

**PENERAPAN KONTROL KAMPANYE, PEMBERIAN HUKUMAN, DAN PERBAIKAN SISTEM PADA  
MODEL MATEMATIKA KORUPSI****Ajeng Sekar Probowati**

Dapertemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang

Email: [sekaaar2@gmail.com](mailto:sekaaar2@gmail.com)**Zulaikha**

Dapertemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang

Email: [zulaikha@walisongo.ac.id](mailto:zulaikha@walisongo.ac.id)**Aini Fitriyah**

Dapertemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang

Email: [ainifitriyah@walisongo.ac.id](mailto:ainifitriyah@walisongo.ac.id)\***Abstrak**

Dalam artikel ini, fokus pada penerapan kontrol kampanye, hukuman, dan perbaikan sistem dalam model matematika korupsi, yang ditandai dengan empat kompartemen: Rentan (S), Korup (C), Dipenjara (J), dan Jujur (H). Tujuan utama kontrol optimal dalam model ini adalah untuk meminimalkan populasi individu yang Korup dan Dipenjara, juga untuk meminimalkan biaya terkait dari setiap tindakan kontrol. Strategi pengendalian yang optimal dapat diturunkan secara analitis menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan selanjutnya diselesaikan secara numerik melalui metode *Forward-Backward Sweep*. Simulasi numerik secara konsisten menunjukkan efektivitas penerapan pengendalian kampanye, hukuman, dan perbaikan sistem dalam mengurangi tingkat korupsi secara signifikan. Secara khusus, langkah-langkah ini menghasilkan pengurangan yang signifikan pada individu yang korup dan dipenjara, sehingga menggambarkan keefektifan kontrol dalam memerangi korupsi dalam sistem masyarakat.

**Kata Kunci:** Kontrol Optimal, Model Matematika Korupsi, Prinsip Minimum Pontryagin, Metode *Sweep* Maju Mundur.

**Abstract**

*In this paper, the focus is on the application of campaign control, punishment, and system improvement within a mathematical model addressing corruption, characterized by four compartments: Susceptible (S), Corrupt (C), Jailed (J), and Honest (H). The primary objective of optimal control in this model is to minimize the populations of both Corrupt and Jailed individuals, alongside minimizing the associated costs of each control measure. The optimal control strategies can be derived analytically using the Pontryagin Minimum Principle and subsequently solved numerically through the Forward-Backward Sweep method. Numerical simulations consistently demonstrate the effectiveness of implementing campaign control, punishment, and system improvement in significantly reducing corruption levels. Specifically, these measures result in notable reductions in the corrupt and jailed individuals, thereby illustrating their efficacy in combating corruption within societal systems.*

**Keywords:** Optimal Control, Mathematical Model of Corruption, Pontryagin Minimum Principle, Forward-Backward Sweep Method

## PENDAHULUAN

Permasalahan korupsi merupakan peristiwa yang tidak pernah ada habisnya. Hampir setiap hari media massa melaporkan terjadinya tindak pidana korupsi yang dilakukan oleh berbagai oknum yang tidak bertanggung jawab. *Indonesia Corruption Watch* (ICW) menyatakan sepanjang tahun 2022 terdapat 579 kasus korupsi yang telah ditindak, dibandingkan dengan tahun sebelumnya yaitu tahun 2021, tahun 2022 menalami peningkatan kasus sebesar 8,63% (ICW, 2023). Berdasarkan pemaparan data tersebut, menunjukkan bahwa permasalahan korupsi kian meningkat dan meluas.

Seseorang biasanya melakukan korupsi didasari oleh kesengajaan, keinginan, dan adanya kesempatan dari dalam diri sendiri untuk melakukan korupsi (Hartono, 2017). Niat korupsi muncul karena kurangnya iman dan moral seseorang. Kurangnya iman dan moral membuat seseorang mudah tergoda oleh gaya hidup konsumtif dan keinginan untuk memiliki kekayaan berlebih yang menghantarkannya kepada tindakan korupsi. Ketika keinginan untuk menjadi kaya dapat diperoleh dengan korupsi maka mudah bagi seseorang melakukan korupsi (Aprianti, 2016).

Salah satu bentuk tindak pidana korupsi adalah suap (Anggusti & Utomo, 2018). Suap seringkali dianggap sebagai tindakan yang lumrah dan wajar di masyarakat (Rosikah & Listianingsih, 2022). Oleh karena itu, perlu adanya upaya pemberantasan agar korupsi tidak semakin meluas dan dianggap sebagai hal yang wajar di masyarakat yaitu dengan cara kampanye, pemberian hukuman, dan perbaikan sistem (Spora, 2015).

Korupsi merupakan salah satu contoh penyakit sosial menular (Beniwal, 2012). Oleh karena itu, perlu diperhatikan dan dikendalikan dengan mempelajari dinamika penyebaran penyakit. Korupsi merupakan salah satu masalah dunia nyata yang dapat dimodelkan dengan pemodelan matematika. Pemodelan matematika membantu menyederhanakan hubungan antara matematika dan masalah dunia nyata yang dianggap rumit dengan terlebih dahulu menuangkannya ke dalam bentuk model matematika (Nursyarifah, Suryana, & Lidinillah, 2016).

