

**PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN TOKSOPLASMOSIS PADA MANUSIA DAN KUCING DENGAN ADANYA VAKSINASI KUCING****Irma Salsabilla Jayanti**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Semarang, Indonesia

e-mail: irmasalsabilla18@students.unnes.ac.id

**St. Budi Waluya**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Semarang, Semarang, Indonesia

\*e-mail: budiw@mail.unnes.ac.id

**Abstrak**

Toksoplasmosis merupakan salah satu infeksi yang disebabkan oleh parasit *Toxoplasma gondii* (*T. gondii*). Pada penelitian ini menyajikan model penyebaran Toksoplasmosis pada dua populasi yaitu populasi manusia dan kucing dengan adanya vaksinasi kucing. Penelitian dilakukan dengan membangun model matematika, menganalisis titik kesetimbangan, dan menginterpretasikan simulasi model matematika dengan software Maple. Berdasarkan model yang dibangun diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya, akan ditentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ). Hasil analisis menunjukkan titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil saat  $R_0 > 1$  sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ . Model matematika penyebaran Toksoplasmosis disimulasikan dengan software Maple sehingga menghasilkan bahwa adanya vaksinasi kucing memiliki pengaruh dalam penyebaran Toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing.

**Kata Kunci:** Analisis Kestabilan, Model Matematika, Toksoplasmosis, Simulasi Numerik, Vaksinasi.

**Abstract**

*Toxoplasmosis is an infection caused by the parasite *Toxoplasma gondii* (*T. gondii*). This study presents a mathematical model to investigate the transmission dynamics of toxoplasmosis in two populations: humans and cats. The model incorporates cat vaccination as an intervention strategy to reduce the spread of the disease. The study involves constructing a mathematical model, analyzing its equilibrium points, and interpreting the model's numerical simulations using Maple software. The model reveals two equilibrium points: a disease-free equilibrium and an endemic equilibrium. The basic reproduction number ( $R_0$ ) is determined, representing the average number of new infections caused by one infected individual. The analysis demonstrates that the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when  $R_0 < 1$  and unstable when  $R_0 > 1$ . On the other hand, the endemic equilibrium is locally asymptotically stable when  $R_0 > 1$ . Numerical simulations performed with Maple software illustrate that cat vaccination significantly impacts the prevalence of toxoplasmosis in both human and cat populations.*

**Keywords:** Stability Analysis, Mathematical Models, Toxoplasmosis, Numerical Simulation, Vaccination.

**PENDAHULUAN**

Toksoplasmosis merupakan salah satu infeksi yang disebabkan oleh parasit *Toxoplasma gondii* (*T. gondii*). Daur hidup *T. gondii* terdiri dari famili felidae seperti kucing sebagai inang definitif (the definitive host) yang merupakan tempat parasit tumbuh sedangkan manusia atau hewan berdarah panas sebagai inang perantara (intermediate host) (Dubey 2022). Kucing dapat terinfeksi oleh *T. gondii* dengan mengonsumsi makanan, hewan penggerat atau benda yang terkontaminasi oleh parasit sedangkan infeksi pada manusia umumnya terjadi melalui konsumsi

daging kurang matang atau makanan yang mengandung sista *T. gondii* dan *T. gondii* pada kotoran (feses) kucing yang disebut dengan ookista (Dalimi dan Abdoli 2012).

Kasus pertama Toksoplasmosis yaitu pada tahun 1908 di Afrika Utara peneliti bernama Nicolle dan Mancaeu menumukkan parasit yang hidup di limfa dan hati binatang penggerat, parasit tersebut dikenal dengan nama gundi atau gondii (*Ctenodactylus gondii*) (Pereira, Franco, dan Leal 2010). Penyakit Toksoplasmosis ini telah tersebar di seluruh penjuru dunia, termasuk Indonesia dengan prevalensi yang

berbeda. Diperkirakan 11% penduduk usia di atas 6 tahun di Amerika Serikat telah terinfeksi Toksoplasma. Di berbagai tempat di dunia, terbukti lebih dari 60% populasi tertentu telah terinfeksi Toksoplasma. Infeksi seringkali paling tinggi terjadi di wilayah yang beriklim panas, lembap, dan dataran rendah, karena ookista dapat bertahan hidup lebih baik di lingkungan tersebut (CDC 2018). Selanjutnya, di Indonesia penyakit ini telah dilaporkan dengan angka individu yang positif terinfeksi penyakit ini mulai dari 3,1% hingga 64% (Subrata dkk. 2021).

Sebagian besar infeksi *T. gondii* pada manusia dan kucing tidak menunjukkan gejala, tetapi beberapa kasus infeksi dapat menimbulkan gejala klinis yang parah pada manusia dan dapat berakibat fatal apabila memiliki sistem imun yang lemah. Infeksi pada manusia dapat terjadi ketika di dalam rahim maupun setelah lahir dan dapat menyebabkan kematian janin seperti Toksoplasmosis kongenital yang terjadi pada janin terinfeksi *T. gondii* yang ditularkan dari ibunya yaitu ensefalitis toksoplasma dan Toksoplasmosis okular (Montoya dan Liesenfeld 2004). Kasus Toksoplasmosis pada kucing juga umumnya jarang disertai timbulnya gejala klinis atau hanya menimbulkan sedikit gejala klinis meskipun kucing tersebut terinfeksi oleh ookista yang jumlahnya berjuta-juta (Nurcahyo & Priyowidodo, 2019).

Banyak penelitian terkait epidemi Toksoplasmosis di bidang pemodelan matematika yang telah dilakukan dan akan terus dikembangkan. Peneliti di negara lain sangat aktif melakukan penelitian-penelitian mengenai epidemi Toksoplasmosis dengan berbagai sudut pandang dan permasalahan yang terjadi di masyarakat. Hal ini dikarenakan Toksoplasmosis merupakan penyakit yang dapat menimbulkan kerugian sangat besar bagi lingkungan hidup, baik manusia maupun hewan.

Penelitian tentang Toksoplasmosis diantaranya dilakukan oleh Aranda dkk. (2008) mengkaji model matematika penyebaran penyakit Toksoplasmosis pada populasi manusia dengan model epidemi SIC. Model tersebut membahas penularan secara vertikal pada populasi manusia. G. C. González-Parra dkk. (2009) menganalisis model dinamika epidemi penyakit Toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing. Laju kelahiran pada kedua populasi diasumsikan sama dengan laju kematianya. Yongzhen dkk. (2018) mengembangkan model

matematika yang telah dibahas oleh G. C. González-Parra dkk. (2009). Perbedaan penelitian tersebut dengan sebelumnya yakni mempertimbangkan laju kelahiran dan kematian. Asumsi yang digunakan yaitu dalam populasi manusia, bayi yang terlahir dari ibu yang terinfeksi memiliki probabilitas terlahir tanpa Toksoplasmosis dan pertumbuhan populasi kucing tidak dipertimbangkan. Bonačić Marinović dkk. (2020) mengkonstruksi model untuk mengukur efek penggunaan vaksinasi kucing dalam mengurangi infeksi *T. gondii* pada manusia. Dalam penelitian ini digunakan model kompartemen dinamika penyakit untuk infeksi *T. gondii* yang terjadi pada kucing dan tikus. Muhammad & Usaini (2021) mengembangkan model dinamika penyebaran Toksoplasmosis pada populasi kucing dengan adanya vaksinasi. Rusdiani dkk. (2022) mengembangkan model penyakit Toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing yang telah dikembangkan oleh Yongzhen dkk. (2018) dengan memisahkan model menjadi dua. Asumsi yang digunakan model I dalam penilitian ini yaitu pada populasi kucing, kelahiran dapat terjadi pada subpopulasi rentan dan terinfeksi serta anaknya akan sesuai dengan induknya, sedangkan model II asumsi yang digunakan pada populasi kucing yaitu kelahiran hanya terjadi pada subpopulasi rentan dan ada peluang anak dari induknya yang terinfeksi terlahir sehat, serta peluang kucing lahir dalam keadaan rentan tidak diketahui. Kemudian González-Parra, G. dkk. (2023) mengkaji model penyebaran Toksoplasmosis pada populasi kucing dan tikus. Penelitian ini membahas beberapa parameter yang memiliki pengaruh dalam penyebaran Toksoplasmosis pada kedua populasi salah satunya yaitu vaksinasi.

