dan y titik pusat graf bintang ganda $S_{n,m}$ dengan x berderajat $n+1$ dan y berderajat $m+1$. Misalkan pula x_i adalah titik yang bertetangga dengan x dengan $i = 1,2,3,\dots,n$ dan y_j adalah titik yang bertetangga dengan y dengan $j = 1,2,3,\dots,m$. Definisikan pewarnaan $c: V(S_{n,m}) \to \mathbb{Z}_2$:

$$c(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = \text{salah satu titik pusat} \\ 0 \; ketika \; v = \text{selain titik pusat yang dipilih} \end{cases}$$

Misalkan titik pusat yang dipilih adalah x:



Karena $N(x) = \{y, x_1, x_2, .., x_n\}$, $\sigma(x) = 0$ diperoleh dari $c(y) + c(x_1) + c(x_2) + \dots + c(x_n)$, sedangkan $\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_n) = 1$ karena hanya bertetangga dengan x. Selanjutnya $N(y) = \{x, y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $\sigma(y) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(y_1) + c(y_2) + \dots + c(y_m)$, sedangkan $\sigma(y_1), \sigma(y_2), \dots, \sigma(y_m) = 0$ karena hanya bertetangga dengan y.

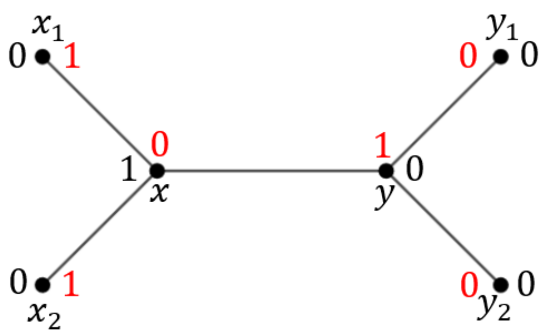


Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, maka c merupakan pewarnaan- 2 modular.

Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(S_{n,m}) \leq 2$.

Berdasarkan Teorema 2.1 dan Teorema 2.2, diperoleh $mc(S_{n,m}) \geq 2$, sehingga $mc(S_{n,m}) = 2$.

Contoh 3. 1:



Gambar 3. 1 *Pewarnaan-2 modular pada* $S_{2,2}$

Teorema 3.2

Misalkan $B_{n,m}$ adalah graf sapu dengan dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $mc(B_{n,m}) = 2$

Untuk Jika graf sapu $B_{n,m}$, maka $mc(B_{n,m}) = 2$

Bukti:

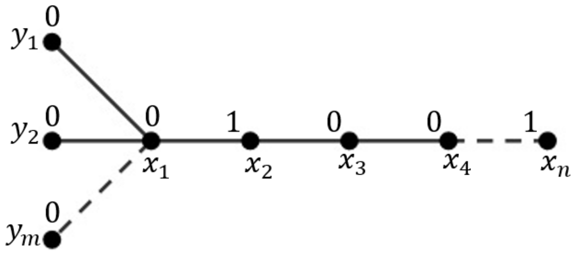
Misalkan $P_n = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan y_j untuk setiap $j = 1,2,3, \dots, m$ adalah titik yang bertetangga dengan salah satu titik ujung pada P_n, katakanlah x_1.

Ketika **n genap**:

Definisikan pewarnaan $c: V(B_{n,m}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$:

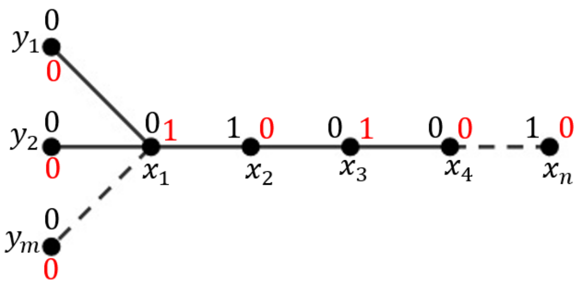
$$c(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \equiv 2 \; (mod \; 4) \\ 0 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \not\equiv 2 \; (mod \; 4) \\ 0 \; jika \; v = y_j \end{cases}$$

