MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

PEWARNAAN-SISI PADA GRAF KOMPLET YANG MEMUAT SIKEL C_4-TERWARNA SEJATI

George Yuan Wahyu Ruswanto Kaawoan
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: george.20024@mhs.unesa.ac.ic

I Ketut Budayasa
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Misalkan G graf dan H subgraf dari G. Semua sisi graf G diberi sembarang warna sedemikian hingga terhadap pewarnaan tersebut terdapat subgaf H terwarna sejati. Namun, permasalahan ini sulit dibuktikan, sehingga diberi batasan masalah. Misalkan G graf komplet dengan n titik dengan n minimum 4 dan H subgraf dari G adalah sikel dengan 4 titik. Semua sisi graf komplet G diberi sembarang warna sedemikian hingga terhadap pewarnaan tersebut terdapat subgraf berupa sikel H terwarna sejati. Dengan penelitian ini telah dibuktikan bahwa terdapat syarat cukup di mana graf G memuat subgraf H yang merupakan sikel C_4 terwarna sejati melalui derajat warna minimum. Dalam penelitian ini telah dibuktikan juga bahwa terdapat syarat cukup di mana graf G memuat subgraf G yang merupakan sikel C_4 terwarna sejati melalui kardinalitas dari gabungan warna tetangga titik u dan warna tetangga titik v.

Kata Kunci: Pewarnaan sisi, graf komplet, graf sikel C_4, serta derajat warna minimum.

.

Abstract

Suppose G is a graph and H is a subgraph of G. All edges of graph G are given arbitrary colors such that there is a properly colored subgaph H. However, this problem is difficult to prove, thus the problem is given a constraint. Suppose G is a complete graph with n vertices with 4 as the minimum for n, and H (subgraph of G) is a cycle with 4 vertices. All edges of complete graph G are given arbitrary colors such that there is a properly colored subgraph cycle H. This study has proven that there is a sufficient condition that graph G contains a properly colored C_4 cycle through the minimum color degree. This study has also proven that there is a sufficient condition that graph G contains a properly colored C_4 cycle through the cardinality of the union of the neighboring color of vertex u and neighboring color of vertex v.

Keywords: *Graph coloring, complete graph, C_4 cycle graph, as well as minimum color degree.*

.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu cabang atau pokok yang telah dibahas ratusan tahun yang lalu dan kemudian mulai dikembangkan oleh ilmuan asal Swiss bernama Euler. Salah satu cabang yang dibahas dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Di dalam pewarnaan graf terdapat pewarnaan sisi dan titik. Pada pembahasan ini hanya akan difokuskan pada pewarnaan sisi.

Sebuah pewarnaan-sisi pada graf G adalah fungsi w dari himpunan sisi G ke himpunan bilangan bulat positif. Pewarnaan w disebut terwarna sejati (*proper*) jika semua sisi yang terkait dengan titik yang sama mendapat warna yang berbeda. Misal diberikan graf G dan pewarnaan-sisi w, muncul pertanyaan apa syarat yang harus dikenakan pada pewarnaan-sisi w agar terhadap pewarnaan-sisi w terdapat subgraf G yang terwarna sejati.

Secara umum, permasalahan ini tergolong permasalahan yang sangat sulit dan belum banyak penelitian yang dilakukan. Namun, untuk graf komplet G dengan H adalah C_3 sudah pernah dibahas. Dalam tulisan ini akan difokuskan pada G graf komplet dan graf bipartit komplet, sedemikian hingga H memuat sikel C_4-terwarna sejati.

Oleh sebab itu, maka dalam tulisan ini akan dibahas mengenai pewarnaan-sisi pada graf komplet yang memuat sikel C_4-terwarna sejati.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:
Graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong hingga $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan hingga (boleh kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G, dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G . (Budayasa, 2007)

Definisi 2.2:
Misalkan u dan v dua titik graf G dan $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) sisi G. Kita katakan titik u dan titik v berhubungan langsung (*adjacent*) di G, sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v di G, u dan v titik-titik akhir sisi e. Sisi e terkait (*incident*) dengan titik v dan juga titik u. (Budayasa, 2007).

Definisi 2.3:
Sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan titik v pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi-rangkap/sisi-ganda (*multiple edges*). (Budayasa, 2007).

Definisi 2.4:
Graf yang tidak mempunyai sisi-rangkap dan tidak memiliki gelung disebut graf sederhana. Graf yang memiliki sisi-rangkap tetapi tidak memiliki gelung disebut multigraf rangkap (*multi graph*). (Budayasa, 2007).

Definisi 2.5:
Graf komplet (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan K_n, adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi. Graf yang tidak memiliki sisi disebut graf kosong atau graf nol. (Budayasa, 2007).

Definisi 2.6:
Misalkan G graf. Jalan (*walk*) di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi sedemikian hingga v_{i-1} dan v_1 adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah jalan dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan (v_0, v_k). Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W, sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W; dan k disebut panjang W. Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W. Sebuah titik G, boleh muncul lebih dari satu kali dalam jalan W, begitu juga dengan sebuah sisi G, boleh muncul lebih dari satu kali pada jalan W. Jika semua sisi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ dalam jejak W juga berbeda, maka W disebut lintasan (path) [jejak terbuka yang jalannya beda]. Jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik. Jejak tertutup disebut sirkuit. Sirkuit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkuit Euler. Graf yang memuat sirkuit Euler disebut graf Euler. Sikel (*cycle*) adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k, dilambangkan dengan C_k. Sikel yang memuat semua titik sebuah graf disebut sikel Hamilton. Graf yang memuat sikel Hamilton tersebut disebut graf Hamilton. (Budayasa, 2007).