Berdasarkan penelitian yang sudah ada, penulis mengembangkan model matematika penyebaran penyakit Toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing yang telah dikaji oleh Yongzhen dkk. (2018) dan Rusdiani dkk. (2022). Model yang akan dibentuk dalam penelitian ini menggunakan model Yongzhen dkk. (2018) dengan menambahkan varibel vaksinasi pada populasi populasi kucing seperti yang dikaji oleh González-Parra, G. dkk. (2023). Dengan penambahan kelas yang divaksinasi/sembuh pada populasi kucing digunakan untuk melihat pengaruhnya terhadap penyebaran Toksoplasmosis di kedua populasi.

## KAJIAN TEORI

### SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem persamaan yang terdiri atas dua atau lebih persamaan diferensial yang menjelaskan suatu fenomena. Persamaan diferensial satu dengan yang lain pada sistem harus konsisten dan trivial. Menurut Braun (1993) secara umum bentuk dari suatu sistem  $n$  persamaan orde pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi kontinu pada  $[a, b]$  dari  $x_1, x_2, \dots, x_n$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Penyelesaian dari persamaan (1) adalah  $n$  fungsi  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sedemikian sehingga

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

### TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

### Definisi 1 (Perko 2001)

Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik kesetimbangan sistem (2) jika  $f(\bar{x}) = 0$ .

### MATRIKS JACOBIAN

### Definisi 2 (Perko 2001)

Diberikan fungsi  $f = f_1, f_2, \dots, f_n$  dengan  $f_i \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n, E \subseteq \mathbb{R}$  dan  $E$  himpunan terbuka.

Matriks

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

dinamakan matriks Jacobian dari  $f$  dari  $\bar{x}$ .

### NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

### Definisi 3 (Anton dan Rorres 2013)

Diberikan matriks  $A$  berukuran  $n \times n$ . Vektor tak nol  $\in \mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen (eigen vector) dari

$A$  jika  $Ax$  merupakan sebuah kelipatan skalar dari  $x$ , yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (4)$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen (eigen value) dari  $A$  dan  $x$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  bersesuaian dengan  $\lambda$ .

### KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui apakah suatu penyakit menyebar atau menghilang dari suatu populasi, sehingga dapat dilakukan tindakan lebih lanjut.

### Definisi 4 (Olsder dan Woude 2003)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu  $\dot{x} = f(x)$  dan  $x(t, x_0)$  adalah solusi persamaan  $\dot{x} = f(x)$  pada saat  $t$  dengan nilai awal  $x(0) = x_0$ .

1. Titik kesetimbangan  $\bar{x}$  dikatakan stabil lokal jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk setiap solusi  $x(t)$  yang memenuhi  $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$  berlaku  $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$  untuk setiap  $t \geq t_0$ .
2. Titik kesetimbangan  $\bar{x}$  dikatakan stabil asimtotik local jika titik ekuilibrium  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  stabil dan terdapat  $\delta_1 > 0$  sedemikian hingga untuk setiap solusi  $x(t)$  yang memenuhi  $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$  berlaku  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ .
3. Titik kesetimbangan  $\bar{x}$  dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tidak memenuhi (1).

### KRITERIA ROUTH-HURWITZ

Pengujian sifat kestabilan diperlukan perhitungan untuk menentukan nilai-nilai eigen dari matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Namun, sering kali dijumpai akar-akar dari persamaan karakteristik berupa parameter yang nilainya tidak mudah ditentukan. Maka dari itu diperlukan aturan/kriteria yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif atau ada persamaan karakteristik yang bernilai positif. Sebagai alternatif untuk menentukan nilai eigen tersebut digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

### Definisi 2.5 (Edeltstein-Keshet 2005)

Diberikan persamaan karakteristik polinomial  $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$  (5)

dengan  $a_0$  positif dan  $a_k$  bilangan real,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

### Teorema

Pembuat nol dari polinomial (5) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika

pertidaksamaan  $\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_3}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$  dipenuhi dan  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

### BILANGAN REPRODUKSI DASAR ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu infected. Ada kemungkinan yang dapat terjadi pada kondisi bilangan reproduksi,

- Jika  $R_0 < 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada generasi, sehingga penyakit tidak akan menyebar.
- Jika  $R_0 > 1$  maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada generasi, sehingga penyakit tidak akan menyebar. (Van Den Driessche dan Watmough 2002).

### METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dengan metode studi kepustakaan atau library research. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah: (1) menentukan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan kesimpulan.

Pada tahap studi pustaka hal yang dilakukan adalah mengumpulkan data pustaka atau informasi yang berkaitan dengan masalah, mempelajari berbagai buku referensi serta hasil penelitian sebelumnya yang sejenis yang berguna untuk mendapatkan landasan teori mengenai penyakit Toksoplasmosis, vaksin pada kucing, pemodelan matematika, dan konsep atau materi pendukung untuk menyelesaikan permasalahan.

Dalam melakukan analisis dan pemecahan masalah dilakukan beberapa langkah sebagai berikut: (1) membentuk model matematika penyebaran Toksoplasmosis pada manusia dan kucing dengan adanya vaksinasi, (2) mencari titik kesetimbangan, (3) menentukan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), (4) Menganalisis dan menentukan kestabilan titik kesetimbangan, (5) membuat simulasi numerik, (6) menginterpretasikan solusi model matematika.

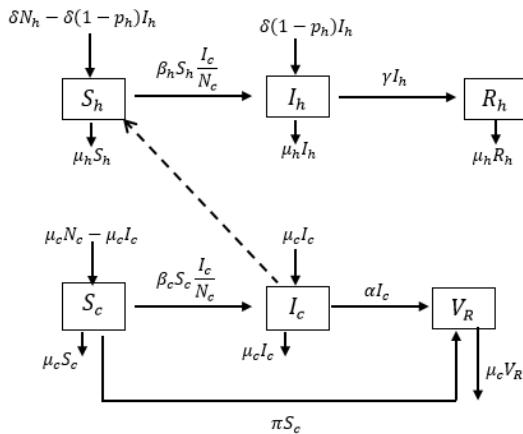
## HASIL DAN PEMBAHASAN

### PEMBENTUKAN MODEL

Dalam pembentukan model ini dibatasi oleh beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyakit Toksoplasmosis pada populasi kucing dan manusia dengan adanya vaksinasi kucing sebagai berikut:

