MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No 01*
Tahun 2025

PEMBUKTIAN TEOREMA DIVERGENSI GAUSS MENGGUNAKAN OBJEK BOLA VOLI

Siti Yuwandira
Pendidikan Matematika, FITK, Universitas Islam Negeri Raden Fatah Palembang
e-mail : sitiyuwandira36@gmail.com

Arvin Efriani
Pendidikan Matematika, FITK, Universitas Islam Negeri Raden Fatah Palembang
e-mail : arvinefriani_uin@radenfatah.ac.id

Abstrak

Bola Voli adalah salah satu bola yang memiliki tekanan udara atau gas. Ketika bermain bola voli kerap sekali terjadi bahwa bola tersebut kempes, hal ini dikarenakan bola terlalu sering dimainkan (dipantul-pantulkan) sehingga tekanan udara pada bola voli berkurang. Untuk meminimalisir kejadian tersebut yaitu dengan mengetahui tekanan udara pada bola voli menggunakan teorema divergensi gauss. Selain itu, Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan Teorema Divergensi Gauss dengan objek Pada bola voli. Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kualitatif deskriptif. Metode yang digunakan penelitian ini adalah metode pembuktian langsung terhadap bunyi teorema Divergensi Gauss. Langkah pertama yaitu pembuktian teorema divergensi gauss secara formal. Setelah itu pembuktian teorema Divergensi gauss pada bola voli dengan menggunakan konsep vektor, fungsi vektor dan diferensial. Setelah dibuktikan, hasil nilainya sama (terbukti), maka pembuktian teorema divergensi gauss pada bola voli terbukti)
Kata Kunci: Bola Voli, Teorema Divergensi Gauss, Vektor

Abstract

Volleyball is one of the balls that has air or gas pressure. When playing volleyball, it often happens that the ball deflates, this is because the ball is played too often (bounced) so that the air pressure in the volleyball decreases. To minimize this incident, namely by knowing the air pressure in the volleyball using the Gauss divergence theorem. In addition, this study aims to introduce the Gauss Divergence Theorem with the object of volleyball. The type of research used in this study is descriptive qualitative research. The method used in this study is the direct proof method for the sound of the Gauss Divergence theorem. The first step is to prove the Gauss divergence theorem formally. After that, the proof of the Gauss Divergence theorem on volleyball using the concept of vectors, vector functions and differentials. After being proven, the results of the values are the same (proven), then the proof of the Gauss divergence theorem on volleyball is proven)
Keywords: *Volleyball, Gauss Divergence Theorem, Vector.*

PENDAHULUAN

Kalkulus adalah cabang ilmu matematika yang sangat penting untuk di pelajari. Kalkulus diambil dari kata bahasa latin *calculus* yang artinya "batu kecil" adalah cabang ilmu matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret tak terhingga. Kegunaan dari kalkulus untuk menghitung percepatan, luas, volume, pusat massa dan lain sebagainya (Dina, Khasanah, and Febriana 2024). Karena kalkulus adalah ilmu yang luas, tidak hanya mempelajari satu materi saja. Maka dari itu dalam memahami dan mempelajari materi kalkulus diperlukannya suatu definisi yang dikenal dengan postulat. Dari postulat itu lahirlah sifat-sifat konsep kalkulus yang diperoleh dari pembuktian-pembuktian yang disebut dengan dalil dan teorema. Teorema adalah pernyataan yang telah terbukti kebenarannya (Suwanti and Fayeldi 2018).

Teorema adalah suatu pernyataan matematika yang masih memerlukan pembuktian dan pernyataannya dapat ditunjukkan dengan nilai kebenaran. Maka dari itu, setiap pernyataan dalam teorema pasti bernilai benar karena selalu terbukti kebenarannya. Bramlett & Drake mengatakan bahwa Dengan melakukan pembuktian akan menyakinkan orang lain maupun diri sendiri bahwa pernyataan itu benar dengan alasan yang dapat diterima (Siregar 2020). Dalam bidang kalkulus terdapat banyak teorema yang dapat dipelajari salah satunya adalah teorema Divergensi Gauss yang juga terbukti kebenarannya.

