

ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL FITO-ZOOPLANKTON DENGAN WAKTU TUNDA PADA ZOOPLANKTON DI KOLAM STABILISASI LIMBAH

Gesti Essa Waldhani

Jurusan Teknologi Informasi, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Bina Sarana Informatika, Jakarta, Indonesia

e-mail: gesti.gew@bsi.ac.id*

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan waktu tunda pada kolam stabilisasi fakultatif. Pada penelitian ini dibahas model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan waktu tunda, penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan waktu tunda dan simulasi numerik dari model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan waktu tunda. Metode yang digunakan untuk menganalisis permasalahan adalah dengan studi literatur. Langkah-langkah yang digunakan adalah pengembangan model matematis perubahan konsentrasi oksigen terlarut, fitoplankton dan zooplankton, algoritma penyelesaian persamaan matematis, data lapangan, simulasi menggunakan software Maple dan Mathematica 9 dan validasi dengan penelitian.

Kata Kunci: Bifurkasi Hopf, model matematika dinamis, kolam stabilisasi

Abstract

In this paper, we discuss the predator-prey model using Holling type II functional response with the time delay in facultative stabilization pond. In this research, we discuss the predator-prey model using Holling type II functional response with the time delay, determining the equilibrium point, the stability analysis of predator-prey model using Holling type II functional response with the time delay and numerical simulation of the predator-prey model using Holling type II functional response with the time delay. The method used to analyse the problem is by literature study. The steps used are the development of a mathematical model of change of dissolved oxygen concentration, phytoplankton and zooplankton, mathematical equation solving algorithm, field data, simulation using Maple and Mathematica 9 software and validation with research.

Keywords: Hopf Bifurcation, dynamic mathematical model, stabilization pond

PENDAHULUAN

Model yang kami teliti didasarkan pada model fitoplankton-oksigen dasar dari penelitian Sekerci dan Petrovskii (2015) yang kami perluas dengan memperhitungkan zooplankton dan pengaruh predasi pada dinamika oksigen dan menambahkan waktu tunda. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon tipe I, II dan III. Fungsi respon tipe II terjadi pada *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari *prey*.

Untuk membangun model yang lebih realistis, mempertimbangkan waktu tunda. Waktu tunda penting dalam pemodelan masalah nyata, sebab keputusan biasanya dibuat berdasarkan keadaan sebelumnya. Hal ini penting dalam memodelkan pertumbuhan populasi, karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah

populasi suatu saat, tetapi juga bergantung pada waktu sebelumnya.

Model ini akan diterapkan pada sistem pengolahan air limbah di Instalasi Pengolahan Air Limbah (IPAL) Sewon menggunakan tolok ukur DO (*Dissolved Oxygen*) dan indikator biologi spesies (fitoplankton dan zooplankton) untuk mengetahui kualitas pengolahannya.

Ada banyak literatur yang meninjau berbagai aspek dinamika plankton spatiotemporal (dalam ruang dan waktu). Model konseptual *predator-prey* untuk menggambarkan interaksi fitoplankton dan zooplankton di ekosistem perairan dipertimbangkan secara detail oleh Malchow dkk tetapi tanpa memperhatikan produksi oksigen. Dalam studi matematika lainnya, Edwards dan Brindley meneliti dinamika sistem gabungan plankton-nutrisi, tapi tidak memperhatikan kemungkinan hubungan plankton-nutrisi dengan oksigen terlarut. Terdapat

sedikit penelitian di mana produksi oksigen dipertimbangkan secara eksplisit. Secara khusus, Marchettini dkk mempelajari dinamika trofik dengan mengembangkan model matematis proses biokimia di ekosistem lagoon. Konsentrasi oksigen terlarut dalam sistem multi-komponen dipertimbangkan oleh mereka. Dalam studi pemodelan lainnya, Allegretto dkk menunjukkan adanya solusi periodik dalam pemodelan laguna pesisir Italia.