Misalkan:



Maka didapat

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \; ganjil \\ 0 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \; genap \\ 0 \; jika \; v = y_j \end{cases}$$

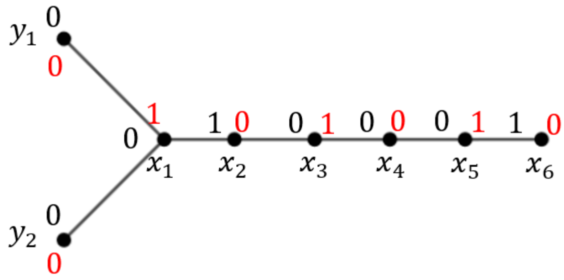


Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, maka c merupakan pewarnaan- 2 modular. Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(B_{n,m}) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 1 dan Observasi 2, diperoleh $mc(B_{n,m}) \geq 2$.

Sehingga $mc(B_{n,m}) = 2$.

Contoh 3. 2:



Gambar 3. 2 *Pewarnaan-2 modular pada* $B_{6,2}$

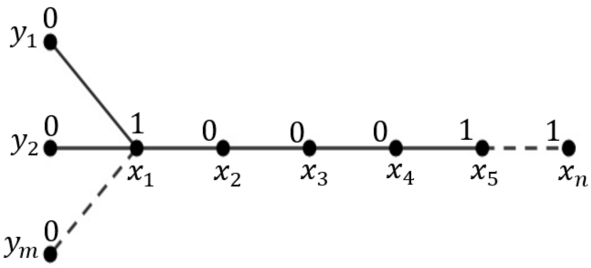
Untuk ***n ganjil*** terdapat 2 kasus

Ketika $\boldsymbol{n \equiv 1 \; (mod \; 4)}$

Definisikan pewarnaan $c: V(B_{n,m}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$:

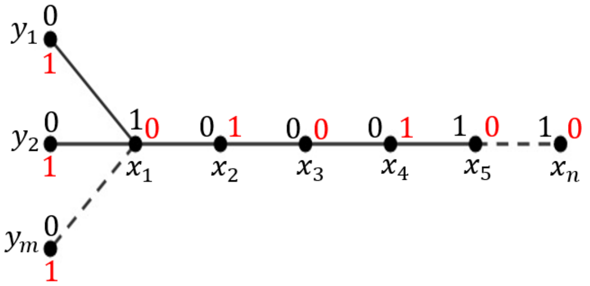
$$c(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \equiv 1 \; (mod \; 4) \\ 0 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; i \not\equiv 1 \; (mod \; 4) \\ 0 \; jika \; v = y_j \end{cases}$$

Misalkan:



Maka didapat

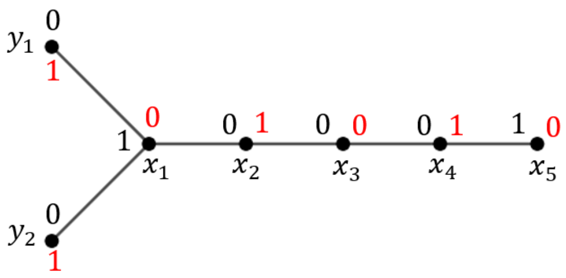
$$\sigma(v) = \begin{cases} 1 \; ketikav = x_i \; dimana \; i \; genap \\ 1 \; ketika \; v = y_j \\ 0 \; ketika \; v = x_i \; dimana \; ganjil \end{cases}$$



Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, sehingga c merupakan pewarnaan- 2 modular. Berdasarkan Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(B_{n,m}) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 1 dan Observasi 2, diperoleh $mc(B_{n,m}) \geq 2$.
Sehingga $mc(B_{n,m}) = 2$.