Definisi 2.7:
Misalkan G graf berarah. Jalan berarah (*directed walk*) di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi sedemikian hingga v_{i-1} dan v_1 adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah jalan berarah dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan berarah (v_0, v_k). Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal berarah dan titik akhir berarah W, sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal berarah W; dan k disebut panjang berarah W. Perhatikan bahwa panjang jalan berarah W adalah banyaknya sisi dalam W. Sebuah titik G, boleh muncul lebih dari satu kali dalam jalan W, begitu juga dengan sebuah sisi G, boleh muncul lebih dari satu kali pada jalan W. Jika semua sisi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ dalam jalan berarah W berbeda, maka W disebut jejak berarah (*directed trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ dalam jejak berarah W juga berbeda, maka W disebut lintasan berarah (*directed path*) [jejak berarah terbuka yang jalannya beda]. Jalan berarah W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik. Jejak tertutup berarah disebut sirkuit berarah. Sikel berarah (*directed cycle*) adalah sebuah

jejak tertutup berarah (*directed closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda.

Definisi 2.8:

Misalkan G graf dan v titik G. Derajat titik v, dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum G, dilambangkan dengan $\delta^w(G)$, didefisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \min\{d(v) | \; v \in V(G)\}$$

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.9:

Himpunan tetangga titik v di graf G (*Neighbor*), dilambangkan $N_G(v)$, adalah himpunan semua titik G yang berhubungan langsung dengan v di G. Tetangga juga disebut persekitaran titik v di graf G.

Definisi 2.10:

Graf berarah D adalah suatu pasangan berurutan dari dua himpunan $V(D)$ yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik dan $\Gamma(D)$ yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dari dua titik di $V(D)$. Jika v_1 dan v_2 adalah dua titik pada graf berarah D dan $e = (v_1, v_2)$ busur D, maka e disebut busur-keluar dari titik v_1 dan e disebut busur-masuk ke titik v_2. Titik v_1 disebut titik pangkal dan titik v_2 disebut titik ujung. Jika terdapat busur $f = (v_1, v_3)$ dan $e = (v_1, v_2)$, maka titik v_1 dikatakan terkait dengan busur f dan busur e. (Budayasa, 2007).

Definisi 2.11:

Misalkan D graf berarah. Graf dasar dari graf berarah D adalah graf tak berarah G sedemikian hingga $V(G) = V(D)$ dan setiap busur (v_i, v_j) di D menjadi sisi $\left(v_i, v_j\right)$ di G.

(Budayasa, 2007)

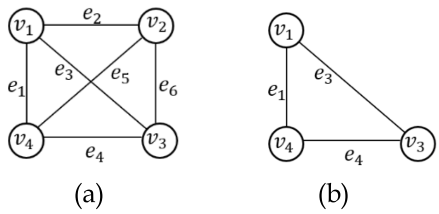
Definisi 2.12:

Misalkan D graf berarah dan $v \in V(D)$. Derajat-keluar titik v, dilambangkan $od(v)$, adalah banyaknya busur pada graf berarah D yang keluar dari titik v, sedangkan derajat-masuk titik v, dilambangkan $id(v)$, adalah banyaknya busur D yang masuk ke titik v.

(Budayasa, 2007).

Definisi 2.13:

Misalkan G graf dan $v \in V(G)$. Maka $G - v$ adalah graf yang didapat dari G dengan menghapus titik v. Menghapus titik v dari G berarti semua sisi yang terkait di v juga dihapus.



Gambar 2.1: Graf G dan graf $G - v_2$

Graf G pada gambar 2.1 (a) adalah graf dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Graf $G - v_2$ pada gambar 2.1 (b) adalah graf yang didapat dari G dengan menghapus titik v_2 dan juga semua sisi yang terkait di v_2 sehingga graf ini memiliki himpunan titik $v_1, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_3, e_4\}$.

Definisi 2.14:

Misalkan D graf berarah dan $v \in V(D)$. Maka $D - v$ adalah graf yang didapat dari D dengan menghapus titik v. Menghapus titik v dari D berarti semua busur yang terkait di v juga dihapus. Misalkan $V(D)$ adalah himpunan titik di D dan $S \subseteq, V(D)$. Maka $V(D) - S$ adalah himpunan titik D dengan menghapus titik-titik di S.

Definisi 2.15:

Misalkan D graf berarah dengan himpunan titik $V(D)$ dan himpunan busur $\Gamma(D)$. Jika $a \in V(D)$ dan $b \in V(D)$. Maka $\Gamma(a, b)$ adalah himpunan semua busur-keluar dari titik a dan busur-masuk ke titik b.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.16:

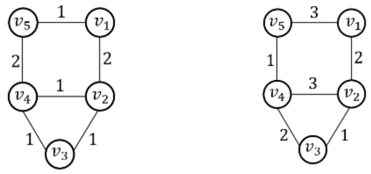
Misalkan D graf berarah dengan himpunan titik $V(D)$, Dua busur a_1 dan a_2 dikatakan independen jika kedua busur tersebut tidak terkait dengan titik yang sama.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1 :

Misalkan G graf. Pewarnaan-sisi pada G adalah sebuah fungsi $w : E(G) \rightarrow N$, dengan N adalah himpunan bilangan asli yang menyatakan himpunan warna. Pewarnaan-sisi pada G dikatakan sejati (*proper*) jika setiap dua sisi yang terkait dengan titik yang sama mendapat warna yang berbeda.

