MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 No 02
Tahun 2025

INTEGRAL FRAKSIONAL DARI FUNGSI HIPERBOLIK

Syifaul Janan
Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta
e-mail: syifaul.janan@upnvj.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini menyajikan representasi integral fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik. Metode yang digunakan pada penelitian ini melibatkan representasi fungsi tersebut ke dalam bentuk deret Maclaurin, diikuti dengan analisis integral fraksionalnya, serta penentuan interval konvergensi. Selanjutnya, hasil perhitungan tersebut divisualisasikan melalui simulasi menggunakan perangkat lunak Matlab. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketika orde fraksional α mendekati 0, grafik yang diperoleh makin mendekati fungsi awal. Sebaliknya, ketika α mendekati 1, grafik tersebut makin mendekati integral dari fungsi awal tersebut.
Kata Kunci: deret Maclaurin, fungsi hiperbolik, integral fraksional, Matlab.

Abstract

This study presented a fractional integral representation of hyperbolic sine and hyperbolic cosine function. The method used in this study involved the representation of the function in the form of a Maclaurin series, followed by the analysis of its fractional integral, and the determination of convergence interval. Furthermore, the computed results were visualized through simulations using MATLAB software. The results showed that when the fractional order α approaches 0, the graph obtained is getting closer to the initial function. Conversely, when α approaches 1, the graph is getting closer to the integral of the initial function.
Keywords: *Maclaurin series, hyperbolic function, fractional integral, Matlab.*

PENDAHULUAN

Integral merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika yang memiliki cakupan teori dan aplikasi yang luas di berbagai bidang. Dalam matematika, integral digunakan untuk menghitung luas suatu bidang yang dibatasi oleh kurva, menentukan volume benda putar melalui metode cakram dan cincin, serta menghitung panjang busur suatu kurva. Selain itu, konsep integral juga banyak diaplikasikan dalam disiplin ilmu lain, seperti fisika untuk menganalisis gerak dan energi, teknik dalam perhitungan tegangan dan deformasi material, serta ekonomi dan finansial dalam pemodelan pertumbuhan investasi dan analisis keuntungan serta kerugian suatu sistem keuangan (Harini & Sari, 2020).

Seiring perkembangan matematika, konsep integral diperluas ke dalam bentuk integral fraksional, yang merupakan generalisasi dari operasi integral dengan orde *non-integer* atau fraksional. Pada tahun 1695, Leibniz adalah orang pertama yang memperkenalkan integral fraksional (Miller & Ross, 1993). Kemudian, Euler memperkenalkan fungsi gamma sebagai langkah awal dalam pengembangan integral fraksional. Pada tahun 1847, Riemann dan Liouville memperkenalkan definisi integral fraksional yang paling dikenal dan sering digunakan hingga saat ini. Integral fraksional Riemann-Liouville $I^{\alpha}(\alpha \geq 0)$ untuk fungsi $f(x)$ didefinisikan dengan (Daraghmeh et al., 2020):

$$I^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, & \alpha > 0 \\ f(x), & \alpha = 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Kajian mengenai integral fraksional telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Johansyah, dkk (Johansyah et al., 2017) melakukan kajian dasar teoritis dari integral fraksional Riemann-Liouville, sedangkan (Garrappa et al., 2019) mengkaji integral fraksional dari fungsi eksponensial dan trigonometri dengan pendekatan fungsi Mittag-Leffler. Fungsi hiperbolik juga pernah dikaji oleh (Janan & Janan, 2024) dan (Shchedrin et al., 2018) dalam bentuk turunan fraksionalnya, masing-masing dengan menggunakan pendekatan deret Maclaurin dan transformasi integral Euler. Lebih lanjut, (Chandra et al., 2023) meneliti sifat analitis dari integral fraksional Riemann-Liouville serta dimensi fraktal dari grafnya dalam ruang $\mathbb{R}^n$. (Srivastava, 2020) juga memberikan tinjauan perkembangan terkini dalam integral fraksional, dengan menyoroti aplikasinya pada persamaan "differintegral" parsial fraksional. Di samping pendekatan analitik, integral fraksional juga dikaji secara numerik numerik oleh beberapa peneliti, seperti (Cai & Li, 2020), (Ciesielski, 2024), dan (Diethelm et al., 2005).