Teorema Divergensi Gauss adalah teorema yang menghubungkan fluks medan vektor melalui permukaan tertutup dengan divergensi medan dalam volume tertutup (Hamid 2020). Hukum ini dirumuskan oleh Carl Friedrich Gauss tahun 1835, tetapi tidak dipublikasikan sampai 1867 (Anggoro 2015). Fluks berupa besaran vektor yang menggambarkan besaran dan arah aliran suatu zat atau properti. Fluks sebagai integral permukaan tegak lurus terhadap medan vektor di atas suatu permukaan.

Teorema Divergensi Gauss adalah teorema yang digunakan untuk menghitung fluida (berupa zat cair dan gas) dari suatu benda (Lusiana et al. 2021). Pembuktian teorema ini telah dilakukan oleh Markvorsen berjudul "*The direct Flow parametric Proof of Gauss' Divergence Theorem revisited*" (Markvorsen 2006). Namun, hingga saat ini belum ada yang mencoba membuktikan teorema ini dengan mengimplementasikannya pada objek-objek sekitar. Oleh karena itu, peneliti mencoba membuktikannya ke suatu objek. Di mana pembuktian ini berguna untuk memperlihatkan kepada berbagai individu bahwa pada matematika itu mempunyai keterkaitan dengan lingkungan sekitar. Penerapan teorema Divergensi Gauss dapat diterapkan pada benda-benda yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Benda yang dimaksud adalah benda yang memuat zat cair dan gas, yang mana kedua zat tersebut memiliki pergerakan (arah) pada suatu benda. Contoh pada zat cair berupa pipa dan selang memuat air yang mengalir sebagai suatu zat yang bergerak dan memiliki arah, sedangkan contoh pada zat gas dapat berupa ban, balon, bola voli, dan lain sebagainya.

Pada penelitian ini, objek penelitian yang digunakan adalah Bola Voli yang memiliki bentuk seperti bola (*Sferis*). Bola Voli adalah salah satu bola yang memiliki tekanan udara atau gas. Ketika bermain bola voli kerap sekali terjadi bahwa bola tersebut kempes, hal ini dikarenakan bola terlalu sering dimainkan (dipantul-pantulkan) sehingga tekanan udara pada bola voli berkurang. Untuk meminimalisir kejadian tersebut yaitu dengan mengetahui tekanan udara pada bola voli.

Berdasarkan penjelasan di atas, penelitian ini akan menggunakan Bola Voli sebagai objek pada pembuktian teorema Divergensi Gauss. Dimana penelitian sebelumnya hanya membuktikan teorema Divergensi Gauss berdasarkan definisinya tanpa menggunakan objek nyata di sekitar. Dengan pendekatan ini, diharapkan pembaca dapat memperoleh pengetahuan baru tentang bola voli yang sering digunakan dan mendapatkan pengetahuan baru mengenai penerapan teorema Divergensi Gauss

KAJIAN TEORI

INTEGRAL

Integral adalah bentuk penjumlahan berkesinambungan (kontinu) yang merupakan anti turunan atau kebalikan dari turunan (Widjajakusuma 2023). Jika $F(x)$ antiturunan dari $f(x)$, maka:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \boldsymbol{F(x)} + \boldsymbol{c} \tag{1}$$

Keterangan :

$\int$ = Notasi Integral

$f(x)$ = Fungsi Integran

$F(x)$ = Fungsi Integral Umum

c = Konstanta Pengintegralan

SIFAT-SIFAT INTEGRAL

Baik integral tentu maupun integral tak tentu memiliki sifat yang hampir sama. Berikut ini dua sifat integral beserta pembuktiannya (Purnomo 2024).

$$\int_a^b K\,dx = K(b-a) \tag{2}$$

Bukti: $\int_a^b K\,dx = (Kx)_a^b$

$= Kb - Ka$

$= K(b-a)$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{3}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx &= (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) \\ &= \big(F(b)-F(a)\big) + \big(G(b)-G(a)\big) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