Marchettini dkk mempelajari model matematis proses biokimia dari sistem laguna. Dalam sebuah studi lainnya, Allegretto dkk fokus pada keberadaan fluktuasi secara periodik, yang didasarkan pada laguna pesisir Italia. Dinamika sistem plankton-nutrisi dan sifat dinamikanya. Selain itu, model oksigen-alga diperkenalkan untuk mengurangi penipisan oksigen di bawah beberapa faktor pengendali luar. Hull dkk menyelidiki konsentrasi oksigen terlarut dalam sistem multi-komponen, dengan bantuan mikroba dan daya dukung lingkungan (angin, radiasi sinar matahari dan suhu) pada dinamika laguna. Dalam studi lain, Hull dkk (2008) menyelidiki dinamika musiman dan harian pengukuran oksigen terlarut di laguna pesisir Mediterania, namun di bagian pemodelan oksigen terlarut dianggap sebagai sedimen bersama dengan CO_2 dan bahan organik. Sehingga konsentrasi oksigen yang tersisa dalam suatu badan air dan ketergantungannya pada aktivitas respirasi plankton diabaikan. Misra (2010) termasuk pengaruh beberapa factor 'eksogen' (seperti Cahaya, intensitas angin, suhu, fosfor, eutrofikasi, dll), sehingga meninggalkan factor internal dinamika plankton-oksigen. Misra (2011) mengusulkan dan menganalisis model matematika non-linier untuk pertumbuhan alga di danau, memperhitungkan keterlambatan konversi detritus menjadi nutrisi. Diasumsikan bahwa ada aliran nutrisi yang terus menerus ke dalam danau akibat limpasan pertanian.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang modifikasi model *predator-prey* menggunakan Holling tipe II dengan waktu tunda, menentukan titik ekuilibrium, analisis kestabilan dan simulasi numerik dari model *predator-prey* menggunakan Holling tipe II dengan waktu tunda. Dipilihnya Holling tipe II karena memiliki permasalahan yang

sesuai dengan jenis *predator* yang berkarakteristik aktif dalam mencari *prey*.

KAJIAN TEORI

Persamaan diferensial nonlinier diberikan sebagai berikut.

$$\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

Persamaan (1) mempunyai titik ekuilibrium $x = \bar{x}$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Untuk persamaan diferensial nonlinier, analisis kestabilannya menggunakan linierisasi. Misalkan kita melinearkan persamaan (1), maka persamaan (1) dapat ditulis

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x). \quad (2)$$

Diketahui dari (Clark,1999) bahwa persamaan (2) merupakan persamaan diferensial nonlinier dengan A matriks Jacobian dari persamaan (1) di titik ekuilibrium $\bar{x}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

dan $\varphi(x)$ sebagai bagian linier dari persamaan (1). Ax dalam persamaan (2) disebut linearisasi persamaan nonlinier (1) yang ditulis dalam bentuk $\dot{x} = Ax$.

Misalkan A matriks $n \times n$ dan $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik A jika

$$Ax = \lambda x, \quad (4)$$

untuk $\lambda \in \mathbb{R}$, bilangan λ yang memenuhi persamaan diatas disebut nilai eigen atau nilai karakteristik. Untuk mencari nilai eigen matriks $n \times n$ maka persamaan (4) dapat ditulis sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (5)$$

dengan I matriks identitas. Persamaan (5) mempunyai Solusi nontrivial jika

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \quad (6)$$

Persamaan (6) disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Clark,2000). Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dari persamaan (6), maka persamaan karakteristik A menjadi $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$. Jadi kita memperoleh persamaan $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, dengan $\tau = \text{trace}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ dan $\Delta = \det(A) = ad - bc = \lambda_1\lambda_2$. Sehingga, diperoleh nilai eigen dari matriks A sebagai berikut.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (7)$$

Menurut (Anton, 2005), untuk menentukan kestabilan suatu titik tetap suatu system dapat ditunjukkan dari nilai Δ . Ada tiga kasus untuk nilai Δ yaitu.:

(1) $\Delta < 0$

Jika dua nilai eigen mempunyai tanda yang berbeda, maka titik tetapnya bersifat sadel.

(2) $\Delta > 0$

(a) $\tau^2 - 4\Delta > 0$

(i) Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai eigennya merupakan bilangan real positif, maka titik tetapnya simpul tidak stabil.

(ii) Jika $\tau < 0$ dan kedua nilai eigennya bilangan real negative, maka titik tetapnya simpul stabil.

(b) $\tau^2 - 4\Delta < 0$

(i) Jika $\tau > 0$ dan kedua nilai eigennya bilangan kompleks, maka titik tetapnya spiral tidak stabil.