Dari model matematika kemudian diperluas ke masalah kontrol optimal yang bertujuan untuk

mendapatkan upaya pemberantasan yang tepat. Dengan kontrol optimal, penyebaran penyakit atau dalam hal ini yaitu penyebaran korupsi dapat dimodelkan dan dioptimalkan. Fokus utama dalam pemanfaatan kontrol optimal yaitu meminimumkan pertumbuhan korupsi. Korupsi yang terjadi sudah mewabah dan meluas sehingga diperlukan suatu kontrol agar korupsi dapat ditangani dengan cepat dan tepat.

Model matematika korupsi telah beberapa kali dibahas pada penelitian sebelumnya. Sebagai contoh penelitian yang dilakukan oleh (Athitan dkk, 2018) menyatakan bahwa dengan meningkatkan kesadaran akan ketakutan terhadap hukum dan pemberitaan negatif oleh media mampu membantu menghambat penyebaran korupsi di masyarakat. Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh (Ouaziz, hamou, & El Khomssi, 2022) dengan penerapan kontrol berupa memenjarakan dan memberikan hukuman kepada individu korupsi serta memberantas korupsi melalui media dan publik juga dapat mengurangi pertumbuhan korupsi di masyarakat.

Penelitian lain juga dilakukan oleh (Fantaye & Birhanu, 2022) menyatakan bahwa kontrol berupa kampanye edukasi dan pemberian hukuman efektif untuk mengurangi penyebaran korupsi di masyarakat. Penelitian oleh (Alemneh, 2020) dengan penerapan kontrol berupa kampanye melalui media dan memasukkan pelaku korupsi ke penjara serta memberikan hukuman dapat berkontribusi dalam memerangi pertumbuhan korupsi. Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh (Wahid, Toaha, & Kasbawati, 2023) menyatakan bahwa memberantas korupsi dengan memberikan kontrol berupa kampanye edukasi, perbaikan sistem, dan represif dapat memberikan hasil yang efektif dalam mengurangi pertumbuhan korupsi.

Berdasarkan pemaparan - pemaparan tersebut, maka dalam artikel ini dilakukan pengembangan model matematika korupsi yang telah dikaji oleh Fantaye dan Birhanu (2022) dengan menambahkan satu kontrol baru berupa kontrol perbaikan sistem dan satu parameter baru berupa parameter efektivitas perbaikan sistem pada model yang diadaptasi dari model Wahid, Taoha, & Kasbawati (2023). Dengan adanya model ini, terjadi dinamika penyebaran penyakit menular atau dalam hal ini yaitu penyakit sosial menular berupa korupsi yang

terjadi diberbagai wilayah secara sederhana dapat terwakilkan dan dapat diprediksi dinamika penyebaran penyakit di masa depan sehingga memungkinkan pengendalian penyebarannya dapat ditekan (Purnamasari, Fitriyah, dan Zulaikha, 2024).

## KAJIAN TEORI

### PERSAMAAN DIFERENSIAL

Menurut Ross (1984) secara umum persamaan diferensial merupakan suatu persamaan matematika yang menggambarkan hubungan antara satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial orde  $n$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (1)$$

dengan  $t$  adalah variabel bebas,  $x(t)$  adalah variabel terikat, serta  $x^{(n)}(t)$  merupakan turunan ke  $n$  dari fungsi  $x$  terhadap variabel bebas.

### SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Secara umum, sistem persamaan diferensial linier orde pertama dengan variabel terikat  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dan variabel bebas  $t$  direpresentasikan sebagai berikut (Ross, 1984).

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + l_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + l_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + l_n(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Persamaan (2) dikatakan sebagai sistem persamaan linier omogen apabila bernilai nol untuk setiap fungsi  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sedangkan dikatakan sebagai sistem persamaan linier non homogen apabila bernilai tak nol untuk setiap fungsi  $l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Persamaan (2) juga dapat dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$x' = A\vec{x} + \vec{L}(t) \quad (3)$$

A pada persamaan (3) merupakan suatu matriks yang berukuran  $n \times n$ ,  $\vec{x}$  variabel terikat, serta  $\vec{L}(t)$  A pada persamaan adalah matriks ukuran  $n \times 1$  yang merupakan fungsi dari  $t$  sehingga persamaan (3) juga dapat dinyatakan menjadi,

$$x' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_n(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

### SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER

Boyce dan DiPrima (2001) menyatakan bahwa persamaan diferensial nonlinier merupakan sistem persamaan diferensial yang terdiri dari satu atau lebih persamaan nonlinier yang saling berhubungan. Apabila fungsi  $f$  bukan fungsi linier terhadap dalam matriks (4), maka sistem persamaan diferensialnya akan menjadi nonlinier.