Keterangan :

a = Batas Bawah

b = Batas Atas

K = Konstanta yang diintegralkan

f(x) dan g(x) = Fungsi yang diintegralkan

JENIS-JENSI VEKTOR

Vektor satuan adalah vektor dengan Panjang satu satuan Panjang. Adapun Vektor basis dalam R^3 adalah vektor-vektor satuan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ yang masing-masing berimpit dan searah dengan sumbu-sumbu X, Y, dan Z positif dan berpangkal di titik 0. Vektor-vektor satuan $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, dan $\boldsymbol{k}$ yang searah dengan sumbu-

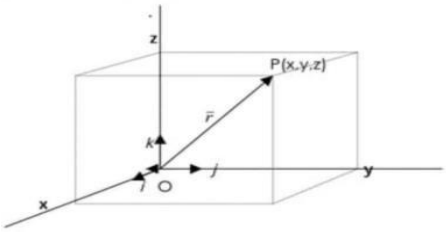
sumbu X, Y, dan Z positif disebut arah vector. Cosinus sudut-sudut tersebut disebut cosinus arah dengan

$$\cos\alpha = \frac{\overline{A_x}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} = \frac{A_x}{|A|} \quad (4)$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{A_y}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} = \frac{A_y}{|A|} \quad (5)$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{A_z}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}} = \frac{A_z}{|A|} \quad (6)$$

Keterangan:
$\cos\alpha$ = Sudut Pada Sumbu X
$\cos\beta$ = Sudut Pada Sumbu Y
$\cos\gamma$ = Sudut Pada Sumbu Z
A_x = Vektor A yang searah sumbu X
A_y = Vektor A yang searah sumbu Y
A_z = Vektor A yang searah sumbu Z
$|A|$ = Panjang Vektor A
Sehingga vektor satuan dapat ditulis menjadi $n = \cos\alpha\bar{\imath} + \cos\beta\bar{\jmath} + \cos\gamma\,\bar{k}$



Gambar 1. Ilustrasi Vektor Di Ruang Tiga Dimensi

FUNGSI VEKTOR

Konsep fungsi vektor mempunyai bunyi : "Fungsi bernilai vektor adalah suatu aturan yang memadankan setiap t ϵ R dengan tepat satu vektor $\bar{F}(t) \in R^2$ dan $\bar{F}(t) \in R^3$

Dalam ruang R^2, Fungsi Vektor A(t) Bisa Ditulis Dengan:

$$A(t) = A_x(t)\bar{\imath} + A_y(t)\bar{\jmath} \quad (7)$$

Dalam ruang R^3, Fungsi Vektor A(t) Bisa Ditulis Dengan:

$$A(t) = A_x(t)\bar{\imath} + A_y(t)\bar{\jmath} + A_z(t)\bar{k} \quad (8)$$

Keterangan :
$\bar{F}(t)$ dan A(t) = Fungsi Vektor
R^2 = Ruang Dua Dimensi
R^3 = Ruang Tiga Dimensi
$A_x(t)\bar{\imath}$ = Fungsi Vektor Pada Arah Sumbu X
$A_y(t)\bar{\jmath}$ = Fungsi Vektor Pada Arah Sumbu Y
$A_z(t)\bar{k}$ = Fungsi Vektor Pada Arah Sumbu Z

PERSAMAAN BOLA

Persamaan bola merupakan suatu bola (tepatnya kulit bola) yang didefiniskan sebagai kumpulan titik-titik dalam ruang dimensi yang berjarak sama terhadap suatu titik tetap (pusat bola), dapat dinyatakan dengan menggunakan suatu persamaan. Persamaan bola dengan pusat P jari-jari r adalah:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (9)$$

Keterangan:
r = Jari-Jari
x, y, dan z = Sebarang Titik Koordinat

GRADIEN DAN DIVERGENSI

Definisi Gradien : Operator nabla jika dikenakan pada sebuah fungsi skalar f(x, y, z) akan membentuk gradien dari f(x, y, z) yang ditulis dengan notasi ∇f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) f \quad (10)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}\right)$$

Keterangan :
∇f = Gradien
$\frac{\partial f}{\partial x}$ = Turunan Fungsi f pada x
$\frac{\partial f}{\partial y}$ = Turunan Fungsi f pada y
$\frac{\partial f}{\partial z}$ = Turunan Fungsi f pada z