(ii) Jika $\tau = 0$ dan kedua nilai eigennya bilangan kompleks, maka titik tetapnya spiral stabil.

(iii) Jika $\tau < 0$ dan keduanya bilangan kompleks, maka titik tetapnya bersifat center.

(c) $\tau^2 - 4\Delta = 0$

Parabola merupakan garis batas antara simpul dan spiral. Node Bintang atau node degenerasi terletak pada parabola ini. Jika kedua nilai eigen mempunyai nilai yang sama, maka titik tetapnya merupakan node yang tepat.

(3) $\Delta = 0$

Jika salah satu nilai eigennya nol, maka titik tetap tersebut bukanlah titik kesetimbangan terisolasi.

Diberikan fungsi polinomial

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (8)$$

Dengan bilangan positif dan real, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Matriks persegi $n \times n$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

Disebut matriks Hurwitz yang sesuai dengan polinomial p . Hal ini ditetapkan oleh Adolf Hurwitz pada tahun 1895 bahwa polynomial real bersifat stabil (yaitu, semua akarnya mempunyai bagian real

negatif) jika dan hanya jika semua minor utama dari matriks $H(p)$ adalah positif:

$$\Delta_1(p) = |a_1| = a_1 > 0, \Delta_2(p) = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \Delta_n(p) = |H| > 0. \quad [10] \quad (10)$$

Selanjutnya, Guckenheimer dan Holmes (2007) menjelaskan bahwa struktur kualitatif system dinamik dapat berubah karena adanya perubahan parameter system dinamik. Hal ini dikenal dengan bifurkasi. Bifurkasi adalah perubahan kestabilan dan jumlah titik kesetimbangan akibat perubahan parameter. Misalkan system persamaan diferensial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad (11)$$

Kita berasumsi bahwa persamaan (11) mempunyai titik ekuilibrium (x^*, y^*) dan $\mu = \mu^*$ merupakan nilai parameter penyebab bifurkasi.

Menurut Irwan (2009), bifurkasi Hopf terjadi jika titik kesetimbangan (x^*, y^*) mempunyai pasangan nilai eigen kompleks yaitu $\lambda(\mu^*) = p(\mu^*) + iq(\mu^*)$ with $p(\mu^*) = 0, q(\mu^*) \neq 0$ dan memenuhi kondisi transversal.

METODE

Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Review Jurnal

Secara umum isi artikel adalah tentang analisis stabilitas model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II pada kolam stabilisasi fakultatif.

2. Pembuatan Model

Model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II pada kolam stabilisasi fakultatif yang akan dipelajari pada penelitian ini diperoleh dari pengembangan model penelitian sebelumnya.

3. Tahap Penentuan Titik Tetap

Titik tetap diperoleh dengan membuat laju perubahan predator dan mangsa terhadap waktu sama dengan nol.

4. Tahap Analisis Kestabilan Titik Tetap

Stabilitas titik tetap tanpa waktu tunda diperoleh dengan pendekatan linier. Titik-titik interior tersebut disubstitusikan kedalam matriks Jacobi sehingga nilai eigen dapat dianalisis dengan Routh Hurwitz untuk menentukan stabilitas. Suatu titik tetap dengan waktu tunda memerlukan pendekatan

dalam ruang yang kompleks untuk menganalisis bifurkasi Hopf.

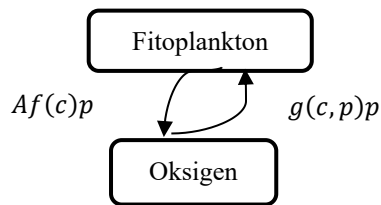
5. Tahap Penentuan Kondisi Transversal
Kondisi transversal ditentukan untuk membuktikan bahwa bifurkasi Hopf terjadi pada titik kesetimbangan dalam.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. PENGEMBANGAN MODEL

Model Dasar

Kita mulai dengan model konseptual sederhana yang hanya memperhitungkan dinamika oksigen dan fitoplankton sebagai penghasil utamanya.



Gambar 1. Interaksi antara oksigen dan fitoplankton.