Contoh :

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut.

$$x_1' = x_1x_2 + 5x_3$$

$$x_2' = 3x_1^2 - x_2 \quad (5)$$

Karena sistem persamaan (5) tidak dapat ditulis menjadi seperti persamaan (4), maka sistem persamaan (5) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier.

### KONTROL OPTIMAL

Tujuan dari kontrol optimal adalah untuk menentukan hasil yang optimal dengan mempertimbangkan kondisi dan kendala yang ada pada sistem yang sudah terbentuk. Sistem yang sering digunakan dalam kontrol optimal, biasanya berbentuk persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, ataupun yang lainnya.

Lenhart dan Workman (2007) menyatakan bahwa dalam masalah kontrol optimal yang melibatkan sistem persamaan diferensial, terdapat variabel  $\vec{u}(t)$  sebagai variabel kontrol dan variabel  $\vec{x}(t)$  sebagai variabel state. Variabel state memenuhi persamaan diferensial yang bergantung pada variabel kontrol yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)). \quad (6)$$

Masalah kontrol optimal adalah menentukan kontrol yang optimal atau dan variabel state yang memberikan nilai optimal untuk fungsi tujuan sehingga fungsi tujuan dapat dinyatakan sebagai berikut.

Berlaku untuk kasus minimumkan:

$$\min_{\vec{u}} \int_0^T f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) dt, \quad (7)$$

Dengan kendala,

$$\vec{x}'(t) = \vec{g}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) \quad (8)$$

Dan kondisi awal  $x(0) = \vec{x}_0$ . Dimana  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ ,  $\vec{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$ ,  $x_0 = [x_{10}, \dots, x_{n0}]$ , dan  $g(t, x(t), u(t)) = [g_1(t, x(t), u(t)), \dots, g_n(t, x(t), u(t))]$ .

### PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

Prinsip Pontryagin terbagi menjadi dua bagian yaitu Prinsip Minimum Pontryagin dan Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Minimum Pontryagin penting dalam menyelesaikan masalah

kontrol optimal karena prinsip ini digunakan untuk memperoleh kontrol yang optimal pada kontrol yang meminimalkan fungsi hamiltonian dari persamaan () pada waktu  $t$ . Langkah - langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut (Lenart dan Workman, 2007).

1. Membentuk fungsi Hamiltonian :  $H = f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t))$ .
2. Menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap  $\vec{u}(t)$  untuk mendapatkan kondisi optimal  $u^* = (t, \vec{x}(t), \vec{\lambda}(t))$ .
3. Mencari turunan kedua dari fungsi Hamiltonian terhadap  $\vec{u}(t)$  untuk mengetahui kontrol yang dihasilkan merupakan kontrol minimum atau maksimum. Jika turunan kedua fungsi Hamiltonian terhadap  $\vec{u}(t)$  lebih dari nol maka masalah kontrol yang diselesaikan adalah masalah kontrol minimum, dan berlaku sebaliknya.
4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*.

#### METODE SWEEP MAJU MUNDUR

Metode *sweep* maju mundur merupakan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal. Secara umum, tahapan metode *sweep* maju mundur sebagai berikut (Lenhart dan Workman, 2007).

1. Menentukan nilai awal  $\vec{u}$ .
2. Mengguakan kondisi awal  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  dan nilai  $\vec{u}$  untuk menyelesaikan persamaan *state*  $\vec{x}'$  dengan metode Rungge-Kutta orde 4 langkah maju.
3. Menggunakan kondisi transversal  $\vec{\lambda}(T)$ , nilai  $\vec{u}$ , dan persamaan *state*  $\vec{x}$  untuk menyelesaikan persamaan *costate*  $\vec{\lambda}'$  dengan metode Rungge-Kutta orde 4 langkah mundur.
4. Memperbarui nilai denan memasukkan persamaan *state* dan persamaan *costate* ke dalam karakteristik kontrol optimal.
5. Periksa konvergensi. Jika nilai eror dari iterasi ini dan iterasi terakhir sangat kecil maka tampilkan nilai saat ini, namun jika nilai erornya jauh maka kembali ke langkah 2.

#### METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah - langkah yang dilakukan adalah: (1) studi literatur, (2) konstruksi model, (3) penyelesaian masalah kontrol optimal, (4) simulasi numerik, dan (5) kesimpulan.

Pada langkah studi literatur yang dilakukan adalah mencari referensi terkait dari berbagai sumber penelitian serupa yang dilakukan oleh peneliti - peneliti sebelumnya. Kemudian melakukan modifikasi terhadap model matematika korupsi dengan menambahkan parameter dan kontrol baru. Dalam penyelesaian masalah kontrol optimal dilakukan beberapa langkah yaitu: (1) menentukan fungsi tujuan, (2) menentukan fungsi hamiltonian, (3) kondisi optimal, (4) persamaan state, (5) persamaan *costate*. Selanjutnya, yang terakhir melakukan simulasi numerik dan penarikan kesimpulan.