Definisi Divergensi: Misalkan F = Mi + Nj + Pk adalah medan vektor yang bersifat bahwa turunan parsial pertama dari M, N, dan P. Maka

$$dif\ f = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (11)$$

Keterangan:
$dif\ f$ = Divergensi
$\frac{\partial M}{\partial x}$ = Turunan Pertama dari M pada x
$\frac{\partial N}{\partial y}$ = Turunan Pertama dari N pada y
$\frac{\partial P}{\partial z}$ = Turunan Pertama dari P pada z (Varberg, Purcell, and Rigdon 2008)

FLUKS MEDAN VEKTOR MENEMBUS PERMUKAAN

Misalkan G suatu permukaan dua sisi yang mulus demikian dan anggap bahwa ia terendam di dalam fluida dengan suatu medan kecepatan kontinu F (x, y, z). Jika ∇S adalah luas sepotong kecil dari G, maka di sana F hampir konstan, dan volume fluida ∇V yang melewati potongan dalam arah normal satuan **n** adalah

$$\nabla V \approx F \cdot n\ \Delta S \quad (12)$$

∇V = Volume Fluida

n = Vektor Normal Satuan
ΔS = Luas sepotong kecil pada G (Varberg et al. 2008)

TEOREMA DIVERGENSI GAUSS

Teorema Divergensi Gauss: "Misalkan **F = Mi + Nj + Pk** berupa medan vektor sedemikian sehingga M, N, dan P mempunyai turunan-turunan parsial pertama yang kontinu pada benda pejal **S** dengan perbatasan ∂S. Jika **n** menyatakan normal satuan sebelah luar terhadap ∂S, maka :

$$\iint_{\partial S} F.n\, dS = \iint_{S} dif\ F\, dV \tag{13}$$

Dalam perkataan lain, fluks F yang melewati perbatasan suatu arah tertutup di ruang tiga adalah integral lipat tiga dari divergensinya atas daerah tersebut".
Keterangan :
F = Medan Vektor
M, N, dan P = Fungsi Vektor
S = Benda Pejal (Permukaan)
∂S = Perbatasan Pada Permukaan
n = Vektor Normal Satuan
$dif\ F$ = Divergensi F (Varberg et al. 2008)

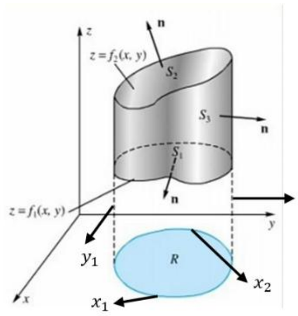
METODE

Pada penelitian ini menggunakan jenis penelitian kualitatif deskriptif karena penelitian dilakukan dengan instrument studi pustaka. Jenis pengumpulan data yang digunakan adalah observasi deskriptif karena penelitian ini mengamati situasi obyek (Abdussamad 2021). Metode yang digunakan penelitian ini adalah metode pembuktian langsung terhadap bunyi teorema dengan menggunakan konsep vektor, sifat-sifat integral, dan turunan. Metode langsung sendiri diawali dengan rancangan, percobaan atau hipotesis dengan menggunakan logic sampai ke pernyataan kesimpulan (Endra 2017).

Berdasarkan uraian jenis penelitian di atas, maka tahapan penelitian yang membuktikan fluida pada bola voli menggunakan Teorema Divergensi Gauss yaitu Pertama yaitu mengetahui dan memahami makna bunyi Teorema Divergensi Gauss. Dengan memahami teorema divergensi gauss dapat mempermudah peneliti dalam menentukan bagian mana yang diketahui, ditanya, dan yang akan dibuktikan. Kedua menganalisis bentuk objek yang akan diteliti lalu tentukan persamaan parametriknya. Pada penelitian ini peneliti menggunakan objek bola voli, sehingga persamaan parametrik bola voli sama dengan persamaan parametrik pada bola. Ketiga menentukan persamaan fungsi vektor berdasarkan bentuk objek yang diteliti. Persamaan fungsi vektor ini adalah persamaan yang memiliki diferensial (turunan). Lalu, Keempat mensubstitusikan bagian yang telah diketahui ke dalam Teorema Divergensi Gauss. Terbukti apabila hasil kedua ruas sama dan sebaliknya tidak terbukti apabila hasil kedua ruas berbeda