Penelitian ini secara khusus mengkaji integral fraksional Riemann-Liouville dari fungsi hiperbolik. Fungsi hiperbolik, yang merupakan kombinasi eksponensial e^x dan e^{-x} (Stewart, 2012), akan dianalisis dalam dua bentuk utama, yaitu fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik. Kedua fungsi ini direpresentasikan dalam bentuk ekspansi deret Maclaurin untuk memperoleh integral fraksionalnya dengan batasan orde $0 < \alpha \leq 1$. Selain perhitungan analitik, penelitian ini juga menyajikan hasil simulasi visual dengan bantuan Matlab, sebuah perangkat lunak yang mengintegrasikan komputasi dan visualisasi (Gordon & Guilfoos, 2017).

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini dijelaskan beberapa definisi dan teorema mengenai fungsi hiperbolik, metode ekspansi deret, dan fungsi gamma.

Fungsi Hiperbolik

Definisi 2.1 (Stewart, 2012)

Fungsi sinus hiperbolik dengan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Fungsi cosinus hiperbolik dengan $f: \mathbb{R} \to [1, \infty)$ didefinisikan sebagai:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Metode Ekspansi Deret

Teorema 2.2 (Stewart, 2012)

Ekspansi deret Maclaurin untuk fungsi bernilai riil $f(x)$ diberikan oleh persamaan:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m \qquad (2.1)$$

dengan $f^{(m)}$ menyatakan turunan ke-m dari f dan $m!$ adalah faktorial m.

Dari persamaan (2.1), diperoleh fungsi sinus hiperbolik dalam bentuk deret Maclaurin:

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}, x \in \mathbb{R} \qquad (2.2)$$

Diperoleh juga fungsi cosinus hiperbolik dalam bentuk deret Maclaurin:

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m}, x \in \mathbb{R} \qquad (2.3)$$

Selanjutnya, dapat dicari interval konvergensi dari kedua fungsi di atas.

a. Interval Konvergensi untuk Fungsi Sinus Hiperbolik

Misalkan $C_m = \frac{1}{(2m+1)!}$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka deret pada persamaan (2.2) konvergen untuk setiap x dengan

$$\begin{aligned}
|x| &< \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2m+1)!}}{\frac{1}{(2m+3)!}} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{1}{(2m+1)!} \times (2m+3)! \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{(2m+3)!}{(2m+1)!} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} |(2m+3)(2m+2)| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Diperoleh interval konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

b. Interval Konvergensi untuk Fungsi Cosinus Hiperbolik

Misalkan $C_m = \frac{1}{(2m)!}$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka deret pada persamaan (2.3) konvergen untuk setiap x dengan

$$\begin{aligned}
|x| &< \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2m)!}}{\frac{1}{(2m+2)!}} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{1}{(2m)!} \times (2m+2)! \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{(2m+2)!}{(2m)!} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} |(2m+2)(2m+1)| \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Diperoleh interval konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

Fungsi Gamma
Definisi 2.3 (Yong, 2023)
Fungsi gamma $\Gamma(v)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t}\, dt \quad (\Re e(v) > 0),$$

dengan $t^{v-1} = e^{(v-1)\log(t)}$. Integral ini konvergen untuk setiap $v \in \mathbb{C}$ $(\Re e(v) > 0)$.
Rumus tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\Gamma(v+1) = v\Gamma(v) \quad (\Re e(v) > 0)$$

Khususnya, jika $v = n \in \mathbb{N}_0$, berlaku

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dengan $0! = 1$.

METODE

Penelitian ini dilakukan dengan metode studi literatur dan mencakup beberapa langkah utama sebagai berikut:

1. Membuktikan teorema mengenai integral fraksional dari fungsi kuasa.
2. Menentukan integral fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik dengan memanfaatkan representasi deret Maclaurin dan menganalisis selang konvergensinya.
3. Melakukan simulasi dan interpretasi menggunakan perangkat lunak Matlab.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian (Janan & Janan, 2024) dan (Shchedrin et al., 2018), fungsi hiperbolik direpresentasikan dalam bentuk turunan fraksional. Pada penelitian ini, fungsi hiperbolik akan direpresentasikan dalam bentuk integral fraksional.