Contoh 3.1:



(a) (b)

Gambar 3.1: Pewarnaan-sisi w_1 dan w_2

a. Perhatikan bahwa pewarnaan-sisi w_1 pada gambar 3.1 (a) tidak sejati karena terdapat dua sisi, yakni sisi v_2v_4 dan sisi v_2v_3 yang terkait dengan titik v_2 mendapat warna yang sama.

b. Perhatikan pewarnaan-sisi w_2 pada gambar 3.1 (b) adalah pewarnaan-sisi sejati pada G.

Definisi 3.2 :

Misalkan G graf dan $v \in V(G)$, dan w pewarnaan-sisi pada G. Warna tetangga v, dilambangkan dengan $WN(v)$, adalah himpunan semua warna sisi yang terkait dengan v. Derajat warna titik v, dilambangkan $d^w(v)$, didefinisikan sebagai

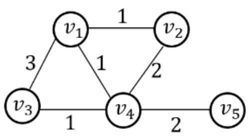
$$d^w(v) = |WN(v)|$$

Minimum derajat warna graf G, dilambangkan $\delta^w(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$\delta^w(G) = \min\{d^w(v) | \ v \in V(G)\}$$

Contoh 3.2 :

Perhatikan pewarnaan-sisi w pada graf G seperti tampak pada gambar.



Gambar 3.2: Pewarnaan-sisi w pada graf G

Dari pewarnaan-sisi w pada gambar 3.2 tersebut diperoleh:

$WN(v_1) = \{1,3\}$,,sehingga $d^w(v_1) = 2;$
$WN(v_2) = \{1,2\}$, sehingga $d^w(v_2) = 2;$
$WN(v_3) = \{1,3\}$, sehingga $d^w(v_3) = 2;$
$WN(v_4) = \{1,2\}$, sehingga $d^w(v_4) = 2;$
$WN(v_5) = \{2\}$, sehingga $d^w(v_1) = 1.$
Dengan demikian, $\delta^w(G) = \min\{2,2,2,2,1\} = 1$

Catatan:

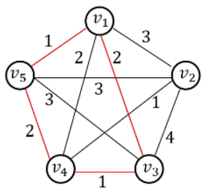
1. Perhatikan bahwa jika w pewarnaan-sisi pada G. Jika pewarnaan-sisi w adalah pewarnaan-sisi sejati, maka setiap subgraf G terhadap w juga terwarna sejati.
2. Misalkan w sebuah pewarnaan-sisi pada graf G. Mungkin terhadap pewarnaan-sisi w pada graf G tidak terwarna sejati, tetapi ada kemungkinan terhadap subgraf G yang mana pewarnaan-sisi w terwarna sejati.

Sebagai contoh perhatikan pewarnaan-sisi w pada Gambar 3.2, pewarnaan-sisi w bukanlah terwarna sejati pada G, karena terdapat dua sisi yang berbeda yang terkait titik yang sama memiliki warna yang sama yaitu sisi v_2v_4 dan sisi v_4v_5. Tetapi pewarnaan-sisi w terhadap sikel $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_1)$ yang merupakan subgraf G adalah pewarnaan-sisi sejati.

Selanjutnya akan dibahas pewarnaan-sisi pada graf komplet G agar terhadap pewarnaan-sisi tersebut G memuat sikel C_4 yang terwarna sejati.

Misal G graf komplet dan w sebuah pewarnaan-sisi pada graf G. Lambangkan pernyataan: "$\delta^w(G) \geq 3$" dengan P dan " G memuat C_4 -terwarna sejati" dengan Q.

Perhatikan pewarnaan-sisi w_1 pada graf komplet $G = K_5$.

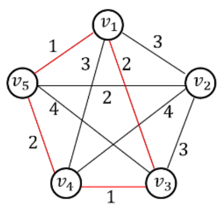


Gambar 3.3: Pewarnaan-sisi w_1 pada K_5

Dari pewarnaan-sisi w_1 pada gambar 3.3 diperoleh:

$$d^{w_1}(v_1) = 3, d^{w_1}(v_2) = 3, d^{w_1}(v_3) = 4, d^{w_1}(v_4) = 2, d^{w_1}(v_5) = 3.$$

sehingga $\delta^{w_1}(G) = 2 < 3$. Dengan demikian dalam hal ini P tidak dipenuhi, tetapi terhadap pewarnaan-sisi w_1 graf G memuat C_4-terwarna sejati yaitu $C_4 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_1\}$ sehingga Q dipenuhi. Selanjutnya perhatikan pewarnaan-sisi w_2 pada graf komplet $G = K_5$.



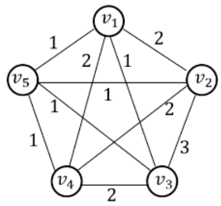
Gambar 3.4: Pewarnaan-sisi w_2 pada K_5

Dari pewarnaan sisi w_2 pada gambar 3.4 tersebut diperoleh:

$$d^{w_2}(v_1) = 3, d^{w_2}(v_2) = 4, d^{w_2}(v_3) = 4, d^{w_2}(v_4) = 4, d^{w_2}(v_5) = 3.$$

Sehingga $\delta^{w_2}(G) = 3 \geq 3$. Dengan demikian dalam hal ini P dipenuhi dan pewarnaan-sisi w_2 graf G memuat C_4 -terwarna sejati, yaitu $C_4 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_1\}$ sehingga Q dipenuhi.

Selanjutnya perhatikan pewarnaan-sisi w_3 pada graf komplet $G = K_5$.