HASIL DAN PEMBAHASAN

PEMBUKTIAN TEOREMA DIVERGENSI GAUSS PADA BENDA PEJAL



Gambar 2. Ilustrasi Benda Pejal Pada R³

Diketahui :
S_1, S_2, dan S_3 adalah permukaan bawah, atas, dan samping, yang memiliki batas $x_1 \le x \le x_2$; $y_1 \le y \le y_2$; $f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)$
$n = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k}$
R adalah permukaan bidang-xy
$dif\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
Karena $n = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k}$ dan $F = Mi + Nj + Pk$ maka:

$$\begin{aligned}\iint_{\partial S}(F.n)dS &= \iint_{\partial S}(M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}) \cdot (\cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k})\, dS \\ &= \iint_{\partial S} \mathrm{M}\,\mathbf{i}\,(\cos\alpha\, \boldsymbol{i}) + \mathrm{N}\,\mathbf{j}\,(\cos\beta\, \boldsymbol{j}) + \mathrm{P}\,\mathbf{k}\,(\cos\gamma\, \boldsymbol{k})\, dS \\ &= \iint_{\partial S} [(\mathrm{M}\cos\alpha\,) + (\mathrm{N}\cos\beta\,) + (\mathrm{P}\cos\gamma\,)]\, dS \\ &= \iint_{\partial S} [(\mathrm{M}\cos\alpha\, \boldsymbol{i}) + (\mathrm{N}\cos\beta\, \boldsymbol{j}) + (\mathrm{P}\cos\gamma\, \boldsymbol{k})]\, dS\end{aligned}$$

Karena $dif\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$ maka:

$$\iiint_S div\ F\, dV = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

Akan dibuktikan bahwa :

$$\boldsymbol{\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iiint_S div\ F\ dV}$$

Bukti:
Pembuktian Dari Ruas Kiri Ke Ruas Kanan:

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iint_{\partial S} (\mathrm{M}\cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \mathrm{N}\cos\beta\, \boldsymbol{j} + \mathrm{P}\cos\gamma\, \boldsymbol{k})\, dS$$

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iint_{\partial S} (\mathrm{M} \cos\alpha\, \boldsymbol{i})\, dS + \iint_{\partial S}(\mathrm{N}\ \cos\beta\, \boldsymbol{j})\, dS + \iint_{\partial S}(\mathrm{P}\ \cos\gamma\, \boldsymbol{k})\, dS$$

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iint_{\partial S} [\mathrm{M}\,(x_2, y, z) - \mathrm{M}(x_1, y, z)]\ dy\, dz + \iint_{\partial S}[\mathrm{N}\,(x, y_2, z) - \mathrm{N}(x, y_1, z)]\ dx\, dz + \iint_{\partial S}[P(x, y, f_2(x,y)) - P(x, y, f_1(x,y))]dx\, dy$$

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iint_{\partial S}\left[\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial M}{\partial x}dx\right]\ dy\, dz + \iint_{\partial S}\left[\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial N}{\partial y}dy\right]dx\, dz + \iint_{\partial S}\left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial P}{\partial z}dz\right]\ dx\, dy$$

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iiint_S \frac{\partial M}{\partial x}dV\ + \iiint_S \frac{\partial N}{\partial y}dV\ + \iiint_S \frac{\partial P}{\partial z}dV$$

$$\iint_{\partial S}(F.n)dS = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