- Jumlah populasi manusia tak konstan dan jumlah populasi kucing konstan.
- Populasi manusia ( $N_h$ ) dibagi menjadi tiga subpopulasi, yaitu subpopulasi manusia rentan ( $S_h$ ), subpopulasi manusia terinfeksi ( $I_h$ ), dan subpopulasi sembuh atau pulih dari penyakit Toksoplasmosis ( $R_h$ ). Penyakit Toksoplasmosis tidak menyebabkan kematian.
- Populasi kucing dibagi menjadi tiga yaitu subpopulasi kucing rentan terinfeksi penyakit ( $S_c$ ), subpopulasi kucing terinfeksi ( $I_c$ ), dan subpopulasi kucing tervaksin/sembuh ( $V_R$ ).
- Bayi yang baru lahir dari ibu yang terinfeksi Toksoplasmosis memiliki peluang dilahirkan tanpa Toksoplasmosis hanya berlaku pada populasi manusia.
- Semua anggota subpopulasi rentan memiliki peluang yang sama untuk terinfeksi.
- Manusia yang rentan terhadap penyakit Toksoplasmosis dapat terinfeksi melalui kontak langsung dengan kucing yang terinfeksi parasit *T. gondii*.
- Manusia yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit Toksoplasmosis karena kekebalan terhadap penyakit cukup tinggi.
- Parasit *T. gondii* akan berada di tubuh dalam keadaan tidak aktif, dan memberi kekebalan tubuh seumur hidup. Apabila kekebalan tubuh menurun manusia dapat terinfeksi kembali namun dengan kemungkinan yang kecil sehingga dapat diabaikan.
- Kucing tidak dapat tertular dari manusia yang terinfeksi.
- Kucing yang divaksin dan kucing yang sembuh dari infeksi tetapi tidak divaksin berada pada satu kelas yang sama ( $V_R$ ).
- Kucing yang divaksinasi atau sembuh akan memperoleh kekebalan tubuh seumur hidup dan tidak akan mengeluarkan ookista.

Model penyebaran Toksoplasmosis membagi populasi manusia menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi manusia rentan ( $S_h$ ), subpopulasi manusia terinfeksi ( $I_h$ ), dan subpopulasi sembah atau pulih dari penyakit toksoplasmosis ( $R_h$ ). Populasi kucing dibagi menjadi tiga yaitu subpopulasi kucing rentan ( $S_c$ ), subpopulasi kucing terinfeksi ( $I_c$ ), dan subpopulasi kucing yang sudah divaksinasi atau yang telah sembah dari inkesi toksoplasmosis ( $V_R$ ). Secara skematis proses penyebaran penyalahgunaan narkoba digambarkan dalam diagram transfer seperti pada Gambar 1



Gambar 1. Diagram Kompartemen Penyakit Toksoplasmosis Pada Kucing dan Manusia

Berdasarkan diagram kompartemen dan asumsi yang telah diuraikan maka didapat sistem persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \delta N_h - \delta(1-p_h)I_h - \mu_h S_h - \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c}, \\ \frac{dI_h}{dt} &= \beta_h S_h \frac{I_c}{N_c} + \delta(1-p_h)I_h - \mu_h I_h - \gamma I_h, \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma I_h - \mu_h R_h, \\ N_h(t) &= S_h(t) + I_h(t) + R_h(t), \\ \frac{dS_c}{dt} &= \mu_c N_c - \mu_c I_c - \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} - \pi S_c - \mu_c S_c, \\ \frac{dI_c}{dt} &= \mu_c I_c + \beta_c S_c \frac{I_c}{N_c} - \mu_c I_c - \alpha I_c, \\ \frac{dV_R}{dt} &= \pi S_c + \alpha I_c - \mu_c V_R, \\ N_c(t) &= S_c(t) + I_c(t) + V_R(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Laju kelahiran dan kematian pada populasi manusia berbeda mengakibatkan adanya pertumbuhan populasi. Dari Sistem (6) di atas dapat diperoleh

$$\frac{dN_h}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt} = (\delta - \mu_h)N_h$$

dan

$$\frac{dN_c}{dt} = \frac{dS_c}{dt} + \frac{dI_c}{dt} + \frac{dV_R}{dt} = 0$$

Dalam melakukan analisis terlebih dahulu dilakukan penskalaan. Bagian populasi manusia dapat diskala dengan mengambil total populasi  $N_h$  dan bagian populasi kucing pada Sistem (6) dapat di skala dengan mengambil total populasi  $N_c$ , sehingga proporsi masing-masing populasi manusia dan kucing pada pada Sistem (6) dapat dinyatakan sebagai

$$s_h = \frac{S_h}{N_h}, i_h = \frac{I_h}{N_h}, r_h = \frac{R_h}{N_h}, s_c = \frac{S_c}{N_c}, i_c = \frac{I_c}{N_c}, v_r = \frac{V_R}{N_c}. \quad (7)$$

Diperoleh sistem hasil penskalaan dari formulasi model di atas adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{dt} &= \delta - \delta(1-p_h)i_h - s_h(\delta + \beta_h i_c), \\ \frac{di_h}{dt} &= \beta_h s_h i_c + \delta(1-p_h)i_h - (\gamma + \delta)i_h, \\ \frac{dr_h}{dt} &= \gamma i_h - \delta r_h, \\ \frac{ds_c}{dt} &= \mu_c - \mu_c i_c - \beta_c s_c i_c - \pi s_c - \mu_c s_c, \\ \frac{di_c}{dt} &= \beta_c s_c i_c - \alpha i_c, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \pi s_c + \alpha i_c - \mu_c v_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya analisis titik kesetimbangan dilakukan dengan menggunakan sistem (8). Domain sistem dapat dibatasi pada daerah yang didefinisikan sebagai

$$\Omega = \{(s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r) \in \mathbb{R}_+^6 \mid 0 \leq s_h \leq 1, 0 \leq i_h \leq 1, 0 \leq r_h \leq 1, 0 \leq s_c \leq 1, 0 \leq i_c \leq 1, 0 \leq v_r \leq 1\}.$$

Adapun variabel-variabel dan parameter-parameter yang digunakan dalam model ini disajikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2

Tabel 1. Daftar Variabel-Variabe

Variabel	Keterangan	Syarat
$S_h(t)$	Jumlah populasi manusia yang rentan pada waktu $t$	$S_h(t) \geq 0$
$I_h(t)$	Jumlah populasi manusia yang terinfeksi pada waktu $t$	$I_h(t) \geq 0$
$R_h(t)$	Jumlah populasi manusia yang sembah pada waktu $t$	$R_h(t) \geq 0$
$N_h(t)$	Jumlah populasi manusia yang sembah pada waktu $t$	$N_h(t) \geq 0$
$S_c(t)$	Jumlah populasi kucing yang rentan pada waktu $t$	$S_c(t) \geq 0$
$I_c(t)$	Jumlah populasi kucing yang terinfeksi pada waktu $t$	$I_c(t) \geq 0$
$V_R(t)$	Jumlah populasi kucing yang telah sembah atau tervaksinasi pada waktu $t$	$V_R(t) \geq 0$
$N_c(t)$	Jumlah populasi kucing yang sembah pada waktu $t$	$N_c(t) \geq 0$

Tabel 2. Daftar Parameter

Parameter	Keterangan	Syarat
$\delta$	Laju kelahiran manusia	$\delta \geq 0$
$p_h$	Peluang bayi rentan terlahir dari ibu yang terinfeksi penyakit toksoplasmosis	$p_h \geq 0$
$\mu_h$	Laju kematian alami manusia	$\mu_h \geq 0$
$\beta_h$	Laju transmisi individu dari populasi manusia rentan ke populasi manusia terinfeksi	$\beta_h \geq 0$
$\gamma$	Laju transmisi individu dari populasi manusia terinfeksi ke populasi manusia yang sembuh	$\gamma \geq 0$
$\mu_c$	Laju kelahiran dan laju kematian alami kucing	$\mu_c \geq 0$
$\beta_c$	Laju transmisi kucing dari populasi rentan ke populasi terinfeksi	$\beta_c \geq 0$
$\pi$	Laju kucing rentan yang divaksinasi	$\pi \geq 0$
$\alpha$	Laju kesembuhan kucing	$\alpha \geq 0$