Gambar 3.5: Pewarnaan-sisi w_3 pada K_5

Dari pewarnaan-sisi w_3 pada gambar 3.5 tersebut diperoleh:

$$d^{w_3}(v_1) = 2, d^{w_3}(v_2) = 3, d^{w_3}(v_3) = 3, d^{w_3}(v_4) = 2, d^{w_3}(v_5) = 1.$$

Sehingga $\delta^{w_3}(G) = 1 < 3$. Dengan demikian dalam hal ini P tidak dipenuhi dan pewarnaan-sisi w_3 pada G tidak memuat C_4-terwarna sejati sehingga Q tidak dipenuhi.

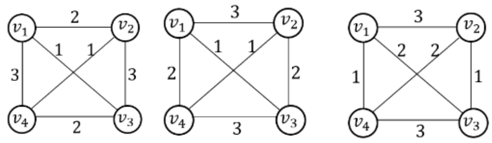
Dari observasi di atas, terlihat P merupakan syarat cukup bagi Q, tetapi P bukan syarat perlu bagi Q sehingga diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.1:

Misalkan G graf komplet dan w pewarnaan-sisi pada G. Jika $\delta^w(G) \geq 3$, maka G memuat C_4 -terwarna sejati.

Bukti:

Misalkan w pewarnaan-sisi pada K_n dengan $\delta^w(K) \geq 3$. Misalkan G subgraf komplet minimum dari K_n sedemikian hingga $\delta^w(G) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditunjukkan G memuat sikel C_4-terwarna sejati. Jika $|V(G)| = 4$ dan karena $\delta^w(G) \geq 3$, maka semua sisi G terkait pada titik yang sama harus berwarna berbeda. Jika tidak, maka ada sisi G yang terkait pada titik yang sama mendapat warna yang sama. Karena untuk setiap $v \in V(G)$, $d(v) = 3$, maka $\delta^w(G) \geq 3$. Karena $|E(G)| = 6$, maka ada paling sedikit $3^6 = 729$ pewarnaan-sisi dari G yang mungkin dengan menggunakan 3, katakan warna 1, 2, dan 3. Beberapa di antaranya seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.6: Beberapa pewarnaan-sisi G dengan 3 warna

Perhatikan dari gambar 3.8 bahwa dari setiap kemungkinan pewarnaan-sisi tersebut, $G = K_4$ memuat C_4 -terwarna sejati yaitu sikel $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$.

Selanjutnya, misalkan $|V(G)| \geq 5$. Andaikan G tidak memuat sikel C_4-terwarna sejati. Karena G minimum, maka untuk setiap $x \in V(G)$,

$$\delta^w(G - x) = 2$$

Misal $A(x) = \{y \in V(G - x) | d^w_{G-x}(y) = 2\}$

Selanjutnya, didefinisikan graf berarah D dengan himpunan titik $V(D) = V(G)$ dan himpunan busur $\Gamma(D) = \bigcup_{x \in V(G)} \{xy \mid y \in A(x)\}$

Dari definisi D dan asumsi bahwa G tidak memuat sikel C_4 -terwarna sejati, diperoleh pernyataan-pernyataan berikut:

P1: $\forall x \in V(D), od(x) \geq 1$

P2: Jika $xy \in \Gamma(D)$, maka y terkait ke tepat 3 warna pada G dan xy adalah satu-satunya sisi terkait ke y dengan warna $c(xy)$.

P3: untuk setiap x $\in V(D), id(x) \leq 2$

P4: Jika xy dan uv adalah dua busur independen di D, maka $c(xy) \neq c(uv)$.

P5: Jika D' subgraf berarah D dengan maksimum derajat keluar tidak melebihi 1, maka busur-busur D' semua mendapat warna berbeda.

Perhatikan bahwa (P1) dan (P2) adalah akibat langsung dari definisi graf berarah D. Sedangkan, (P2) dan fakta bahwa $|V(G)| \geq 4$, berakibat (P3). Selanjutnya (P4) dipenuhi, karena jika diandaikan $c(uv) = c(xy) = \alpha$, maka sikel $C = (u, v, x, y, u)$ merupakan C_4 -terwarna sejati (kontradiksi). Perhatikan bahwa (P2) berakibat $c(vx) \neq c(uv) = \alpha$ dan $c(yu) \neq c(xy) = \alpha$. Akhirnya, (P2) dan (P4) berakibat (P5).

Perhatikan bahwa pernyataan (P1) berakibat graf berarah D memuat sikel berarah dengan panjang dua atau lebih. Selanjutnya ditinjau tiga kasus, sehingga dari setiap kasus diperoleh kontradiksi.

Kasus 1: D memuat sikel berarah C dengan panjang paling sedikit 4.

Berdasarkan (P2) dan (P5), semua sisi C mendapat warna berbeda dan setiap titik C terkait dengan tepat