Contoh 3. 3:

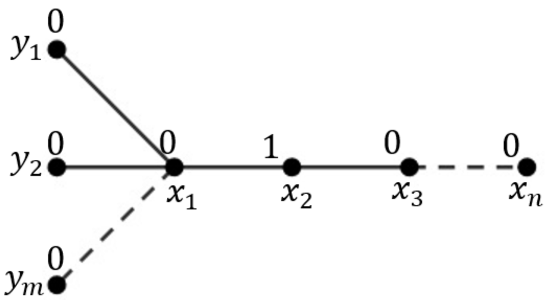


Gambar 3. 3 *Pewarnaan-2 modular pada* $B_{5,2}$.

Ketika $\boldsymbol{n \equiv 3\ (mod\ 4)}$
Definisikan pewarnaan $c: V(B_{n,m}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$:

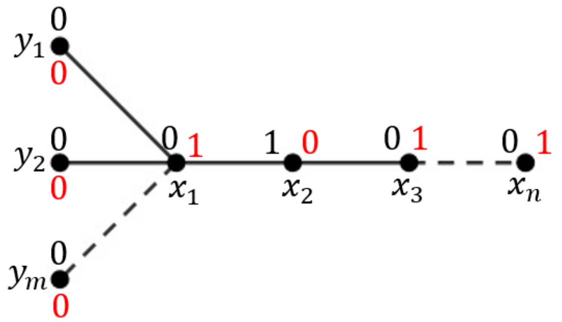
$$c(v) = \begin{cases} 1\ ketika\ v = x_i\ dimana\ i \equiv 2\ (mod\ 4) \\ 0\ ketika\ v = x_i\ dimana\ i \not\equiv 2\ (mod\ 4) \\ 0\ jika\ v = y_j \end{cases}$$

Misalkan:



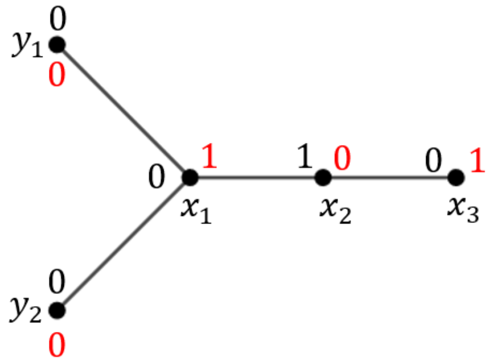
Maka didapat

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1\ ketika\ v = x_i\ dimana\ i\ ganjil \\ 0\ ketika\ v = x_i\ dimana\ i\ genap \\ 0\ jika\ v = y_j \end{cases}$$



Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, sehingga c merupakan pewarnaan- 2 modular. Berdasarkan Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(B_{n,m}) \leq 2$. Berdasarkan Observasi 1 dan Observasi 2, diperoleh $mc(B_{n,m}) \geq 2$, maka $mc(B_{n,m}) = 2$.

Contoh 3. 4:

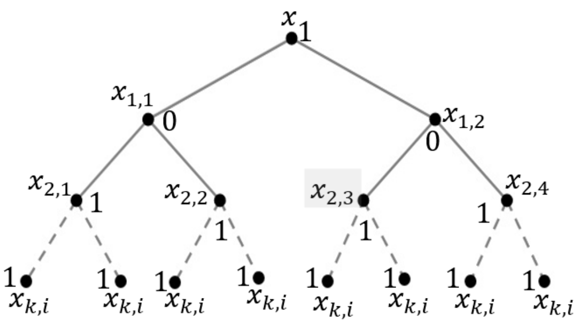


Gambar 3. 4 *Pewarnaan-2 modular pada* $B_{3,2}$.

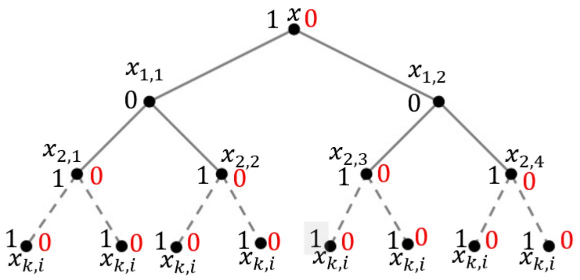
Teorema 3.3
Misalkan $T_{2,k}$ adalah graf biner lengkap, maka $mc(T_{2,k}) = 2$.
Bukti:
Misalkan x sebagai titik akar. Misalkan pula $X_{k,i}$ adalah himpunan semua titik pada kedalaman k dan $x_{k,i}$ adalah titik-titik yang lainnya di kedalaman k dan i adalah urutan dari titik disebelah kiri dimana i bilangan bulat positif dengan $x_{k,i} \in X_{k,i}$. Definisikan pewarnaan $c: V(T_{2,k}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