$\iint_{\partial S}(F.\bar{n})dS = \iiint_S div\ F\ dV$ **(Terbukti)**

Pembuktian dari ruas kanan ke ruas kiri

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) dV + \iiint_S \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) dV + \iiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S}\left[\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial M}{\partial x}dx\right]\ dy\, dz + \iint_{\partial S}\left[\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial N}{\partial y}dy\right]dx\, dz + \iint_{\partial S}\left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial P}{\partial z}dz\right]\ dx\, dy$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S} [M(x_2 - x_1]\ dy\, dz + \iint_{\partial S}[N(y_2 - y_1]\, dx\, dz + \iint_{\partial S}[P(f_2(x, y) - f_1(x, y)]\ dx\, dy$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S} [\mathrm{M}\,((x_2, y, z) - (x_1, y, z))]\ dy\, dz + \iint_{\partial S}[(x, y_2, z) - (x, y_1, z)]\, dx\, dz + \iint_{\partial S}[P(x, y, f_2(x,y)) - (x, y, f_1(x,y))]\ dx\, dy$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S}(M\ cos\ \alpha\ \boldsymbol{i}\ )dS + \iint_{\partial S}(N\ cos\ \beta\ \boldsymbol{j}\ )dS + \iint_{\partial S}(P\ cos\ \gamma\ \boldsymbol{k}\ )dS$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S}(M\ cos\ \alpha\ \boldsymbol{i} + N\ cos\ \beta\ \boldsymbol{j} + P\ cos\ \gamma\ \boldsymbol{k})dS$$

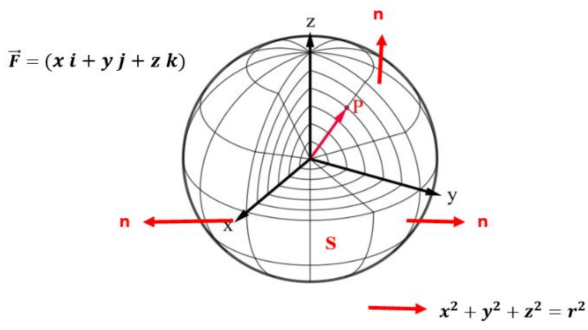
$\iiint_S div\ F\ dV = \iint_{\partial S}(F.n)dS$ **(Terbukti)**

PEMBUKTIAN TEOREMA DIVERGENSI GAUSS PADA BOLA VOLI

Dari data yang peneliti dapat diketahui bahwa ukuran dari diameter bola voli adalah 20 cm. Maka dari itu, terapkanlah teorema divergensi gauss pada bola voli. Berikut gambar ilustrasinya

Gambar 3. Ukuran Bola Voli

Pada **Gambar 3** dapat dilihat bahwa bola voli berbentuk lingkaran dengan diameter 20 cm. Bola voli tidak sama seperti bola lainnya, karena di dalam boli voli terdapt zat gas yang apabila dipantulkan terus menerus zat gas pada bola voli tersebut akan berkurang sedikit demi sedikit. Volume zat gas (fluks) itulah yang akan dihitung mengguakan Teorema Divergensi Gauss. Definisi teorema divergensi gauss yaitu menghubungkan fluks medan vektor melalui permukaan tertutup dengan divergensi medan dalam volume tertutup. Berdasarkan definisi tersebut dengan menggunakan teorema divergesi gauss, kita dapat mengetahui volume zat gas yang terdapat pada bola voli sekaligus membuktikan hubungan antara fluks medan vektor melalui permukaan tertutup dengan divergensi medan dalam volume tertutup. Perhatikan gambar ilustrasi dari bola voli di bawah untuk melakukan pembuktian



Gambar 4. Ilustrasi Bola Voli

Dari gambar di atas kita dapat disimpulkan bahwa diameter bola voli adalah 20 cm dan jari-jari bola voli adalah 10 cm

Diketahui :

Persamaan parametrik pada bola:

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

g (x, y, z): $x^2 + y^2 + z^2 = 10^2$

r = 10

$\vec{\boldsymbol{F}} = (x, y, z) = (x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k})$

Akan dibuktikan bahwa: $\iint_{\partial S} (F.\bar{n})dS = \iiint_S div\ F\ dV$

Langkah Pertama: mencari vektor normal satuan pada fungsi g menggunakan gradien (diferensial) fungsi g

$\mathrm{g(x,y,z)}: x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0$

$\overline{\nabla}\mathrm{g} = \frac{\partial g}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial z}\bar{k}$