### TITIK KESETIMBANGAN MODEL

Titik kesetimbangan model diperoleh ketika sistem berada dalam keadaan setimbang. Kondisi ketika perubahan jumlah individu setiap populasi terhadap waktu adalah nol disebut keadaan keseimbangan. Oleh karena itu, titik keseimbangan model diperoleh ketika sistem  $\frac{ds_h}{dt} = \frac{di_h}{dt} = \frac{dr_h}{dt} = \frac{ds_c}{dt} = \frac{di_c}{dt} = \frac{dv_r}{dt} = 0$ . Selanjutnya, titik kesetimbangan bebas penyakit didapat dengan menyelesaikan persamaan pada sistem (8) dengan  $i_h = 0$  dan  $i_c = 0$ , diperoleh:

$$E_0 = (s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r) = \left(1, 0, 0, \frac{\mu_c}{\pi + \mu_c}, 0, \frac{\pi}{\pi + \mu_c}\right).$$

Langkah selanjutnya mencari titik kesetimbangan endemik ( $E_1$ ) dengan  $i_h \neq 0$  dan  $i_c \neq 0$ , diperoleh  $E_1 = (s_h^*, i_h^*, r_h^*, s_c^*, i_c^*, v_r^*)$  dengan

$$s_h^* = \frac{\beta_c \delta (\mu_c + \alpha) (\gamma + \delta p_h)}{\beta_h A (\delta + \gamma) + \delta \beta_c (\mu_c + \alpha) (\gamma + \delta p_h)},$$

$$i_h^* = \frac{\beta_h \delta A}{\beta_h A (\delta + \gamma) + \delta \beta_c (\mu_c + \alpha) (\gamma + \delta p_h)},$$

$$r_h^* = \frac{\gamma \beta_h A}{\beta_h A (\delta + \gamma) + \delta \beta_c (\mu_c + \alpha) (\gamma + \delta p_h)},$$

$$s_c^* = \frac{\alpha}{\beta_c},$$

$$i_c^* = \frac{A}{\beta_c (\mu_c + \alpha)},$$

$$v_r^* = \frac{\alpha(\pi + \beta_c - \alpha)}{\beta_c(\mu_c + \alpha)}$$

$$\text{dimana } A = \mu_c \beta_c - \pi \alpha - \mu_c \alpha.$$

### BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan menggunakan metode The Next Generation Matrix (NGM). Berdasarkan sistem persamaan (8), diambil sistem persamaan yang memuat subpopulasi terinfeksi yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{di_h}{dt} &= \beta_h s_h i_c - (\delta p_h + \gamma) i_h, \\ \frac{di_c}{dt} &= \beta_c s_c i_c - \alpha i_c. \end{aligned} \quad (9)$$

Berdasarkan sistem persamaan (9) dapat dibentuk matriks  $F$  dan  $V$  sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} \beta_h s_h i_c \\ \beta_c s_c i_c \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} (\delta p_h + \gamma) i_h \\ \alpha i_c \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dibentuk matriks Jacobian dari persamaan di atas, sehingga diperoleh

$$F = J(F) = \begin{bmatrix} 0 & \beta_h s_h \\ 0 & \beta_c s_c \end{bmatrix} \text{ dan } V = J(V) = \begin{bmatrix} \delta p_h + \gamma & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Matriks generasi selanjutnya didefinisikan sebagai  $K = VF^{-1}$  dan angka reproduksi dasar diperoleh dari perhitungan matriks generasi selanjutnya dapat ditulis sebagai berikut  $R_0 = \rho(K)$ .

Dengan  $\rho(K)$  adalah nilai eigen matriks yang merupakan nilai eigen terbesar atau dominan (spectral radius)

$$R_0 = \rho(K) = \rho(VF^{-1}) = \frac{\beta_c \mu_c}{(\pi + \mu_c)\alpha}$$

### Teorema

$$\text{Dipunyai } R_0 = \frac{\beta_c \mu_c}{(\pi + \mu_c)\alpha}$$

Berdasarkan sistem persamaan (8) dan nilai  $R_0$  diperoleh,

- Jika  $R_0 \leq 1$  maka sistem persamaan (8) mempunyai satu titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ )
- Jika  $R_0 > 1$  maka sistem persamaan (8) mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik  $E_1$

### KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN

Jenis kestabilan titik ekuilibrium dapat diketahui dengan melakukan linearisasi terhadap persamaan non linear (8). Proses linearisasi ini menghasilkan matriks Jacobi berikut.

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{ds_h}{dt})}{\partial v_r} \\ \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{di_h}{dt})}{\partial v_r} \\ \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{dr_h}{dt})}{\partial v_r} \\ \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{ds_c}{dt})}{\partial v_r} \\ \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{di_c}{dt})}{\partial v_r} \\ \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial s_h} & \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial i_h} & \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial r_h} & \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial s_c} & \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial i_c} & \frac{\partial(\frac{dv_r}{dt})}{\partial v_r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\delta - \beta_h i_c & -\delta + \delta p_h & 0 & 0 & -\beta_h s_h & 0 \\ \beta_h i_c & -\delta p_h - \gamma & 0 & 0 & \beta_h s_h & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_c i_c - \pi - \mu_c & -\mu_c - \beta_c s_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_c i_c & \beta_c s_c - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & \alpha & -\mu_c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium dilakukan linearisasi terhadap persamaan nonlinear. Proses linearisasi disekitar  $E_0 = (1, 0, 0, \frac{\mu_c}{\pi+\mu_c}, 0, \frac{\pi}{\pi+\mu_c})$  menghasilkan matriks Jacobi berikut.

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\delta & -\delta + \delta p_h & 0 & 0 & -\beta_h & 0 \\ 0 & -\delta p_h - \gamma & 0 & 0 & \beta_h & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi - \mu_c & -\mu_c - \frac{\beta_c \mu_c}{\pi + \mu_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c \mu_c}{\pi + \mu_c} - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & \alpha & -\mu_c \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik dari matriks Jacobi adalah

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \delta)(\lambda + \delta p_h + \gamma)(\lambda + \delta)(\lambda + \pi + \mu_c) \\
&\left(\lambda - \frac{\beta_c \mu_c}{\pi + \mu_c} + \alpha\right)(\lambda + \mu_c) = 0. \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\text{Mengingat } R_0 = \frac{\beta_c \mu_c}{(\pi + \mu_c)\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta_c \mu_c}{\pi + \mu_c} = R_0 \alpha$$

berakibat

$$\begin{aligned}
&(\lambda + \delta)(\lambda + \delta p_h + \gamma)(\lambda + \delta)(\lambda + \pi + \mu_c) \\
&(\lambda - R_0 \alpha + \alpha)(\lambda + \mu_c) \tag{11}
\end{aligned}$$

diperoleh nilai eigen, yaitu

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\delta, \lambda_2 = -\delta p_h - \gamma, \lambda_3 = -\delta, \lambda_4 = -\pi - \mu_c, \\
\lambda_5 &= R_0 \alpha - \alpha, \text{ dan } \lambda_6 = -\mu_c
\end{aligned}$$

Titik kesetimbangan  $E_0$  akan stabil asimtotik jika keempat nilai eigen bernilai negatif. Jelas bahwa  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6 < 0$ . Sementara itu  $\alpha > 0$  dan jika  $R_0 < 1$  berakibat  $\lambda_5 = R_0 \alpha - \alpha = \alpha(R_0 - 1) < 0 \Leftrightarrow \lambda_4 < 0$ . Dengan kata lain nilai eigen dari persamaan karakteristik (11) yaitu  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0, \lambda_6 < 0$  untuk setiap kondisi  $R_0$ ,  $\lambda_5$  bernilai negatif jika  $R_0 < 1$ , dan  $\lambda_5$  bernilai positif jika  $R_0 > 1$ . Maka

titik kesetimbangan  $E_0 = (1, 0, 0, \frac{\mu_c}{\pi+\mu_c}, 0, \frac{\pi}{\pi+\mu_c})$  bersifat asimtotik lokal saat  $R_0 < 1$  dan  $E_0 = (1, 0, 0, \frac{\mu_c}{\pi+\mu_c}, 0, \frac{\pi}{\pi+\mu_c})$  tidak stabil saat  $R_0 > 1$ .

### Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Hasil linearisasi di sekitar  $E_1$  menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut

$$J(E_1)$$

$$= \begin{pmatrix} -\delta - \beta_h i_c^* & -\delta + \delta p_h & 0 & 0 & -\beta_h s_h^* & 0 \\ \beta_h i_c^* & -\delta p_h - \gamma & 0 & 0 & \beta_h s_h^* & 0 \\ 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_c i_c^* - \pi - \mu_c & -\mu_c - \beta_c s_c^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_c i_c^* & \beta_c s_c^* - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & \alpha & -\mu_c \end{pmatrix}$$

Diperoleh persamaan karakteristik  $(\lambda + \mu_c)(\lambda + \delta)[c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4]$ . Untuk persamaan berderajat satu diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -\mu_c$  dan  $\lambda_2 = -\delta$ , karena  $\mu_c$  dan  $\delta$  bernilai positif maka bagian real dari kedua nilai eigen tersebut bernilai negatif. Untuk nilai eigen yang lainnya dapat ditentukan dari persamaan berderajat 3 berikut ini.

$$\lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4$$

Berdasarkan Kriteria Routh Hurwitz ditunjukkan  $c_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0$  dan  $c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_0 c_3^2 > 0$  apabila  $R_0 > 1$ . Hal ini mengakibatkan semua nilai eigen memiliki nilai real  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ , dan  $\lambda_6 < 0$  sehingga dapat disimpulkan bahwa kestabilan pada titik kesetimbangan endemik ( $E_1$ ) bersifat stabil asimtotik lokal.

### SIMULASI NUMERIK

Simulasi model matematika penyebaran penyakit toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing dilakukan dengan menggunakan software Maple. Simulasi dilakukan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) dan titik kesetimbangan endemik ( $E_1$ ).

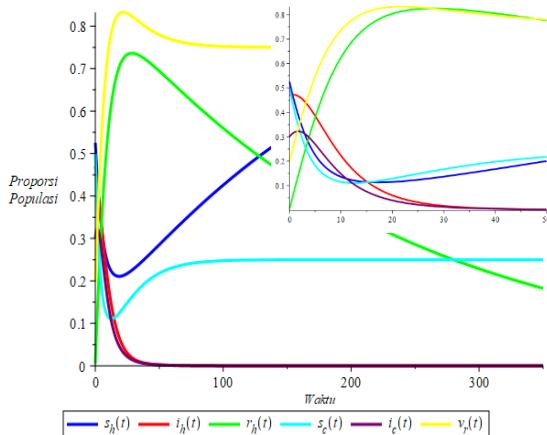
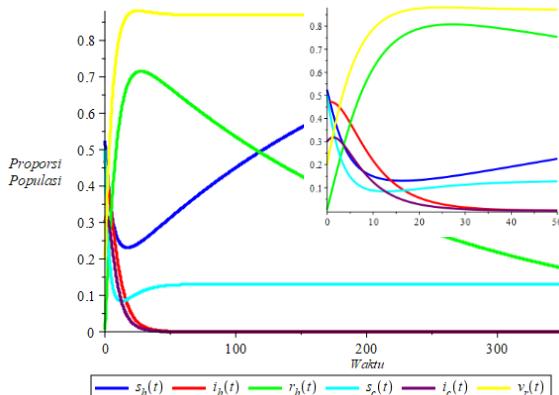
Dipunyai  $R_0 = \frac{\beta_c \mu_c}{(\pi + \mu_c)\alpha}$  sehingga dapat dicari nilai batas  $\pi$  dengan mengasumsikan  $R_0 = 1$ . Diperoleh nilai  $\pi = 0.0285$ , ketika kondisi bebas penyakit ( $R_0 < 1$ ) maka  $\pi > 0.0285$  dengan nilai  $\pi = 0.045, 0.075, 0.1, 0.3$  dan kondisi endemik ( $R_0 > 1$ ) maka  $\pi < 0.0285$  dengan nilai  $\pi = 0.001, 0.005, 0.0095, 0.015$ . Penelitian ini akan dianalisis dengan nilai parameter-parameter yang terlihat pada Tabel 3 dan nilai awal pada Tabel 4.

Tabel 3. Nilai Parameter-Parameter

Parameter	Nilai (per minggu)	Sumber
$\delta$	0.233/52	(Yongzhen dkk. 2018)
$p_h$	0.9985	(Bollani dkk. 2022)
$\mu_h$	0.0003	asumsi
$\beta_h$	0.56	(Jones, Lopez, dan Wison 2003)
$\gamma$	0.17	asumsi
$\mu_c$	0.015	(Wang dan Jiang 2023)
$\beta_c$	0.58	asumsi
$\alpha$	0.2	(Wang dan Jiang 2023)
$\pi$	$0 \leq \pi \leq 1$	(Bonačić Marinović dkk. 2020)

Tabel 4. Nilai Awal Variabel pada Model

Parameter	Nilai	Sumber
$s_h(t)$	0.5253	(Yongzhen dkk. 2018)
$i_h(t)$	0.47	(Yongzhen dkk. 2018)
$r_h(t)$	0.0047	(Yongzhen dkk. 2018)

(a) Grafik kelar  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.045$ (c) Grafik kelar  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.1$ 

$s_c(t)$	0.5	(González-Parra, Sultana, dan Arenas 2022)
$i_c(t)$	0.3	(González-Parra dkk. 2022)
$v_r(t)$	0.2	(González-Parra dkk. 2022)

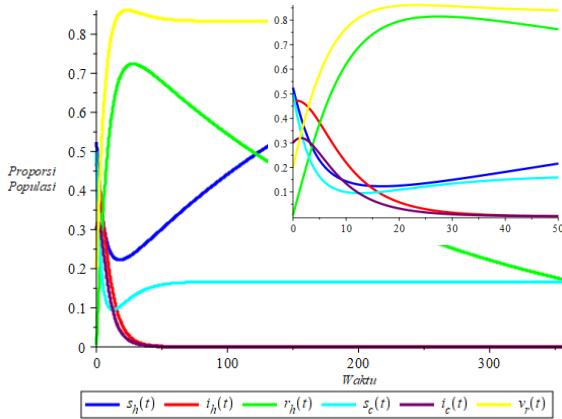
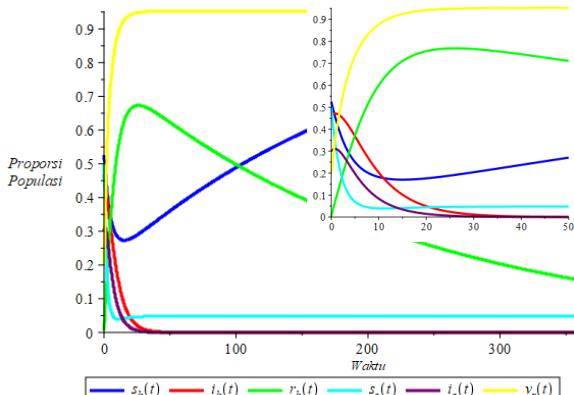
**Simulasi di Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit**

Analisis pemodelan matematika penyebaran toksoplasmosis pada manusia dan kucing dilakukan dengan membuat variasi pada parameter  $\pi$  untuk mengetahui besar pengaruh vaksinasi pada kucing. Variasi nilai  $\pi$  dapat dilihat pada Tabel 5.