tiga warna dalam G. Karena G tidak memuat C_4-terwarna sejati, maka panjang C minimum 5.
Misalkan $C = (v_0, v_1, v_2, .., v_m, v_0)$ dengan $m \geq 4$.
$\forall\, i, 0 \leq i \leq m$, misalkan
$W(v_{i-1}v_i) = i$, di mana, indeks diambil modulo m.
Dari uraian sebelumnya, $0,1,2,\ldots,m$ adalah warna-warna yang berbeda, dan untuk $i = 0,1,\ldots,m$, hanya sisi $v_{i-1}v_i$ yang terkait pada titik v_i dengan warna i.
Karena lintasan $P4 = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ sisi-sisinya berwarna 1,2, dan 3, maka $c(v_0v_3) \neq 3$ (Menghindari C_4-terwarna sejati) maka $c(v_0v_3) = 1$. Akibatnya, tiga warna yang tekait pada titik v_3 adalah 1,3, dan 4. Dengan argumen serupa, diperoleh $c(v_1v_4) = 2$. Sekarang, karena $c(v_1v_3) \in \{1,3,4\}$ dan $c(v_1v_3) \neq 1$ atau 3, maka $c(v_1v_3) = 4$.
Selanjutnya, karena lintasan $P4 = (v_0, v_3, v_1, v_4)$ terwarna-sejati dengan warna 1,4, dan 2, secara berurutan, maka menghindari C_4-terwarna sejati, maka $c(v_0v_4) \in \{1,2\}$. Jika $c(v_0v_4) = 2$, maka $(v_0, v_1, v_2, v_4, v_0)$ adalah C_4-terwarna sejati, (perhatikan $c(v_2v_4) \neq 2$), sehingga terjadi kontradiksi. Sehingga $c(v_0v_4) = 1$, akibatnya sikel C mempunyai panjang paling sedikit 6, sebab jika tidak, maka ada dua sisi C mendapat warna yang sama. Lebih jauh dalam kasus ini, ada empat warna berbeda yaitu 1,2,4,5 terkait di titik v_4, sehingga terjadi kontradiksi.

Kasus 2: D memuat sikel berarah C dengan panjang 3 dan tidak memuat sikel dengan panjang lebih dari 3.
Misal sikel berarah $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ di D
Klaim: $\exists\, S \subset V(D)$ dengan $|S| \leq 4$ dan $V(C) \subseteq S \ni \Gamma(a, s) = \emptyset$, untuk semua $a \in V(D - s)$ dan $s \in S$.
Bukti klaim:
Jika $\Gamma(a, b) = \emptyset$ dengan $a \in V(D) - V(C)$ dan $b \in V(C)$, maka $S = V(C)$ dengan $|S| = |V(C)| = 3$
Jika tidak, misalkan
$w \in V(D) - V(C) \ni wx \in \Gamma(c, d)$, untuk semua $c \in V(D) - V(C)$ dan $d \in V(C)$.
Tanpa menghilangkan keumuman, $wx \in \Gamma(D)$ dan $S = V(C) \cup \{w\}$.
Jelas bahwa $|S| = |V(C) \cup \{w\}| = |V(C)| + 1 = 3 + 1 = 4$
Andaikan ada $w' \in V(D) - S$ dan $x' \in S \ni w'x' \in \Gamma(D)$.
Selanjutnya akan ditunjukkan suatu kontradiksi.
Dari (P2) dan (P5), diperoleh busur-busur $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, wv_1, w'x'$ mendapat warna berbeda, namakan 1,2,3,4, dan 5, secara berturut-turut. Setiap titik v_1, v_2, v_3 terkait dengan tepat tiga warna di G.
Karena lintasan $P4 = (w, v_1, v_2, v_3)$ terwarna sejati dengan warna 4,1,2 secara berurutan dan $c(wv_3) \neq c(v_2v_3) = 2$, maka $c(wv_3) = 4$, menghindari ada C_4-terwarna sejati.
Jika $x' = v_1$, maka $c(wv_1) = 5$, sehingga v_3 terkait dengan empat warna yaitu 1,3,4,5, sehingga terjadi kontradiksi.
Jika $x' = v_3$, maka titik v_3 terkait dengan empat warna yaitu 2,3,4,5, sehingga terjadi kontradiksi.
Jika $x' = v_2$ maka pertukarkan peran w dan w' dan diperoleh kontradiksi.
Kemungkinan tersisa adalah $x' = w$, untuk kasus ini, diperoleh $c(w'v_1) = 1$ karena $c(w'v_1) \in \{1,3,4\}$ dan $c(w'v_1) \neq 3$ atau 4. Sehingga (w', v_1, v_3, w, w') sebuah C_4-terwarna-sejati dengan warna 1,3,4,5 secara berurutan, sehingga terjadi lagi kontradiksi, Dengan demikian klaim terbukti.
Selanjutnya karena $\Gamma(a, b) = \emptyset$ untuk semua $a \in V(D) - S$ dan $b \in S$, dan karena setiap titik $v \in V(D), od(v) \geq 1$, maka untuk setiap $v \in V(D) - S, od_{D-S}(v) \geq 1$.
Sehingga, graf berarah $D - S$ memuat sikel berarah panjang 3 atau panjang 2. Misalkan warna sisi-sisi v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, secara berturut-turut adalah 1,2,3.
Ditinjau dua kasus:
Subkasus 2.1: $D - S$ memuat sikel berarah $C_3' = (u_1, u_2, u_3, u_1)$
Berdasarkan (P2) dan (P5), warna-warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1 berbeda dan berbeda juga dengan warna sisi-sisi $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$, namakan warna 5,6 dan 7, secara berturut-turut.
Di setiap titik $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ dari G terdapat tepat 3 warna yang terkait.
Karena lintasan $P4 = (v_3, v_1, u_3, u_2)$ terwarna sejati (catat bahwa warna v_1u_3 bukan anggota {3,6} berdasasrkan (P2)), maka warna v_3u_2 anggota {3,6} untuk menghindari sikel C_4-terwarna sejati. Dengan kesimetrisan, misalkan $c(v_3u_2) = 3$. Selanjutnya, karena lintasan $P4 = (v_1, v_2, v_3, u_2)$ terwarna sejati dengan warna-warna 1,2, dan 3 berurutan dan $c(v_1u_2) \neq c(v_3v_1) = 3$, maka $c(v_1u_2) = 1$ sehingga u_2 terkait dengan empat warna yaitu 1,3,5, dan 6, sehingga tejadi kontradiksi.
Subkasus 2.2: $D - S$ memuat sikel berarah panjang dua (x, y, x)