$= \frac{\partial x^2+y^2+z^2-100}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial x^2+y^2+z^2-100}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial x^2+y^2+z^2-100}{\partial z}\bar{k}$

$\overline{\nabla}\mathrm{g} = 2x\,\bar{\imath} + 2y\,\bar{\jmath} + 2z\,\bar{k} = (2x, 2y, 2z)$

$\vec{n} = \frac{\overline{\nabla}\mathrm{g}}{|\overline{\nabla}\mathrm{g}|}$

$= \frac{2x, 2y, 2z}{\sqrt{2^2x^2+2^2y^2+2^2z^2}}$

$= \frac{2(x,y,z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}$

$= \frac{2(x,y,z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$= \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$= \frac{(x,y,z)}{10}$

Langkah kedua: mengalikan $\vec{n}$ dengan fungsi medan vektor F

$F \cdot \bar{n} = (x, y, z) \cdot \frac{(x,y,z)}{10} = \frac{x^2+y^2+z^2}{10} = \frac{100}{10} = 10$

Langkah ketiga: mencari diferensial dari fungsi **F** menggunakan gradien

$F = x + y + z$

$\overline{\nabla}\mathrm{F} = \frac{\partial F}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}$

$= \frac{\partial x+y+z}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial x+y+z}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial x+y+z}{\partial z}\bar{k}$

$\overline{\nabla}\mathrm{F} = 1 + 1 + 1 = 3$

Langkah keempat: substitusikan yang telah diketahui dan hasil vektor normal $\vec{n}$ yang telah dicari ke rumus Divergensi Gauss

$$\iint_{\partial S} (F.\boldsymbol{n})dS = \iint_{\partial S} 10\ dS$$
$$= 10 \iint_{\partial S} dS$$
$$= 10(4 \cdot \pi \cdot 100)$$
$$= 4000\pi$$

$$\iiint_S div\ F\ dV = \iiint_S \nabla \cdot F\ dV$$
$$= \iiint_S 3\ dV$$
$$= 3 \iiint_S dV$$
$$= 3\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3\right)$$
$$= 4000\pi$$

Pada penelitian ini pembuktian dilakukan dengan konsep dasar integral, diferensial, dan fungsi vektor. Jika terdapat suatu benda pejal dengan permukaan tertutup yang berisi fluida (cair atau gas), maka volume fluida tersebut dapat dihitung per detik. Bayangkan terdapat partikel gas yang bergerak selama satu detik. Pergerakan satu detik tersebut mengarah pada suatu vektor. Selamat satu detik itu dapat dihitung ada berapa banyak jumlah partikel gas atau volume yang terdapat pada suatu benda selama satu detik. Volume tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus integral permukaan atau lebih mudahnya lagi menggunakan teorema divergensi gauss. Tepatnya teorema ini membahas fluks yakni medan vektor yang mengalir melalui permukaan tertutup sama dengan integral volume dari divergensi pada daerah di dalam permukaan

Untuk melakukan pembuktian terhadap teorema Divergensi Gauss ini, Langkah pertama yang akan dilakukan adalah membaca dan memahami bunyi dari teori Divergensi gauss. Selanjutnya menentukan persamaan parametrik pada bola dan fungsi medan vector. Setelah itu, analisis apakah hasilnya sama. Jika hasilnya sama, maka terbukti bahwa fluks medan vektor melalui integral permukaan sama dengan integral volume dari divergensi dalam permukaan. Begitu juga sebaliknya, jika hasilnya berbeda.

Didapatlah bahwasanya hasil integral permukaan dan integral volume dari divergensi pada bola voli adalah sama yaitu sama-sama 4000π. Maka dapat disimpulkan bahwa pembuktian di tersebut terbukti. Hal ini didukung dengan teori Markvorsen berjudul "*The direct Flow parametric Proof of Gauss' Divergence Theorem revisited*" (Markvorsen 2006). Penelitian tersebut menjelaskan dan mengilustrasikan teorema divergensi gauss secara kompleks dan memvalidasi teorema divergensi gauss. Disimpulkan bahwasanya teorema divergensi gauss merupakan teorema dasar kalkulus.