$$c(v) = \begin{cases} 1\ jika\ v = x\ atau\ v = x_{k,i}\ dimana\ k\ genap \\ 0\ jika\ v = x_{k,i}\ dengan\ k\ ganjil \end{cases}$$

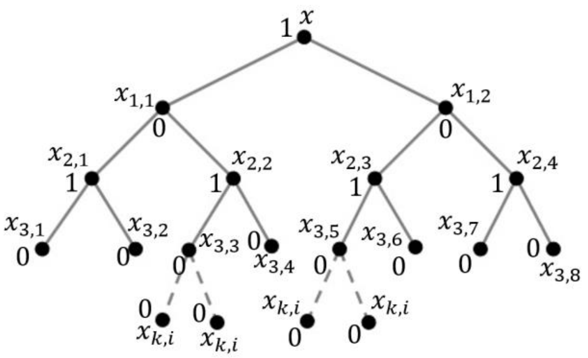
untuk k genap:



Untuk $N(x) = \{x_{1,i}\}$, maka $\sigma(x) = 0$ yang diperoleh dari $c(x_{1,i})$. Untuk $N(x_{1,i}) = \{x, x_{2,i}\}$ maka $\sigma(x_{1,i}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(x_{2,i})$ yaitu $1 + 1 + 1 = 1$. Untuk $N(x_{2,i}) = \{x_{1,i}, x_{2+1,i}\}$ maka $\sigma(x_{2,i}) = 0$ yang diperoleh dari $c(x_{1,i}) + c(x_{2+1,i})$ yaitu $0 + 0 = 0$. Untuk $N(x_{k,i}) = \{x_{k-1,i}, x_{k+1,i}\}$ dimana k genap, maka $\sigma(x_{k,i}) = 0$ yang diperoleh dari $c(x_{k-1,i}) + c(x_{k+1,i})$ yaitu $0 + 0 + 0 = 0$. Diperoleh:

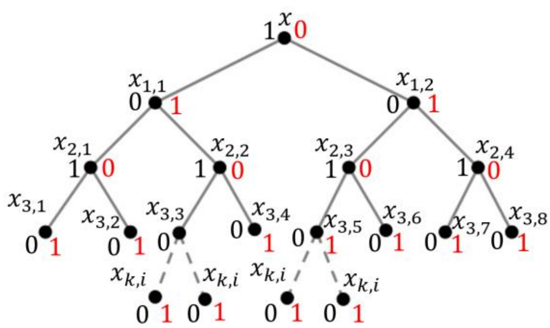


Untuk k ganjil:



Untuk $N(x) = \{x_{1,i}\}$, maka $\sigma(x) = 0$ yang diperoleh dari $c(x_{1,i})$. Untuk $N(x_{1,i}) = \{x, x_{2,i}\}$ maka $\sigma(x_{1,i}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(x_{2,i})$ yaitu $1 + 1 + 1 = 1$. Untuk $N(x_{2,i}) = \{x_{1,i}, x_{3,i}\}$ maka $\sigma(x_{2,i}) = 0$ yang diperoleh dari $c(x_{1,i}) + c(x_{3,i})$ yaitu $0 + 0 + 0 = 0$. Untuk $N(x_{3,i}) = \{x_{2,i}, x_{3+1,i}\}$ maka $\sigma(x_{3,i}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x_{2,i}) + c(x_{3+1,i})$ yaitu $1 + 1 + 1 = 0$. Untuk Untuk $N(x_{k,i}) = \{x_{k-1,i}, x_{k+1,i}\}$ dimana k ganjil, maka $\sigma(x_{k,i}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x_{k-1,i}) + c(x_{k+1,i})$ yaitu $1 + 1 + 1 = 0$.