Misalkan $c(xy) = 5$. Seperti sebelumnya, warna-warna 1,2,3 dan 5 berbeda, dan di setiap titik v_1, v_2, v_3, x, dan y ada tepat tiga warna G terkait.
Lintasan $P4 = (v_1, v_2, y, x)$ terwarna-sejati, karena warna v_2y bukan anggota $\{1,5\}$. Perhatikan bahwa $c(v_1x) \neq 5$, sehingga $c(v_1x) = 1$ untuk menghindari C_4 -terwarna sejati. Dengan argumen serupa, diperoleh $c(v_2x) = 2$ dan $c(v_3x) = 3$. Sehingga di titik x ada empat warna yang terkait yaitu 1,2,3, dan 5, sehingga terjadi kontradiksi.

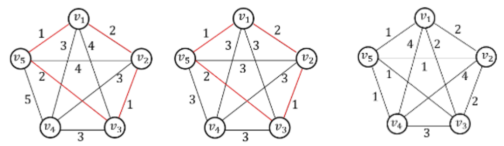
Kasus 3: D memuat sikel berarah panjang dua dan tidak ada sikel berarah panjang lebih dari dua
Misalkan (u, v, u) sikel terarah panjang dua di D.
Klaim: Tidak ada sikel berarah panjang dua di D yang independen dengan sikel berarah (u, v, u)
Bukti klaim: Andaikan ada sikel berarah panjang dua di D yaitu (x, y, x) yang independen dengan (u, v, u). Maka berdasarkan (P2), sikel $C_4 = (u, v, x, y, u)$ terwarna-sejati, sehingga terjadi kontradiksi. Maka klaim terbukti.
Selanjutnya misal D' adalah subgraf berarah maksimal dari D yang memuat busur uv sedemikian hingga graf dasar G' dari D' adalah pohon dan semua busur di D' selain uv terorientasi (terarah) menuju $\{u, v\}$. Berdasarkan defisini D', maka
$\Gamma(a, b) = \emptyset$, untuk semua $a \in V(D) - V(D')$ dan $b \in V(D')$
Jika $V(D) - V(D') \neq \emptyset$, maka $D - V(D')$ mempunyai minimun derajat-keluar paling sedikit 1, sehingga memuat sikel berarah panjang dua yang independen dengan sikel berarah (u, v, u), sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya, $V(D') = V(D)$. Sehingga D' subgraf berarah rentang dari D dan D' memiliki paling sedikit 5 titik.
Berdasarkan (P3), D' tidak memuat titik dengan derajat-masuk lebih dari dua. Dengan sifat kesimetrisan, misalkan terdapat titik-titik x dan y sedemikian hingga

$$xy, yu \in \Gamma(D')$$

Perhatikan bahwa D' memuat busur wz dengan w bukan elemen $\{u, v, x, y\}$ dan $z \in \{u, v, x, y\}$.
Misalkan warna-warna yang digunakan untuk mewarnai $xy, yu, uv, dan\, wz$ adalah 1,2,3, dan 4 secara berturut-turut. Berdasarkan (P2) dan (P5), warna-warna 1,2,3, dan 4 berbeda, dan di setiap titik u, v, y terdapat tepat tiga warna terkait.
Jika $z = x$, dengan argumen serupa dengan sebelumnya, $c(wu) = 4$. Berdasarkan (P2), warna xu bukan elemen $\{2,3,4\}$. Sehingga warna xu adalah 1. Ini berkibat di titik u ada empat warna yang terkait, sehingga terjadi kontradiksi.
Jika $z = y$, maka $c(wv) = 4$ dan $c(xv) = 1$. Berdasarkan (P2), warna yv bukan elemen $\{1,3,4\}$. Maka, $c(yu) = 2$. Akibatnya di titik v ada empat warna yang terkait, sehingga terjadi kontradiksi.
Akhirnya, jika $z = v$, maka $c(xv) = 1$ dan warna yv bukan elemen $\{1,3,4\}$. Maka, $c(yu) = 2$. Sehingga di titik v ada empat warna yang terkait, sehingga terjadi kotradiksi.
Untuk kasus $z = u$ sama seperti dengan kasus $z = y$. Juga menghasilkan kontradiksi.
Dengan demikian, bukti teorema lengkap.

Catatan: Teorema 3.1 memberikan syarat cukup bagi pewarnaan-sisi pada graf komplet memuat C_4 -terwarna sejati.

Berikut akan diberikan syarat cukup yang lain bagi pewarnaan-sisi graf memuat C_4 -terwarna sejati, untuk itu perhatikan ilustrasi berikut.
Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi w pada graf komplet G.
Misalkan P: $|WN(u) \cup WN(v)| \geq 4$, untuk setiap pasang titik u dan v elemen $V(G)$,
dan Q: Terhadap pewarnaan w, terdapat sikel C_4-terwarna sejati



(a) (b) (c)

Gambar 3.7: Pewarnaan-sisi w_1, w_2, dan w_3 pada $G = K_5$

Perhatikan pewarnaan-sisi w_1 pada graf $G = K_5$ pada gambar 3.6 (a) di atas. Pewarnaan-sisi w_1 bukanlah pewarnaan-sisi sejati pada G karena ada sisi-sisi G yang terkait pada titik v_4 mendapat warna yang sama, yaitu $v_4v_1, v_4v_2, dan\, v_4v_3$. Tetapi terhadap pewarnaan w_1, graf G memuat C_4-terwarna sejati, yakni sikel $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_1)$. Terhadap pewarnaan-sisi w_1 diperoleh:
$W_1N(v_1) = \{1,2,3,4\}$;
$W_1N(v_2) = \{1,2,3,4\}$;
$W_1N(v_3) = \{1,2,3,4\}$;
$W_1N(v_4) = \{3,5\}$;
$W_1N(v_5) = \{1,2,4,5\}$;

Sehingga untuk setiap $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 5$, berlaku $|WN(u_i) \cup WN(v_j)| \geq 4$. Dengan demikian, terhadap pewarnaan-sisi w_1 pada G, P dipenuhi dan Q juga dipenuhi.