#### HASIL DAN PEMBAHASAN

##### KONSTRUKSI MODEL MATEMATIKA KORUPSI

Pada masalah kontrol optimal ini, tujuan yang akan dicapai adalah meminimumkan jumlah populasi *Corrupt* dan *Jailed* serta meminimumkan biaya dari masing - masing kontrol sehingga dapat dibentuk suatu fungsi tujuan sebagai berikut.

$$\min_{u_1, u_2, u_3} \int_0^T C + J + \frac{1}{2} A_1 u_1^2 + \frac{1}{2} A_2 u_2^2 + \frac{1}{2} A_3 u_3^2 dt$$

dimana  $A_1$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol kampanye,  $A_2$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol pemberian hukuman, dan  $A_3$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol perbaikan sistem, serta  $u_1$ ,  $u_2$  dan  $u_3$  adalah kontrol yang akan diminimumkan.

Jika masalah kontrol optimal memenuhi persyaratan Prinsip Minimum Pontryagin, maka masalah tersebut dapat diselesaikan. Berikut adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

1. Fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H = C + J + \frac{1}{2}A_1u_1^2 + \frac{1}{2}A_2u_2^2 + \frac{1}{2}A_3u_3^2 \\
 + \lambda_1 \left( \Lambda - (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} \right. \\
 - (\mu + \alpha)S + \gamma(1 - \alpha)J + \omega H \\
 \left. - \rho u_3 S \right) \\
 + \lambda_2 \left( (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} \right. \\
 - (\mu + \alpha + \delta)C - u_2 C - \rho u_3 C \left. \right) \\
 + \lambda_3 (\delta C - (\mu + \alpha\gamma)J + u_2 C) \\
 + \lambda_4 (\alpha(S + C + \gamma J) - (\mu + \omega)H \\
 + \rho u_3 S + \rho u_3 C)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin, fungsi Hamiltonian dapat diselesaikan secara optimal jika memenuhi tiga kondisi yaitu kondisi optimal, persamaan *state*, dan persamaan *costate* (Norasia dkk, 2022).

## 2. Kondisi Optimal

Kondisi optimal diperoleh apabila turunan pertama fungsi Hamiltonian terhadap  $u_1$ ,  $u_2$ , dan  $u_3$  sama dengan nol (Zulaikha, Trislowati, dan Fadhillah, 2007).

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$A_1 u_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) \left( \frac{\beta CS}{\theta + C} \right) = 0$$

Nilai  $u_1$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_1 = \frac{\beta CS(\lambda_1 + \lambda_2)}{A_1(\theta + C)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$A_2 u_2 - \lambda_1 C + \lambda_2 C = 0$$

Nilai  $u_2$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)C}{A_2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$$

$$A_3 u_3 - \lambda_1(\rho S) - \lambda_2(\rho C) + \lambda_4(\rho S + \rho C) = 0$$

Nilai  $u_3$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\rho S) + (\lambda_2 - \lambda_4)(\rho C)}{A_3}$$

Sehingga diperoleh nilai kondisi optimal sebagai berikut.

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{\beta CS(\lambda_1 + \lambda_2)}{A_1(\theta + C)} \right) \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)C}{A_2} \right) \right\}$$

$$u_3^*$$

$$= \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\rho S) + (\lambda_2 - \lambda_4)(\rho C)}{A_3} \right) \right\}$$

Sedangkan turunan kedua dari fungsi Hamiltonian pada persamaan () terhadap  $u_1$ ,  $u_2$ , dan  $u_3$  adalah

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_1} = A_1$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_2} = A_2$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_3} = A_3$$

dengan  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  merupakan sebuah bilangan positif sehingga nilai turunan kedua dari fungsi Hamiltonian adalah bilangan positif. Oleh karenanya, jenis kontrol yang dihasilkan adalah kontrol minimum.

## 3. Persamaan State

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Lambda - (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} - (\mu + \alpha)S + \gamma(1 - \alpha)J + \omega H - \rho u_3 S$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} - (\mu + \alpha + \delta)C - u_2 C - \rho u_3 C$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \delta C - (\mu + \alpha\gamma)J + u_2 C$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \alpha(S + C + \gamma J) - (\mu + \omega)H + \rho u_3 S + \rho u_3 C$$

dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$ ,  $C(0) = C_0$ ,  $J(0) = J_0$ , dan  $H(0) = H_0$ .

## 4. Persamaan Costate

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = & (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \frac{\beta C}{\theta + C} \\ & + \lambda_1(\mu + \alpha + \rho u_3) \\ & - \lambda_4(\alpha + \rho u_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = & -1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \frac{\beta S\theta}{(\theta + C)^2} \\ & + \lambda_2(\mu + \alpha + \delta + u_2 + \rho u_3) \\ & - \lambda_3(\delta + u_2) - \lambda_4(\alpha + \rho u_3) \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial J} = \lambda_3(\mu + \alpha\gamma) - \gamma(1 - \alpha)\lambda_1 - \lambda_1(\alpha\gamma) - 1$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial H} = (\mu + \omega)\lambda_1 - \lambda_1\omega$$

dengan kondisi transversal  $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$ .