Integral Fraksional dari Fungsi Kuasa

Pada bagian ini akan dijelasan teorema tentang integral fraksional dari fungsi kuasa dan contoh soalnya.

Teorema 4.1.1 Jika $f(x) = x^m$, dengan $m \geq 0$, maka

$$I^\alpha x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} x^{\alpha+m}$$

Bukti:
Berdasarkan definisi integral fraksional Riemann-Liouville pada (1.1), untuk $\alpha > 0$ dapat ditulis

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds$$

$$I^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} s^m\, ds$$

Misalkan $s = xu,\ 0 \leq u \leq 1,$ maka $ds = x\, du$, diperoleh

$$I^\alpha x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} (xu)^m x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha+m} (1-u)^{\alpha-1} u^m\, du$$

$$= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^m\, du$$

$$= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, m+1)$$

$$= \frac{x^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} x^{\alpha+m}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$I^\alpha x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} x^{\alpha+m} \tag{4.1}$$

Contoh 4.1.2 Tentukan integral fraksional dengan $\alpha = 1$ untuk fungsi $f(x) = x^5$.
Solusi:
Menggunakan persamaan (4.1), diperoleh

$$I^1 x^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma(1+5+1)} x^{1+5}$$

$$= \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(7)} x^6$$

$$= \frac{\Gamma(6)}{6\Gamma(6)} x^6$$

$$= \frac{1}{6} x^6$$

Integral Fraksional dari Fungsi Sinus Hiperbolik

Pada bagian ini akan dijelaskan integral fraksional dari fungsi sinus hiperbolik, interval konvergensi, dan simulasinya menggunakan perangkat lunak Matlab.

Berdasarkan persamaan (2.2), diperoleh bahwa

$$I^{\alpha} \sinh x = I^{\alpha}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}\right)$$

Selanjutnya, dilakukan analisis perhitungan sebagai berikut:

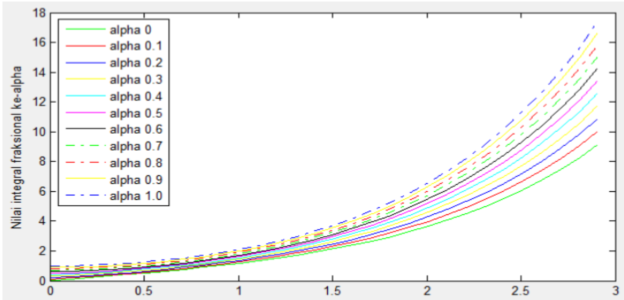
$$\begin{aligned} I^{\alpha} \sinh x &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(I^{\alpha} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}\left(I^{\alpha} x^{2m+1}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(\alpha+2m+2)} x^{\alpha+2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \frac{(2m+1)!}{\Gamma(\alpha+2m+2)} x^{\alpha+2m+1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha+2m+1}}{\Gamma(\alpha+2m+2)} \qquad (4.2) \end{aligned}$$

Misalkan $C_m = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+2)}$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka deret pada persamaan (4.2) konvergen untuk setiap x dengan

$$\begin{aligned} |x| &< \lim_{m\to\infty}\left|\frac{C_m}{C_{m+1}}\right| \\ &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+2)}}{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+4)}}\right| \\ &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+2)} \times \Gamma(\alpha+2m+4)\right| \\ &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\Gamma(\alpha+2m+4)}{\Gamma(\alpha+2m+2)}\right| \\ &= \lim_{m\to\infty}|(\alpha+2m+3)(\alpha+2m+2)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa interval konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$, yang berarti deret ini konvergen untuk semua bilangan real.

Selanjutnya, hasil analisis perhitungan tersebut disimulasikan menggunakan perangkat lunak Matlab, berikut hasilnya:



Gambar 1. Grafik dari $f(x) = I^{\alpha} \sinh x$

Gambar 1 menampilkan grafik hasil integral fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dengan berbagai nilai α dalam interval $0 < \alpha \leq 1$. Grafik ini menunjukkan bagaimana nilai integral fraksional berubah seiring dengan variasi α, yang ditandai dengan kurva berwarna berbeda.