Selanjutnya perhatikan pewarnaan-sisi w_2 pada graf G seperti pada gambar 3.6 (b) di atas. Terhadap pewarnaan-sisi w_2 graf G memuat sikel C_4 terwarna sejati yaitu sikel $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_1)$. Karena $W_2N(v_1) = \{1,2,3\}$ dan $W_2N(v_2) = \{1,2,3\}$, maka $|W_2N(v_1) \cup W_2N(v_2)| = |\{1,2,3\}| = 3 < 4$. Jadi terhadap pewarnaan-sisi w_2 pada graf G, Q dipenuhi tetapi P tidak dipenuhi.

Akhirnya, perhatikan pewarnaan-sisi w_3 pada graf G seperti pada gambar 3.6 (c) di atas. Tampak bahwa, terhadap pewarnaan-sisi w_3, graf G tidak memuat sikel C_4 -terwarna sejati. Begitu juga $W_3N(v_5) = \{1\}$ dan $W_3N(v_2) = \{1,2,4\}$, sehingga $|W_3N(v_5) \cup W_3N(v_2)| = |\{1,2,4\}| = 3 < 4$. Dengan demikian, terhadap pewarnaan-sisi w_3 pada graf G, Q tidak dipenuhi, begitu juga P tidak dipenuhi.

Ilustrasi di atas menunjukkan bahwa P merupakan syarat cukup bagi Q tetapi P bukan syarat perlu bagi Q. Hal ini akan ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2:

Misalkan G graf komplet dan w pewarnaan-sisi pada G. Jika $|WN(u) \cup WN(v)| \geq 4$, untuk setiap u dan v elemen $V(G)$, maka G memuat sikel C_4-terwarna sejati.

Bukti:

Andaikan G tidak memuat sikel C_4-terwarna sejati. Berdasarkan Teorema 3.1, $\delta^w(G) < 3$. Karena $\delta^w(G)$ bilangan bulat, maka $\delta^w(G) \leq 2$.

Misalkan $u \in V(G)$,

dengan $d^w(u) = \delta^w(G) \leq 2$ ...(1)

$$\forall v \in V(G), v \neq u,$$

diperoleh $|WN(u) \cup WN(v)| \geq 4$ ...(2)

Berdasarkan prinsip Inklusi-Ekslusi, $|WN(u) \cup WN(v)| = |WN(u)| + |WN(v)| - |WN(u) \cap WN(v)|$

$= d^w(u) + d^w(v) - |WN(u) \cap WN(v)|$.

Sehingga,

$d^w(u) + d^w(v) = |WN(u) \cup WN(v)| + |WN(u) \cap WN(v)|$ ...(3)

Karena $|WN(u) \cap WN(v)| \geq 1$, maka persamaan ini, (1) dan (2) berakibat

$$d^w(u) + d^w(v) \geq 4 + 1 = 5$$

ekuivalen dengan

$d^w(v) \geq 5 - d^w(u)$.

Karena $d^w(u) = \delta^w(G) \leq 2$, maka $d^w(v) \geq 5 - 2 = 3$

Misalkan $H = G - u$, maka diperoleh $\forall v \in V(H)$

$$d_H^w(v) \geq d_G^w(u) - 1$$

$d_H^w(v) \geq 3 - 1 = 2$ ...(4)

Akibatnya $|V(G)| \geq 4$

Selanjutnya, ditinjau dua kasus.

Kasus 1: $|V(G)| = 4$

Klaim 1.1: $d_G^w(u) \geq 2$

Bukti klaim: Andai $d_G^w(u) \leq 1$. Maka $\forall v \in H$, $|WN_G(u) \cup WN_G(v)| = |WN_G(u)| + |WN_G(v)| - |WN_G(u) \cap WN_G(v)|$

$|WN_G(u) \cup WN_G(v)| \leq 1 + 3 - 1 = 3 < 4$.

Kontradiksi dengan premis.

Dari klaim 1.1 dan (1), diperoleh $d_G^w(u) = 2$.

Misalkan $V(G) = \{u, v_1, v_2, v_3\}$ dan $WN_G(u) = \{1,2\}$

a. Jika $c(uv_1) = 1$ dan $c(uv_2) = 2$, maka (u, v_1, v_3, v_2, u) sebuah C_4 -terwarna sejati. Kontradiksi.
b. Jika $c(uv_2) = 1$ dan $c(uv_3) = 2$, maka (u, v_3, v_1, v_2, u) sebuah C_4 -terwarna sejati. Kontadiksi.
c. Untuk subkasus yang lain menghasilkan hasil serupa, selalu memberikan kontradiksi.

Kasus 2: $|V(G)| \geq 5$

Dalam hal ini, jika $\delta^w(H) \geq 3$, maka H memuat C_4-terwarna sejati (berdasarkan Teorema 3.1), kontradiksi.