#### PENYELESAIAN MASALAH KONTROL OPTIMAL

Pada masalah kontrol optimal ini, tujuan yang akan dicapai adalah meminimumkan jumlah populasi *Corrupt* dan *Jailed* serta meminimumkan biaya dari masing – masing kontrol sehingga dapat dibentuk suatu fungsi tujuan sebagai berikut.

$$\min_{u_1, u_2, u_3} \int_0^T C + J + \frac{1}{2}A_1u_1^2 + \frac{1}{2}A_2u_2^2 + \frac{1}{2}A_3u_3^2 dt$$

dimana  $A_1$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol kampanye,  $A_2$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol pemberian hukuman, dan  $A_3$  adalah bobot yang berhubungan dengan biaya kontrol perbaikan sistem, serta  $u_1$ ,  $u_2$  dan  $u_3$  adalah kontrol yang akan diminimumkan.

Jika masalah kontrol optimal memenuhi persyaratan Prinsip Minimum Pontryagin, maka masalah tersebut dapat diselesaikan. Berikut adalah langkah-langkah untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

##### 5. Fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} H = C + J + \frac{1}{2}A_1u_1^2 + \frac{1}{2}A_2u_2^2 + \frac{1}{2}A_3u_3^2 \\ + \lambda_1 \left( \Lambda - (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} \right. \\ \left. - (\mu + \alpha)S + \gamma(1 - \alpha)J + \omega H \right. \\ \left. - \rho u_3 S \right) \\ + \lambda_2 \left( (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} \right. \\ \left. - (\mu + \alpha + \delta)C - u_2 C - \rho u_3 C \right) \\ + \lambda_3 (\delta C - (\mu + \alpha\gamma)J + u_2 C) \\ + \lambda_4 (\alpha(S + C + \gamma J) - (\mu + \omega)H \\ + \rho u_3 S + \rho u_3 C) \end{aligned}$$

Berdasarkan Prinsip Minimum Pontryagin, fungsi Hamiltonian dapat diselesaikan secara optimal jika memenuhi tiga kondisi yaitu kondisi optimal, persamaan *state*, dan persamaan *costate* (Norasia dkk, 2022).

##### 6. Kondisi Optimal

Kondisi optimal diperoleh apabila turunan pertama fungsi Hamiltonian terhadap  $u_1$ ,  $u_2$ , dan  $u_3$  sama dengan nol (Zulaikha, Trislowati, dan Fadhillah, 2007).

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$A_1 u_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) \left( \frac{\beta CS}{\theta + C} \right) = 0$$

Nilai  $u_1$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_1 = \frac{\beta CS(\lambda_1 + \lambda_2)}{A_1(\theta + C)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$A_2 u_2 - \lambda_1 C + \lambda_2 C = 0$$

Nilai  $u_2$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)C}{A_2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$$

$$A_3 u_3 - \lambda_1(\rho S) - \lambda_2(\rho C) + \lambda_4(\rho S + \rho C) = 0$$

Nilai  $u_3$  diperoleh sebagai berikut.

$$u_3 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\rho S) + (\lambda_2 - \lambda_4)(\rho C)}{A_3}$$

Sehingga diperoleh nilai kondisi optimal sebagai berikut.

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{\beta CS(\lambda_1 + \lambda_2)}{A_1(\theta + C)} \right) \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)C}{A_2} \right) \right\}$$

$$u_3^*$$

$$= \min \left\{ 1, \max \left( 0, \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\rho S) + (\lambda_2 - \lambda_4)(\rho C)}{A_3} \right) \right\}$$

Sedangkan turunan kedua dari fungsi Hamiltonian pada persamaan () terhadap  $u_1$ ,  $u_2$ , dan  $u_3$  adalah

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_1} = A_1$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_2} = A_2$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial^2 u_3} = A_3$$

dengan  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  merupakan sebuah bilangan positif sehingga nilai turunan kedua dari fungsi Hamiltonian adalah bilangan positif. Oleh karenanya, jenis kontrol yang dihasilkan adalah kontrol minimum.

##### 7. Persamaan State

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \Lambda - (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} - (\mu + \alpha)S + \gamma(1 - \alpha)J \\ + \omega H - \rho u_3 S \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = (1 - u_1) \frac{\beta CS}{\theta + C} - (\mu + \alpha + \delta)C - u_2 C - \rho u_3 C$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \delta C - (\mu + \alpha\gamma)J + u_2 C$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \alpha(S + C + \gamma J) - (\mu + \omega)H + \rho u_3 S + \rho u_3 C$$

dengan kondisi awal  $S(0) = S_0$ ,  $C(0) = C_0$ ,  $J(0) = J_0$ , dan  $H(0) = H_0$ .