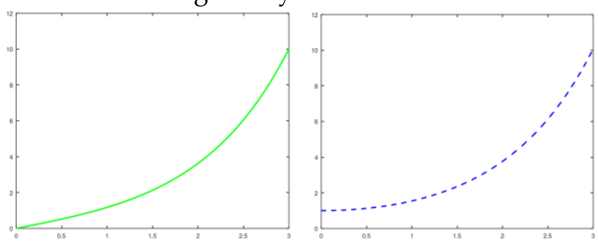
Dari grafik, terlihat bahwa pada saat α makin mendekati 0 (garis hijau), grafik makin mendekati fungsi semula, yaitu

$$f(x) = \sinh x$$

sesuai dengan sifat integral fraksional yang pada $\alpha = 0$ tidak mengubah fungsi awal. Sedangkan, saat α makin mendekati 1, maka grafik makin mendekati hasil integral dari fungsi sinus hiperbolik, yaitu

$$f(x) = \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

Berikut ilustrasi grafiknya:



Gambar 2. Grafik dari $f(x) = \sinh x$ dan $f(x) = \cosh x$

Integral Fraksional dari Fungsi Cosinus Hiperbolik

Pada bagian ini akan dijelaskan integral fraksional dari fungsi cosinus hiperbolik, interval konvergensi, dan simulasinya menggunakan perangkat lunak Matlab.

Berdasarkan persamaan (2.3), diperoleh bahwa

$$I^{\alpha} \cosh x = I^{\alpha}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m}\right)$$

Selanjutnya, dilakukan analisis perhitungan sebagai berikut:

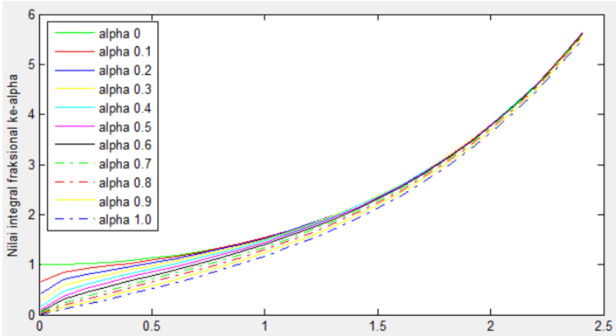
$$
\begin{aligned}
I^{\alpha} \cosh x &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(I^{\alpha} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(I^{\alpha} x^{2m} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(\alpha+2m+1)} x^{\alpha+2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \frac{(2m)!}{\Gamma(\alpha+2m+1)} x^{\alpha+2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+2m}}{\Gamma(\alpha+2m+1)} \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Misalkan $C_m = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+1)}$ dengan $m \in \mathbb{N}$, maka deret pada persamaan (4.3) konvergen untuk setiap x dengan

$$
\begin{aligned}
|x| &< \lim_{m\to\infty} \left| \frac{C_m}{C_{m+1}} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+1)}}{\frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+3)}} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha+2m+1)} \times \Gamma(\alpha+2m+3) \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\Gamma(\alpha+2m+3)}{\Gamma(\alpha+2m+1)} \right| \\
&= \lim_{m\to\infty} |(\alpha+2m+2)(\alpha+2m+1)| \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa interval konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$, yang berarti deret ini konvergen untuk semua bilangan real.

Selanjutnya, hasil analisis perhitungan tersebut disimulasikan menggunakan perangkat lunak Matlab, berikut hasilnya:



Gambar 3. Grafik dari $f(x) = I^{\alpha} \cosh x$

Gambar 3 menampilkan grafik hasil integral fraksional dari fungsi cosinus hiperbolik dengan berbagai nilai α dalam interval $0 < \alpha \leq 1$. Grafik ini menunjukkan bagaimana nilai integral fraksional berubah seiring dengan variasi α, yang ditandai dengan kurva berwarna berbeda.