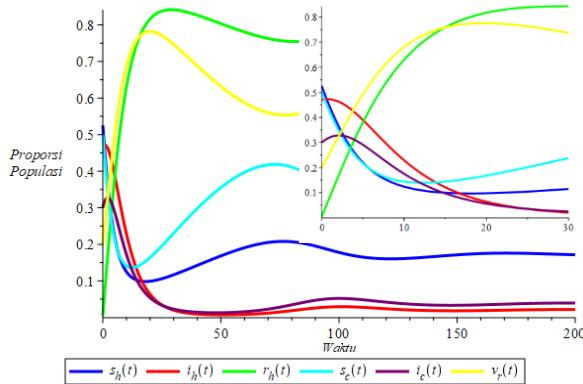
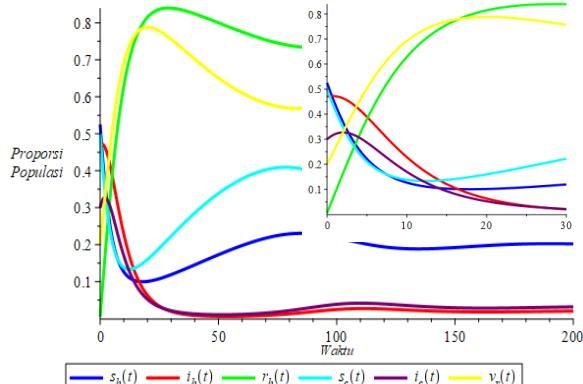
Tabel 5.  $R_0 < 1$  dan variasi  $\pi > 0.028$  dengan  $\beta_c = 0.58$

$\pi$	$R_0$	Titik Kesetimbangan ( $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$ )
0.045	0.725	(1, 0, 0, 0.25, 0, 0.75)
0.075	0.483	(1, 0, 0, 0.167, 0, 0.833)
0.1	0.378	(1, 0, 0, 0.13, 0, 0.87)
0.3	0.138	(1, 0, 0, 0.047, 0, 0.952)

Setelah dianalisis perubahan nilai  $\pi$ , diperoleh hasil yang terjadi pada Gambar 2.

(b) Grafik kelar  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.075$ (d) Grafik kelar  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.3$ Gambar 2. Banyak Populasi  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  terhadap waktu dengan  $\pi = 0.045, 0.075, 0.1, 0.3$

Gambar 2 menunjukkan bahwa dengan adanya vaksinasi pada kucing yang rentan ( $\pi$ ) memiliki pengaruh terhadap penyebaran penyakit toxoplasmosis. Pada mulanya kucing rentan ( $s_c$ ) mengalami penurunan karena adanya kematian alami dan perpindahan ke kelas vaksin atau sembuh ( $v_r$ ) karena adanya kucing rentan yang divaksinasi. Semakin tinggi nilai parameter vaksinasi maka proporsi kucing yang terinfeksi ( $i_c$ ) akan menurun. Jika proporsi kucing yang terinfeksi ( $i_c$ ) sedikit, kemungkinan kontak langsung yang terjadi antara manusia rentan ( $s_h$ ) dengan kucing yang terinfeksi akan sedikit, hal ini menyebabkan populasi manusia yang terinfeksi ( $i_h$ ) akan semakin kecil.

(a) Grafik kelas  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.001$ (c) Grafik kelas  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.0095$ Gambar 3. Banyak Populasi  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  terhadap waktu  $t$  dengan  $\pi = 0.001, 0.005, 0.0095, 0.015$ 

Gambar 3 menunjukkan bahwa populasi kucing yang rentan ( $s_c$ ) mengalami penurunan dari kondisi awal karena adanya vaksinasi sehingga kucing yang rentan ( $s_c$ ) berpindah ke populasi yang sembuh atau tervaksinasi ( $v_r$ ) hal ini menyebabkan penurunan pada populasi kucing yang terinfeksi ( $i_c$ ). Kenaikan kucing yang rentan ( $s_c$ ) berikutnya menunjukkan kelahiran individu baru ke dalam populasi yang

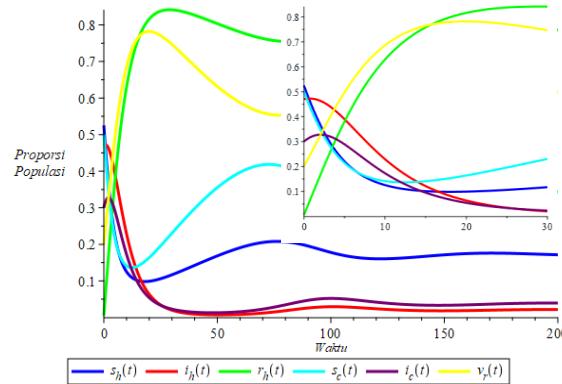
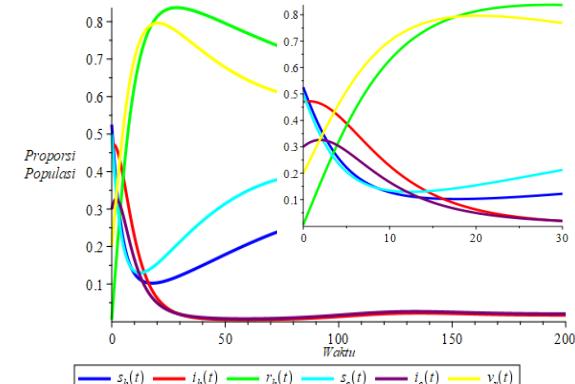
### Simulasi di Titik Kesetimbangan Endemik

Analisis pemodelan matematika penyebaran toxoplasmosis pada manusia dan kucing dilakukan dengan membuat variasi pada parameter  $\pi$  untuk mengetahui besar pengaruh vaksinasi pada kucing. Variasi nilai  $\pi$  dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6.  $R_0 > 1$  dan variasi  $\pi < 0.028$  dengan  $\beta_c = 0.58$ 

$\pi$	$R_0$	Titik Kesetimbangan ( $s_h^*, i_h^*, r_h^*, s_c^*, i_c^*, v_r^*$ )
0.001	2.719	(0.154, 0.022, 0.825, 0.345, 0.044, 0.6)
0.005	2.175	(0.175, 0.021, 0.804, 0.345, 0.038, 0.6)
0.0095	1.775	(0.208, 0.020, 0.771, 0.345, 0.030, 0.6)
0.015	1.45	(0.270, 0.019, 0.711, 0.345, 0.021, 0.6)

Diperoleh hasil simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 3.