#### 8. Persamaan Costate

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S} = & (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \frac{\beta C}{\theta + C} \\ & + \lambda_1(\mu + \alpha + \rho u_3) \\ & - \lambda_4(\alpha + \rho u_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial C} = & -1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - u_1) \frac{\beta S \theta}{(\theta + C)^2} \\ & + \lambda_2(\mu + \alpha + \delta + u_2 + \rho u_3) \\ & - \lambda_3(\delta + u_2) - \lambda_4(\alpha + \rho u_3) \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial J} = \lambda_3(\mu + \alpha\gamma) - \gamma(1 - \alpha)\lambda_1 - \lambda_1(\alpha\gamma) - 1$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial H} = (\mu + \omega)\lambda_1 - \lambda_1\omega$$

dengan kondisi transversal  $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = \lambda_4(T) = 0$ .

#### SIMULASI NUMERIK

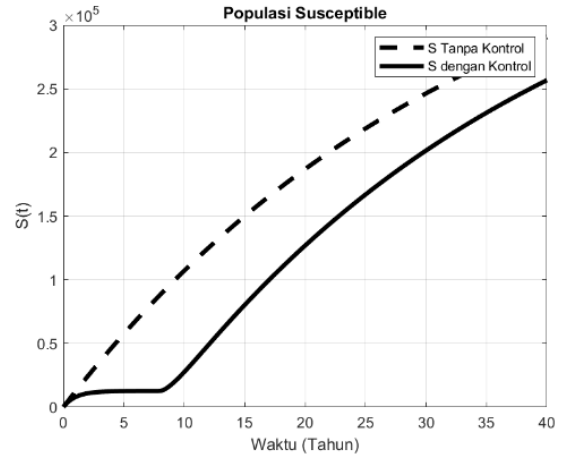
Penyelesaian numerik untuk mengoptimalkan sistem pada permasalahan ini diselesaikan menggunakan bantuan *software* MATLAB dengan menerapkan metode *Sweep* Maju Mundur. Adapun nilai dari masing - masing parameter dan nilai awal yang digunakan dalam simulasi ini adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$\Lambda$	12000	Fantaye (2022)
$\beta$	0.07	Fantaye (2022)
$\delta$	0.2	Asumsi
$\theta$	100000	Legesse (2018)
$\gamma$	0.125	Abdulrahman (2014)
$\mu$	0.160	Legesse (2014)
$\alpha$	0.014	Fantaye (2022)
$\omega$	0.0021	Fantaye (2022)
$\rho$	0.95	Wahid (2023)

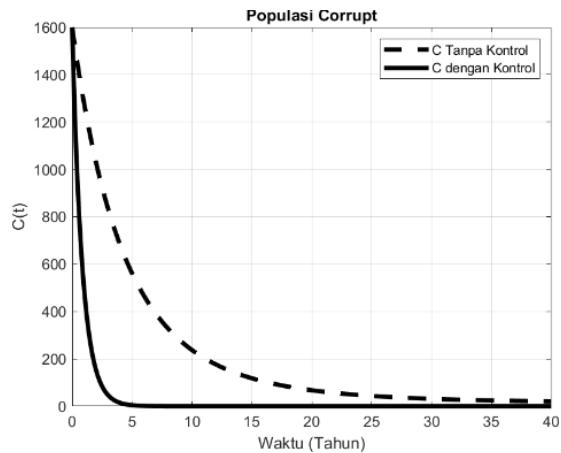
Nilai awal dari masing - masing variabel yang digunakan adalah  $S(0) = 100$ ,  $C(0) = 1600$ ,  $J(0) = 428$ , dan  $H(0) = 130000$ . Serta diberikan nilai bobot untuk masing - masing fungsi tujuan yang diminimumkan adalah  $A_1 = 0.1$ ,  $A_2 = 0.3$  dan  $A_3 = 0.5$  dengan waktu pengamatan  $T = 40$  tahun.

Pada Gambar 3 menunjukkan hasil simulasi numerik populasi *Susceptible* dengan dan tanpa kontrol. Dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible* setelah diberikan kontrol mengalami penurunan dibandingkan dengan populasi *Susceptible* sebelum diberikan kontrol.



Gambar 3. Populasi *Susceptible* dengan dan tanpa kontrol

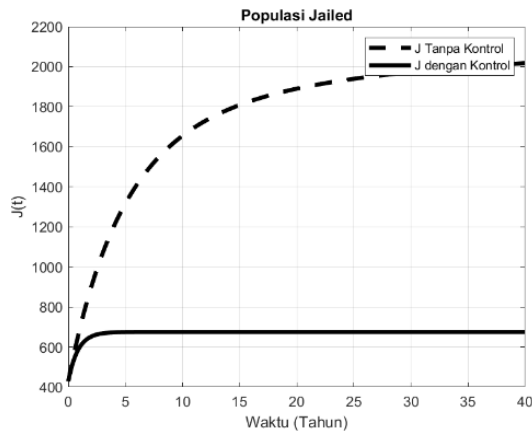
Pada Gambar 4 dapat dilihat bahwa setelah diterapkan kontrol, populasi *Corrupt* mengalami penurunan bahkan pada sekitar tahun keenam jumlah populasi *Corrupt* hampir mencapai nol.