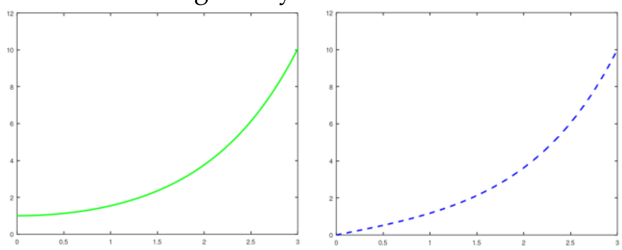
Dari grafik, terlihat bahwa pada saat α makin mendekati 0 (garis hijau), grafik makin mendekati fungsi semula, yaitu

$$f(x) = \cosh x$$

sesuai dengan sifat integral fraksional yang pada $\alpha = 0$ tidak mengubah fungsi awal. Sedangkan, saat α makin mendekati 1, maka grafik makin mendekati hasil integral dari fungsi cosinus hiperbolik, yaitu

$$f(x) = \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

Berikut ilustrasi grafiknya:



Gambar 4. Grafik dari $f(x) = \cosh x$ dan $f(x) = \sinh x$

KESIMPULAN

Penelitian ini menganalisis integral fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik, yang menghasilkan ekspansi deret yang melibatkan fungsi gamma dan fungsi kuasa. Untuk merepresentasikan kedua fungsi tersebut, digunakan deret Maclaurin, yang memungkinkan ekspansi dalam bentuk deret fungsi kuasa. Deret yang diperoleh terbukti konvergen untuk semua bilangan real x. Simulasi dengan menggunakan Matlab memperlihatkan perubahan bentuk fungsi seiring dengan variasi nilai

α. Saat nilai α mendekati 0, grafik makin mendekati fungsi awal, sementara saat α mendekati 1, grafik makin mendekati integral dari fungsi awal tersebut. Hal ini memberikan pemahaman lebih tentang pengaruh nilai α terhadap bentuk fungsi dan memberikan dasar yang kokoh untuk aplikasi integral fraksional dalam berbagai disiplin ilmu lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Cai, M., & Li, C. (2020). Numerical approaches to fractional integrals and derivatives: A review. *Mathematics*, *8*(1). https://doi.org/10.3390/math8010043

Chandra, S., Abbas, S., & Liang, Y. (2023). A note on fractal dimension of Riemann–Liouville fractional integral. *Fractals*, *32*(02), 2440001. https://doi.org/10.1142/S0218348X24400012

Ciesielski, M. (2024). Numerical Algorithms for Approximation of Fractional Integrals and Derivatives Based on Quintic Spline Interpolation. *Symmetry*, *16*(2), 252.

Daraghmeh, A., Qatanani, N., & Saadeh, A. (2020). Numerical solution of fractional differential equations. *Applied Mathematics*, *11*(11), 1100–1115.

Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., & Luchko, Y. (2005). Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *194*(6–8), 743–773.

Garrappa, R., Kaslik, E., & Popolizio, M. (2019). Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial. In *Mathematics* (Vol. 7, Issue 5). https://doi.org/10.3390/math7050407

Gordon, S. I., & Guilfoos, B. (2017). Introduction to modeling and simulation with MATLAB® and python. In *Introduction to Modeling and Simulation with MATLAB® and Python*. https://doi.org/10.1201/9781315151748

Harini, L. P. I., & Sari, K. (2020). Aplikasi integral dalam bidang ekonomi dan finansial. *E-Jurnal Matematika*, *9*(2). https://doi.org/10.24843/mtk.2020.v09.i02.p291

Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *21*(1), 267–284.

Johansyah, M. D., Nahar, J., Supriatna, A. K., & Supian, S. (2017). Kajian dasar integral dan turunan fraksional riemann-liouville. *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, *8*, 204–209.

Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John-Wily and Sons. In *Inc. New York*.

Shchedrin, G., Smith, N. C., Gladkina, A., & Carr, L. D. (2018). Exact results for a fractional derivative of elementary functions. *SciPost Physics*, *4*(6). https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.4.6.029

Srivastava, H. M. (2020). Fractional-order derivatives and integrals: Introductory overview and recent developments. *Kyungpook Mathematical Journal*, *60*(1). https://doi.org/10.5666/KMJ.2020.60.1.73

Stewart, J. (2012). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.

Yong, Z. (2023). BASIC THEORY OF Fractional Differential Equations, Third Edition. In *Basic Theory of Fractional Differential Equations, Third Edition*.