Akibatnya, $\delta^w(H) \leq 2$ ...(5)

Dari (4) dan (5), diperoleh $\delta^w(H) = 2$

Misalkan $v \epsilon V(H)$, dengan $d_H^w(v) = \delta^w(H) = 2$.

Ingat bahwa $|WN_G(u) \cap WN_G(v)| \geq 4$, dan ini berakibat bahwa $d_G^w(u) + d_G^w(v) = |WN(u) \cup WN(v)| + |WN(u) \cap WN(v)|$

$$d_G^w(u) + d_G^w(v) \geq 4 + 1 = 5$$

Sehingga,

$$d_G^w(u) \geq 5 - d_G^w(v)$$

$$d_G^w(u) \geq 5 - (d_H^w(v) + 1)$$

$d_G^w(u) \geq 5 - 3 = 2$ ...(6)

Dari (1) dan (6),

disimpulkan $d_G^w(u) = 2$ ...(7)

Sehingga $WN_G(u) \cap WN_G(v) = \emptyset$. Sebab jika tidak, $|WN_G(u) \cup WN_G(v)| < 4$, kontradiksi.

Misalkan $WN_G(u) = \{1,2\}$ dan $WN_H(v) = \{3,4\}$

Maka, tanpa menghilangkan keumuman, $c(uv) = 1$ dan $c(ux) = 2$. Untuk $x \in V(H - v)$,dan $c(vx) = 3$. Selanjutnya, harus terdapat sebuah titik $y \in V(H - \{v, x\})$ sedemikian hingga $c(xy) = 4$. Maka warna sisi uy adalah 2 atau 4, sebab jika tidak sikel (u, x, v, y, u) adalah C_4-terwarna sejati; kontradiksi. Karena $WN_G(u) = \{1,2\}$, diperoleh $c(uy) = 2$. Sehingga $c(xy) = 2$; jika tidak, G memuat C_4-terwarna sejati (u, v, y, x, u) atau (u, v, x, y, u), kontradiksi.

Karena $|WN_G(u) \cup WN_G(x)| \geq 4$ dan $|V(G)| \geq 5$, maka terdapat sebuah titik di graf $H = \{v, x, y\}$, katakan z, sedemikian hingga $c(xz) \notin \{1,2,3\}$. Menggunakan $WN_G(u) = \{1,2\}$, diperoleh $c(uz) = 1$. Jika tidak, (u, v, x, z, u) sikel C_4-terwarna sejati, kontradiksi.

Karena sikel (u, y, v, z, u) bukan C_4-terwarna sejati dan $WN_H(v) = \{3,4\}$, diperoleh $c(vz) = 4$. Sehingga sikel (u, x, v, z, u) adalah C_4-terwarna sejati pada G, kontradiksi.

Dengan demikian, bukti lengkap.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dari bab sebelumnya, terdapat beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Teorema 3.1 yang berbunyi "Misal G graf komplet dan w sebuah pewarnaan-sisi pada G. Jika $\delta^w(G) \geq 3$, maka G memuat C_4-terwarna sejati" memberikan syarat cukup bagi perwarnaan-sisi pada graf komplet memuat C_4-terwarna sejati.
2. Teorema 3.2 yang berbunyi "Misalkan G graf komplet dan w sebuah pewarnaan-sisi pada G. Jika $|WN(u) \cup WN(v)| \geq 4$, untuk setiap u dan v elemen $V(G)$, maka G memuat sikel C_4 sejati" memberikan syarat cukup bagi pewarnaan-sisi pada graf komplet memuat C_4-terwarna sejati.

Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya membahas graf komplet. Harapan dari penulis adalah bahwa teorema atau metode pembuktian teorema ini dapat digunakan untuk membahas graf bipartit komplet.

DAFTAR PUSTAKA

N. Alon, On a conjecture of Erdős, Simonovits and Sós concerning anti-Ramsey theorems, J. Graph Theor y. **7** (1983), 91–94.

S. Fujita, R. Li, and S. Zhang, Color degree and monochromatic degree conditions for short properly colored cycles in edge-colored graphs, J. Graph Theory. **87** (2018), 362–373.

T. Han, H. J. Broersma, Y. Bai, and S. Zhang, Sufficient conditions for properly colored C3's and C4's in edge-colored complete graphs, Discrete Appl. Math. **327** (2023), 101–109.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Buhaerah, Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Makassar: Living Spiritual Quotient.

Chartrand, G., & Lesniak, L. (1986). *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: a Division of Wadsworth, Inc.

Irawati, N., & Heri, R. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph Kn dengan n Ganjil. *Jurnal Matematika*, 136-142.

Irawati, N., & Heri, R. (2011). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph Kn dengan n Genap. *Seminar Nasional Teknologi Informasi & Komunikasi Terapan*.

Maharani, M., & Budayasa, I. K. (2021). Pelabelan Total Ajaib Titik Berlabel Ganjil pada Graf Pohon. *MathUnesa:Jurnal Ilmiah Matematika*, 171-179.

Nagaraj, C. (2017). Even Vertex Magic Total Labeling. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 363-375.

Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Malang: CV. Rumpun Dua Belas (R12 Grup).

Wardhani, D. A., & Budayasa, I. K. (2019). Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super pada Graf Petersen yang Diperumum. *MathUnesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 1-5.

F. Wu, H. Broersma, S. Zhang, and B. Li, Properly colored and rainbow C4's in edge-colored graphs, J. Graph Theory. 2024;**105**:110–135. https://doi.org/10.1002/jgt.23019