Diperoleh:

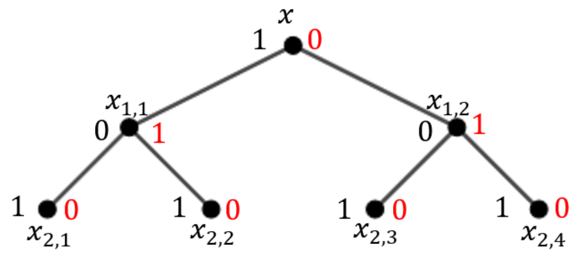


Dengan mempertimbangkan penjelasan tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$\sigma(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = x_{k,i} \; dengan \; k \; ganjil \\ 0 \; ketika \; v = x \\ 0 \; ketika \; v = x_{k,i} \; dengan \; k \; genap \end{cases}$$

Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, maka c merupakan pewarnaan- 2 modular.
Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(T_{2,k}) \leq 2$.
Berdasarkan Observasi 1 dan Observasi 2, diperoleh $mc(T_{2,k}) \geq 2$, sehingga $mc(T_{2,k}) = 2$.

Contoh 3. 5:

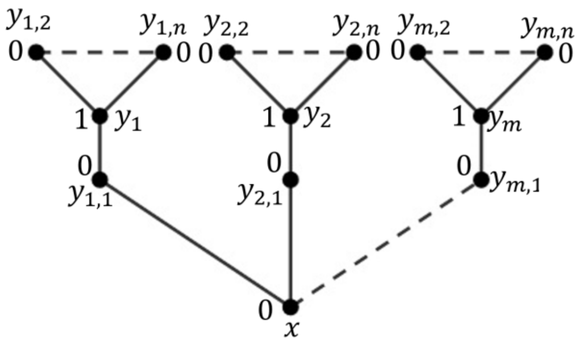


Gambar 3. 5 *Pewarnaan-2 modular pada* $T_{2,2}$

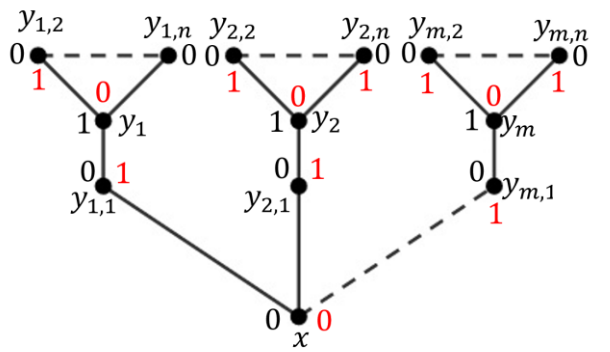
Teorema 3.4
Misalkan $Y_{n,m}$ adalah graf pohon pisang dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 3$, maka $mc(Y_{n,m}) = 2$.
Bukti:
Misalkan x adalah titik akar dari graf pohon pisang yang terhubung oleh satu daun dari graf bintang. Misalkan pula y_i adalah titik pusat dimana $i = 1,2,3, \dots, m$, $y_{i,j}$ sebagai daun dari graf bintang dengan $j = 1,2,3, \dots, n$. Definisikan pewarnaan $c: V(Y_{n,m}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$:

$$c(v) = \begin{cases} 1 \; ketika \; v = y_i \\ 0 \; jika \; v = x \; atau \; v = y_{i,j} \end{cases}$$

Misalkan:



Karena $N(x) = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \dots, y_{m,1}\}$, maka $\sigma(x) = 0$. Untuk $N(y_{1,1}) = \{x, y_1\}$, $\sigma(y_{1,1}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(y_1)$ yaitu $0 + 1 = 1$. Untuk $N(y_{2,1}) = \{x, y_2\}$, $\sigma(y_{2,1}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(y_2)$ yaitu $0 + 1 = 1$. Untuk $N(y_{m,1}) = \{x, y_m\}$, $\sigma(y_{m,1}) = 1$ yang diperoleh dari $c(x) + c(y_i)$ yaitu $0 + 1 = 1$. untuk $y_{i,j}$ yang lainnya memiliki $\sigma(y_{i,j}) = 1$. Untuk $N(y_i) = \{y_{i,j}\}$, maka $\sigma(y_i) = 0$.