Hal ini membuktikan bahwa teorema divergensi gauss dengan konsep-konsep integral, vektor, fungsi vektor, dan diferensial terbukti benar dan dapat diterapkan pada bola voli. Dapat disimpulkan pula bahwa integral permukaan tertutup dan integral divergensi medan vektor memiliki hubungan dalam menentukan volume pada suatu benda. Dalam menentukan volume suatu benda seperti bola tidak hanya dapat ditentukan menggunakan integral permukaan tetapi juga dapat menggunakan integral divergensi medan vektor.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkann hasil pembuktian, tekanan udara pada bola voli sebesar 4000π. Pembuktian tersebut memperoleh hasil akhir yang sama baik dihitung menggunakan rumus integral permukaan maupun menggunakan integral volume dari divergnesi pada permukaan. Maka hal ini rumus integral permukaan maupun rumus integral volume dari divergnesi pada permukaan memiliki suatu hubungan. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa pembuktian Teorema Divergensi Gauss pada bola voli tersebut terbukti dan dapat diterapkan dengan benar.

SARAN

Peneliti berharap agar penelitian ini bisa bermanfaat bagi pembacanya. Peneliti juga berharap agar kedepannya penelitian ini dapat dikembangkan dengan lebih baik lagi dan dapat diaplikasikan terhadap objek yang lain untuk pembuktian teorema Divergensi Gauss. Peneliti juga mengharapkan kritik serta saran yang dapat membangun guna memperbaiki kekurangan peneliti baik dalam hal penulisan kata-kata maupun pembuktian yang telah disampaikan agar peneliti dapat menulis makalah penelitian ini dengan lebih baik lagi kedepannya

DAFTAR PUSTAKA

Abdussamad, Zuchri. 2021. *Metode Penelitian Kualitatif*. edited by P. Rapanna. Makassar: CV. Syakir Media Press.

Anggoro, Bambang Sri. 2015. "Sejarah Teori Peluang Dan Statistika." *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika* 6(1):13–24.

Dina, Nur, Meylaila Khasanah, and Rina Febriana. 2024. "Filosofi Kalkulus Dalam Sejarah Matematika." 6(1):43–51.

Endra, Febri. 2017. *Pengantar Metodologi Penelitian (Statistika Praktis)*. Sidoarjo: Zifatama Jawara.

Hamid, Abdul. 2020. *Matematika Untuk Fisika 2*. Aceh: Syah Kuala University Press.

Lusiana, Arief Muliawan, Ratnadewi, Erwinsyah Satria, Herman Hi. Tjollen. Taba, Tanwir, Juarni Siregar, Ahmad Yani, A. Sediyo Adi Nugraha, and Handini Widyastuti. 2021. *FISIKA TERAPAN*. edited by D. U. Sutiksno, Ratnadewi, and I. Aziz. Yogyakarta: ZAHIR PUBLISHING.

Markvorsen, Steen. 2006. "The Direct Flow Parametric Proof of Gauss ' Divergence Theorem Revisited." *Department of Mathematics, Technical University of Denmark* 1–24.

Purnomo, Dwi. 2024. *KALKULUS INTEGRAL*. Edisi Revi. Denpasar Selatan: Media Nusa Creative.

Siregar, Nur Fauziah. 2020. "KESULITAN MAHASISWA DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIS POKOK BAHASAN SIFAT URUTAN PADA BILANGAN REAL." *Institut Agama Islam Negeri Padangsidimpuan* 01:45–54.

Suwanti, Vivi, and Trija Fayeldi. 2018. "Analisis Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Dalam Menyelesaikan Masalah Pembuktian Pernyataan Matematika." *Jurnal Tadris Matematika* 1(2):175–84. doi: 10.21274/jtm.2018.1.2.175-184.

Varberg, Dale, Edwin J. Purcell, and Steven E. Rigdon. 2008. *Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid 2*. Kesembilan. edited by L. Simarmata. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Widjajakusuma, Jack. 2023. *Kalkulus Dasar*. Jawa Tengah: Penerbit Amerta Media.