Gambar 4. Populasi *Corrupt* dengan dan tanpa kontrol

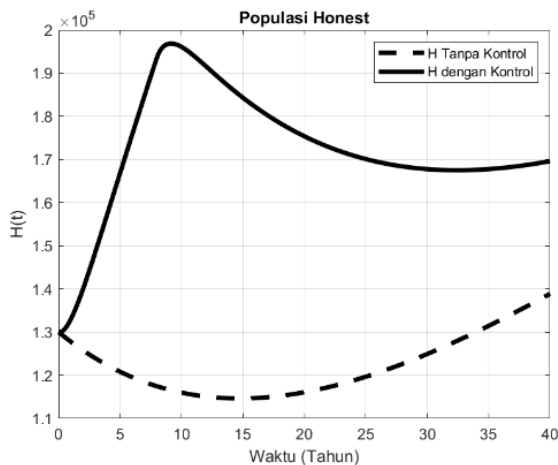
Gambar 5 menunjukkan bahwa setelah diberikan kontrol, populasi *Jailed* mengalami

peningkatan hingga sekitar tahun ketujuh namun kemudian stabil hingga akhir periode dengan jumlah total populasi sebesar 675.



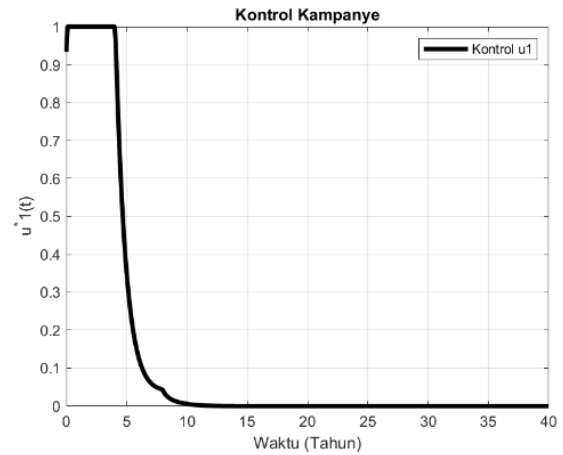
Gambar 5. Populasi *Jailed* dengan dan tanpa kontrol

Pada Gambar 6 dapat dilihat bahwa populasi *Honest* mengalami peningkatan yang signifikan setelah dilakukan penerapan kontrol.



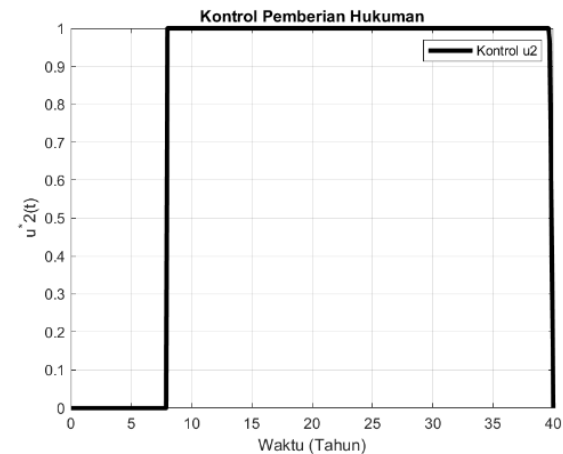
Gambar 6. Populasi *Honest* dengan dan tanpa kontrol

Pada Gambar 7 terlihat bahwa nilai efektivitas kontrol kampanye pada awal periode yaitu hanya sebesar 0.934 kemudian mengalami kenaikan mencapai nilai efektivitas maksimum sebesar 1 hingga tahun keempat. Kemudian nilai efektivitas kontrol kampanye berangsur-angsur menurun hingga tahun ke-40 mencapai nol yang artinya tidak lagi ada kontrol kampanye yang diberikan.



Gambar 7. Efektivitas Kontrol Kampanye

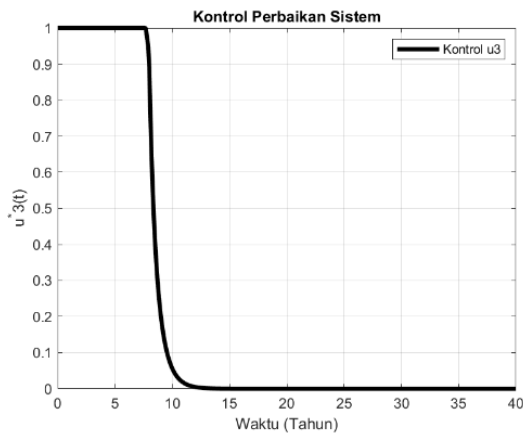
Pada Gambar 8 terlihat bahwa nilai efektivitas kontrol pemberian hukuman bernilai 0 dari tahun pertama hingga tahun kedelapan yang artinya kontrol tersebut tidak bekerja secara efektif untuk membantu mengurangi pertumbuhan korupsi. Namun, setelah itu mengalami kenaikan pesat hingga mencapai nilai efektivitas maksimum yaitu 1 dan konstan hingga periode terakhir kemudian berhenti.