Dari penjelasan tersebut dapat disimpulkan sebagai berikut:

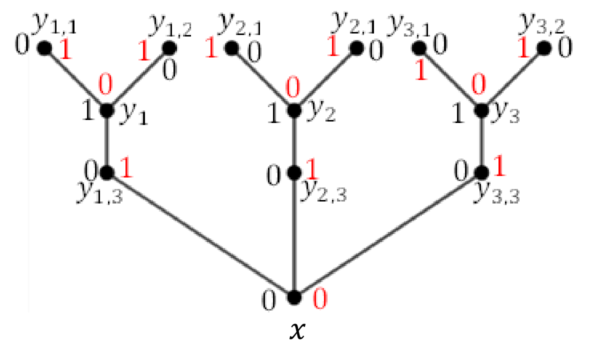
$$\sigma(v) = \begin{cases} 1 \ ketika \ v = x_{i,j} \\ 0 \ ketika \ v = x \ atau \ v = y_i \end{cases}$$

Karena untuk setiap pasangan x, y dimana x dan y bertetangga, $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ di $\mathbb{Z}_2$, maka c merupakan pewarnaan- 2 modular.

Berdasarkan Definisi 9, diperoleh $mc(Y_{n,m}) \leq 2$.

Berdasarkan Observasi 1 dan Observasi 2, diperoleh $mc(Y_{n,m}) \geq 2$, sehingga $mc(Y_{n,m}) = 2$.

Contoh 3. 6:



Gambar 3. 6 *Pewarnaan-2 modular pada* $Y_{3,3}$

PENUTUP

SIMPULAN

Hasil penelitian ini menghasilkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $S_{n,m}$ merupakan graf bintang ganda dengan $n, m \geq 2$, maka $mc(S_{n,m}) = 2$
2. Jika $B_{n,m}$ merupakan graf sapu dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $mc(B_{n,m}) = 2$
3. Jika $T_{n,k}$ merupakan graf binair lengkap, maka $mc(T_{n,k}) = 2$
4. Jika $V_{n,m}$ merupakan graf pohon pisang dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 3$, maka $mc(V_{n,m}) = 2$

SARAN

Artikel ini berfokus pada pewarnaan modular pada beberapa kelas graf pohon, yaitu graf bintang ganda, graf sapu, graf binair lengkap dan graf pohon pisang. Masih banyak graf-graf yang lainnya yang menarik untuk diteliti menggunakan pewarnaan modular. Untuk pembaca yang berminat tentang artikel ini dapat menjelaskan lebih rinci lagi atau mencoba meneliti pewarnaan modular dengan beberapa kelas graf yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ajiji, M. A., & Rahadjeng, B. (2020). Pewarnaan Modular Pada Beberapa Subkelas Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *8*(3), 261–268. https://doi.org/10.26740/mathunesa.v8n3.p261-268

Asmiati, Assiyatun, H., & Baskoro, E. T. (2011). Locating-chromatic number of amalgamation of stars. *ITB Journal of Science*, *43 A*(1), 1–8. https://doi.org/10.5614/itbj.sci.2011.43.1.1

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.

Muzayyin, A. (2012). *Pelabelan Graceful dan Pelabelan ρ̂ Pada Graf Pot Budan dan Graf Pohon Palem*.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2009). On modular colorings of caterpillars. *Congr. Numerantium*, *197*, 213–220.

Okamoto, F., Salehi, E., & Zhang, P. (2010). A checkerboard problem and modular colorings of graphs. *Bull. Inst. Comb. Appl.*, *58*(January 2010), 29–47.

Putri, A. D., & Narwen. (2017). Bilangan Kromatik Lokasi untuk GRAF Pohon n-ARY Lengkap. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(1), 90–96. https://doi.org/10.25077/jmu.9.2.70-75.2020