(b) Grafik kelas  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.005$ (d) Grafik kelas  $s_h, i_h, r_h, s_c, i_c, v_r$  dengan  $\pi = 0.015$ 

belum memiliki kekebalan terhadap Toksoplasmosis. Kucing yang sembuh dari Toksoplasmosis atau telah divaksinasi ( $v_r$ ) memperoleh kekebalan seumur hidup terhadap penyakit. Hal ini berarti bahwa meskipun individu yang rentan mungkin meningkat karena kelahiran individu baru, individu yang terinfeksi tidak akan meningkat karena individu yang sembuh tidak dapat terinfeksi kembali.

Apabila semakin kecil tingkat vaksinasi yang diberikan pada kucing rentan ( $s_c$ ) maka akan mengakibatkan peningkatan pada kucing yang terinfeksi. Sedangkan jika jumlah kucing terinfeksi ( $i_c$ ) mengalami peningkatan, kemungkinan kontak langsung dengan manusia rentan ( $s_h$ ) akan meningkat. Hal ini menyebabkan jumlah proporsi manusia terinfeksi ( $i_h$ ) akan semakin besar. Dari hasil simulasi juga terlihat bahwa titik kesetimbangan endemik pada populasi yang sembuh lebih dari titik kesetimbangan populasi yang rentan, situasi ini menunjukkan bahwa penyakit toksoplasmosis telah mencapai tingkat yang stabil dalam populasi manusia dan kucing. Titik kesetimbangan pada populasi individu yang sembuh yang lebih besar dibandingkan populasi rentan menunjukkan bahwa proporsi populasi yang sembuh dan memiliki kekebalan terhadap

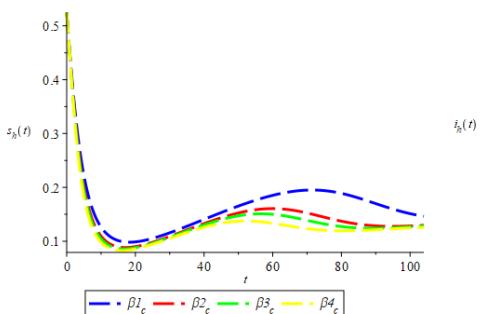
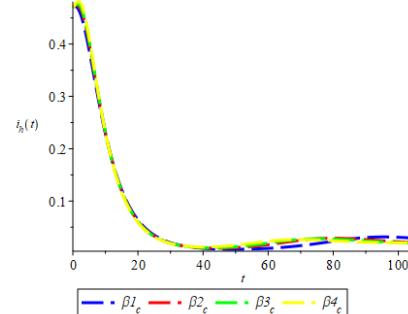
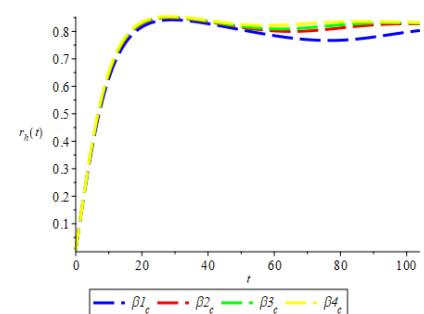
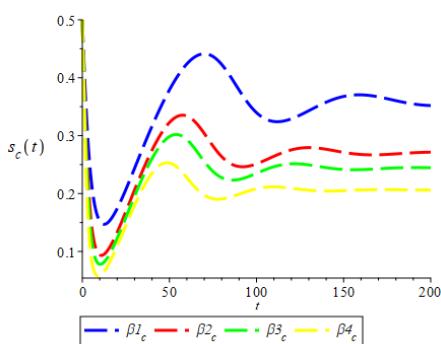
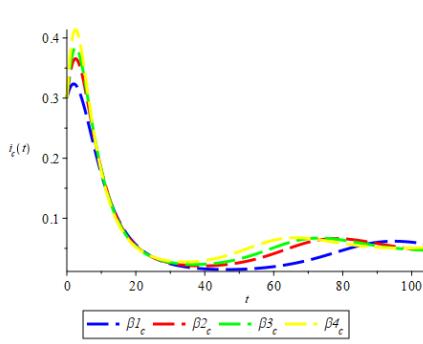
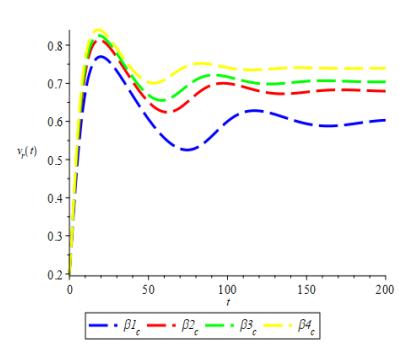
Toksoplasmosis lebih besar dibandingkan dengan individu yang rentan sehingga membantu mengendalikan penyebaran penyakit.

Analisis pengaruh  $\beta_c$  laju transmisi dari kucing yang rentan menjadi kucing yang terinfeksi dengan cara membuat variasi nilai  $\beta_c$  untuk mengetahui pengaruhnya pada model. variasi nilai  $\beta_c$  yang dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7.  $R_0 > 1, \pi = 0.001$  dan variasi  $\beta_c > 0.52$ 

$\beta_c$	$R_0$	Titik Kesetimbangan ( $s_h^*, i_h^*, r_h^*, s_c^*, i_c^*, v_r^*$ )
0.56	2.625	(0.1563, 0.0216, 0.822, 0.3571, 0.0431, 0.5997)
0.74	3.469	(0.1388, 0.0221, 0.8391, 0.2702, 0.0496, 0.6800)
0.82	3.844	(0.1342, 0.0222, 0.8346, 0.2439, 0.0516, 0.7045)
0.97	4.547	(0.1281, 0.0223, 0.8494, 0.2062, 0.0544, 0.7393)

Diperoleh hasil yang terjadi pada Gambar 4.

a) Grafik Kelas  $s_h$  terhadap waktu  $t$ b) Grafik Kelas  $i_h$  terhadap waktu  $t$ c) Grafik Kelas  $r_h$  terhadap waktu  $t$ a) Grafik Kelas  $s_c$  terhadap waktu  $t$ b) Grafik Kelas  $i_c$  terhadap waktu  $t$ c) Grafik Kelas  $v_r$  terhadap waktu  $t$ Gambar 4. Dinamika Banyak Populasi (a)  $s_h(t)$ , (b)  $i_h(t)$ , (c)  $r_h(t)$ , (d)  $s_c(t)$ , (e)  $i_c(t)$ , (f)  $v_r(t)$  terhadap Waktu  $t$  dengan  $\beta_c = 0.56, 0.74, 0.82, 0.97$ 

Berdasarkan gambar 4 (a), (b), (c), (d), (e), (f) menunjukkan bahwa laju transmisi dari kucing yang rentan menjadi kucing yang terinfeksi ( $\beta_c$ ) memiliki pengaruh terhadap penyebaran penyakit Toksoplasmosis. Semakin besar nilai parameter  $\beta_c$  maka jumlah proporsi kucing yang terinfeksi ( $i_c$ )

akan semakin meningkat. Semakin besar proporsi kucing yang terinfeksi, kemungkinan kontak langsung dengan manusia rentan juga semakin besar. Hal ini dapat menyebabkan jumlah proporsi manusia yang terinfeksi Toksoplasmosis ( $i_h$ ) akan semakin besar.

Namun apabila manusia rentan ( $s_h$ ) terpapar atau melakukan kontak langsung dengan kucing yang terinfeksi mempunyai kekekabalan tubuh manusia baik hal ini tidak terlalu mempengaruhi infeksi pada manusia. Dalam kasus ini seperti yang terlihat pada gambar ketika  $\beta_c$  naik proporsi manusia yang terinfeksi Toksoplasmosis meningkat tetapi tidak terlalu besar peningkatannya.