Gambar 8. Efektivitas Kontrol Pemberian Hukuman

Pada Gambar 9 terlihat bahwa nilai efektivitas maksimum pemberian kontrol berupa perbaikan sistem mencapai nilai maksimum yaitu 1 dari tahun pertama hingga mendekati tahun kedelapan. Namun, setelah itu berangsur-angsur mengalami penurunan hingga tahun ke-40 mencapai nilai minimum yaitu 0 yang artinya tidak ada lagi pemberian kontrol berupa perbaikan sistem.





Gambar 9. Efektivitas Kontrol Perbaikan Sistem

## PENUTUP

## SIMPULAN

Pada penelitian ini dilakukan suatu kontrol optimal terhadap model matematika korupsi dengan penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Kemudian disimulasikan menggunakan bantuan *software* MATLAB untuk mengetahui perbandingan populasi dengan dan tanpa kontrol. Dari simulasi numerik menunjukkan hasil yang sesuai dengan fungsi tujuan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penerapan kontrol kampanye, pemberian hukuman, dan perbaikan sistem efektif dalam mengurangi jumlah populasi *Corrupt* dan populasi *Jailed*.

## SARAN

Pada penelitian selanjutnya dapat disimulasikan menggunakan data-data riil yang sebelumnya diubah terlebih dahulu menjadi sebuah parameter sehingga hasilnya akan lebih efektif untuk menurunkan pertumbuhan korupsi di kehidupan nyata.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alemneh, H. T. 2020. Mathematical modeling, analysis, and optimal control of corruption dynamics. *Journal of Applied Mathematics*. 1-13.
- Anggusti, M., & Utomo, U. 2018. Analisis Hukum Terhadap Tindak Pidana Korupsi dengan Penyalahgunaan Jabatan dalam Bentuk Penyuapan Aktif (Studi Putusan Nomor: 195/PID. SUS/TPK/2017/PN SBY). *Jurnal Hukum PATIK*. 7(2), 75-88.

- Aprianti, M. N. 2016. Corruption in the Study of Pancasila Studies. *Jurnal Scientia Indonesia*. 2(2): 141-162.
- Athithan, S., Ghosh, M., & Li, X. Z. (2018). Mathematical modeling and optimal control of corruption dynamics. *Asian-European. Journal of Mathematics*. 11(06), 1850090.
- Beniwal, A. 2012. Corruption: A Social Disease. *The Indian Journal of Political Science*. 85-96.
- Fantaye, A. K., & Birhanu, Z. K. 2022. Mathematical model and analysis of corruption dynamics with optimal control. *Journal of Applied Mathematics*. 2022: 1-16.
- Hartanto, H. 2017. Korupsi Perbuatan Tak Bermoral Menjatuhkan Wibawa Bangsa dan Merampas Kesejahteraan Rakyat. Diunduh di <https://publikasiilmiah.ums.ac.id> tanggal 13 Februari 2023.
- Spora, T. 2015. *Kapita selekta dan beban biaya sosial korupsi*. Jakarta: Direktorat Pendidikan dan Pelayanan Masyarakat.
- Lenhart, S., & Workman, J. T. 2007. *Optimal control applied to biological models*. CRC press.
- Norasia, Y., Zulaikha, Z., Tafrikan, M., Ghani, M., & Mukama, D. S. 2022. Optimal Control of HIV-1 Spread in Combination with Nutritional Status and ARV-Treatment. (*IJCSAM*) *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, 8(2), 66-70.
- Nursyarifah, N., Suryana, Y., & Lidinillah, D. A. M. 2016. Penggunaan pemodelan matematik untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah aritmatika sosial siswa sekolah dasar. *PEDADIDAKTIKA: Jurnal Ilmiah Pendidikan Guru Sekolah Dasar*. 3(1): 138-149.
- Ouaziz, S. I., Hamou, A. A., & El Khomssi, M. 2022. Dynamics and optimal control strategies of Corruption model. *Results in Nonlinear Analysis*. 5(4): 423-451
- Purnamasari, M. K. D., Fitriyah, A., & Zulaikha, Z. (2024). MATHEMATICAL MODELLING OF THE SPREAD OF COVID-19 WITH FIRST, SECOND AND THIRD DOSES OF VACCINATION IN SEMARANG CITY. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 7(1).
- Rosikah, C. D., & Listianingsih, D. M. 2022. *Pendidikan antikorupsi: Kajian antikorupsi teori dan praktik*. Sinar Grafika

- Wahid, A., Toaha, S., & Kasbawati, K. 2023. Kontrol Optimal Model Matematika Dinamika Korupsi dengan Pemberian Edukasi dan Kampanye, Perbaikan Sistem, dan Represif. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*. 6(1): 53-69
- Watch, I. C. 2023. Laporan Hasil Pemantauan Tren Penindakan Korupsi Tahun 2022. Diunduh di <https://antikorupsi.org/> tanggal 28 Juni 2023
- Zulaikha, T., & Fadhilah, I. (2017, July). Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. In *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)* (Vol. 1, No. 1).
- Zulaikha, Z., & Norasia, Y. 2024. Optimal control of Covid-19 in Jakarta and its relationship with unity of sciences. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 3046, No. 1). AIP Publishing.