## PENUTUP

### SIMPULAN

Dari simulasi model matematika penyebaran Toksoplasmosis pada populasi manusia dan kucing dengan adanya vaksinasi kucing menunjukkan hasil yang sama dengan hasil analisis. Berdasarkan hasil analisis diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = \frac{\beta_c \mu_c}{\alpha(\mu_c + \pi)}$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika  $R_0 < 1$  sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik jika  $R_0 > 1$ .

Diperoleh hasil simulasi model yaitu, ketika laju vaksinasi pada kucing rentan semakin kecil menyebabkan nilai  $R_0 > 1$  sehingga penyakit Toksoplasmosis akan terus ada hingga waktu yang tidak terbatas. Apabila semakin besar vaksinasi yang diberikan, menyebabkan nilai  $R_0$  berkurang artinya populasi yang terinfeksi akan menuju nol pada waktu  $t$  tertentu sehingga penyakit Toksoplasmosis akan menghilang. Penyebaran Toksoplasmosis juga dipengaruhi oleh laju kontak langsung dengan kucing yang terinfeksi Toksoplasmosis, semakin besar laju transmisi dari kucing yang rentan menjadi kucing yang terinfeksi ( $\beta_c$ ) maka jumlah proporsi kucing yang terinfeksi akan semakin meningkat. Semakin besar proporsi kucing yang terinfeksi, kemungkinan kontak langsung dengan manusia rentan juga semakin besar. Hal ini dapat menyebabkan jumlah proporsi manusia yang terinfeksi Toksoplasmosis ( $i_h$ ) akan semakin besar.

### SARAN

Pada penelitian selanjutnya dapat mempertimbangkan laju kelahiran dan kematian populasi kucing, kemudian dapat dipertimbangkan pula beberapa faktor pada model seperti ookista yang berada di lingkungan atau waktu bertahan hidup parasit.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard, dan Chris Rorres. 2013. *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. Vol. 6. 11th ed. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Aranda, Diego F., Rafael J. Villanueva, Abraham J. Arenas, dan Gilberto C. González-Parra. 2008. "Mathematical Modeling of Toxoplasmosis Disease in Varying Size Populations." *Computers and Mathematics with Applications* 56(3):690–96. doi: 10.1016/j.camwa.2008.01.008.
- Bollani, Lina, Cinzia Auriti, Cristian Achille, Francesca Garofoli, Domenico Umberto De Rose, Valeria Meroni, Guglielmo Salvatori, dan Chryssoula Tzialla. 2022. "Congenital Toxoplasmosis: The State of the Art." *Frontiers in Pediatrics* 10(July):1–12. doi: 10.3389/fped.2022.894573.
- Bonačić Marinović, Axel A., Marieke Opsteegh, Huifang Deng, Anita W. M. Suijkerbuijk, Paul F. van Gils, dan Joke van der Giessen. 2020. "Prospects of Toxoplasmosis Control by Cat Vaccination." *Epidemics* 30. doi: 10.1016/j.epidem.2019.100380.
- Braun, Martin. 1993. *Differential Equations and Their Applications*. 4th ed. New York: Springer-Verlag.
- CDC. 2018. "Toxoplasmosis." Center for Disease Control and Prevention. Diambil (<https://www.cdc.gov/parasites/toxoplasmosis/>).
- Dalimi, A., dan A. Abdoli. 2012. "Latent Toxoplasmosis and Human." *Iranian Journal of Parasitology* 7(1):1–17.
- Van Den Driessche, P., dan James Watmough. 2002. "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission." *Mathematical Biosciences* 180(1–2):29–48. doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.
- Dubey, J. P. 2022. *Toxoplasmosis of Animals and Humans*. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press.
- Edelstein-Keshet, Leah. 2005. *Mathematical Models in Biology*. New York: SIAM.
- González-Parra, Gilberto, Abraham J. Arenas, Benito Chen-Charpentier, dan Sharmin Sultana. 2023. "Mathematical modeling of toxoplasmosis with multiple hosts, vertical transmission and cat vaccination." *Computational and Applied Mathematics* 42(2):1–20. doi: 10.1007/s40314-023-02237-6.
- González-Parra, Gilberto C., Abraham J. Arenas, Diego F. Aranda, Rafael J. Villanueva, dan Lucas Jódar. 2009. "Dynamics of a Model of Toxoplasmosis Disease in Human and Cat Populations." *Computers and Mathematics with Applications*

- Applications* 57(10):1692–1700. doi: 10.1016/j.camwa.2008.09.012.
- González-Parra, Gilberto, Sharmin Sultana, dan Abraham J. Arenas. 2022. “Mathematical Modeling of Toxoplasmosis Considering a Time Delay in the Infectivity of Oocysts.” *Mathematics* 10(3):1–20. doi: 10.3390/math10030354.
- Jones, Jeffrey, Adriana Lopez, dan Mahrani Wison. 2003. “Congenital Toxoplasmosis.” *AMERICAN FAMILY PHYSICIAN* 67:2131–38. doi: 10.1017/CBO9781139030854.186.
- Montoya, J. G., dan O. Liesenfeld. 2004. “Toxoplasmosis.” *The Lancet* 363(9425):1965–76. doi: 10.1016/S0140-6736(04)16412-X.
- Muhammad, Idris Babaji, dan Salisu Usaini. 2021. “Dynamics of Toxoplasmosis Disease in Cats Population with Vaccination.” *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences* 3(1):17–25. doi: 10.46481/jnsps.2021.141.
- Nurcahyo, R. Wisnu. 2019. *Toksoplasmosis pada Hewan*. diedit oleh J. Prastowo. Yogyakarta: Penerbit Samudra Biru.
- Olsder, G. J., dan J. .. van der Woude. 2003. *Mathematical Systems Theory*. 2nd ed. VSSD.
- Pereira, Karen Signori, Regina M. B. Franco, dan Diego A. G. Leal. 2010. “Transmission of Toxoplasmosis (*Toxoplasma gondii*) by Foods.” *Advances in Food and Nutrition Research* 60:1–19. doi: 10.1016/S1043-4526(10)60001-0.
- Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd ed. New York: Springer.
- Rusdiani, Riza, Ali Kusnanto, dan Paian Sianturi. 2022. “Analisis Dinamika Model Penyakit Toksoplasmosis pada Populasi Kucing dan Manusia.” *Jurnal Matematika* 11(2):75. doi: 10.24843/jmat.2021.v11.i02.p138.
- Subrata, Made, Nyoman Mantik Astawa, Nyoman Tigeoh Suryadi, Sang Gede Purnama, Kadek Karang Agustina, Ngakan Putu Anom Harjana, dan Made Damriyasa. 2021. “The Seroprevalence of *Toxoplasma gondii* in Cats at the House of Maternal Women with Toxoplasmosis in Badung, Indonesia.” *Jurnal Kesehatan Masyarakat Nasional* 16(4):271–78. doi: 10.21109/kesmas.v16i4.4954.
- Wang, Mengyue, dan Wen Jiang. 2023. “Virulence evolution of *Toxoplasma gondii* within a multi-host system.” *Evolutionary Applications* 16(3):721–37. doi: 10.1111/eva.13530.
- Yongzhen, Pei, Ji Xuehui, Li Changguo, dan Gao Shujing. 2018. “Dynamics of A Model of Toxoplasmosis Disease in Cat and Human with Varying Size Populations.” *Mathematics and Computers in Simulation* 144:52–59. doi: 10.1016/j.matcom.2017.06.007.