Fitoplankton menghasilkan oksigen melalui fotosintesis pada siang hari tergantung keberadaan sinar matahari dan mengkonsumsinya pada malam hari

$$\frac{dc}{dt} = Af(c)p - mc, \quad (12)$$

$$\frac{dp}{dt} = g(c,p)p, \quad (13)$$

disini c dan p konsentrasi oksigen terlarut dan kepadatan fitoplankton $f(c)$: jumlah oksigen yang dihasilkan per satuan waktu dan fitoplankton per satuan massa, $g(c,p)$: laju pertumbuhan fitoplankton per kapita, A : pengaruh faktor lingkungan pada laju produksi oksigen dan mc : kehilangan oksigen akibat penipisan alami, misalnya difusi oksigen, konsumsi organisme perairan. Perhatikan bahwa persamaan (12) linear terhadap p . Sebaliknya, persamaan (13) nonlinear terhadap p (ketergantungan g pada p) karena kepadatan fitoplankton yang tinggi diketahui dapat menghambat pertumbuhannya sendiri, misalnya penipisan nutrisi. Untuk lebih memahami sifat fungsi f and g , harus meninjau lebih teliti produksi dan konsumsi oksigen. Meninjau $f(c)$ terlebih dahulu. Oksigen dihasilkan melalui fotosintesis oleh fitoplankton dan kemudian berdifusi menuju air sekitarnya. Difusi fluks selalu diarahkan dari daerah dengan konsentrasi zat penyebaran yang lebih tinggi ke daerah yang lebih rendah dan lebih mudah kelihatan dengan meningkatnya perbedaan antara

6. Tahap Simulasi Stabilitas Titik Interior

Simulasi dilakukan untuk setiap parameter sesuai kondisi. Hasil simulasi dianalisis, sehingga diperoleh gambaran pengaruh waktu tunda terhadap predator dan mangsa.

konsentrasi (hukum Fick). Oleh karena itu, untuk laju fotosintesis yang sama, jumlah oksigen yang masuk melalui membran sel akan lebih besar sehingga semakin rendah konsentrasi oksigen di sekitar air. Oleh karena itu, f harus fungsi monoton turun pada c . Mengasumsikan bahwa fluks oksigen melalui membran sel cenderung nol ketika konsentrasi oksigen dalam air sangat besar, yaitu secara fisika mendekati nilai jenuh untuk $c \rightarrow \infty$. Sifat diatas secara kualitatif diperhitungkan sebagai parameterisasi berikut.

$$f(c) = 1 - \frac{c}{c+c_0}, \quad (14)$$

dimana c_0 : konstanta setengah jenuh. Mempertimbangkan penggandaan fitoplankton, berasumsi bahwa $g(c,p) = \alpha(c) - \gamma p$ dimana $\alpha(c)$: pertumbuhan linear fitoplankton dan γp : persaingan intraspesifik untuk memperebutkan sumber daya yang terbatas. Persamaan (13) untuk pertumbuhan fitoplankton pada dasarnya merupakan persamaan pertumbuhan logistik dimana $\frac{1}{\gamma}$: daya dukung lingkungan diasumsikan tidak tergantung pada c . Namun, laju pertumbuhan linear α harus bergantung pada c , yang dapat dilihat dari penjelasan berikut. Fitoplankton menghasilkan oksigen melalui fotosintesis pada siang hari, namun fitoplankton membutuhkan oksigen untuk proses metabolisme (misalnya pernapasan) di malam hari; Oleh karena itu, konsentrasi oksigen yang rendah tidak menguntungkan bagi fitoplankton dan cenderung menekan reproduksinya. Di sisi lain, sel fitoplankton tidak dapat mengambil lebih banyak oksigen daripada yang dibutuhkannya. Oleh karena itu, α harus menjadi fungsi monoton naik dari c yang cenderung bernilai konstan untuk $c \rightarrow \infty$. Parameterisasi paling sederhana untuk α kemudian diberikan oleh fungsi Monod, sehingga untuk $g(c,p)$ diperoleh:

$$g(c,p) = \frac{Bc}{c+c_1} - \gamma p, \quad (15)$$

dimana c_1 : konstanta setengah jenuh dan B : laju pertumbuhan maksimum fitoplankton per kapita. Berdasarkan persamaan (14-15), Eqs. (12-13) mengambil bentuk berikut.

$$\frac{dc}{dt} = A \left(1 - \frac{c}{c+c_0}\right) p - mc, \quad (16)$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{Bc}{c+c_1} - \gamma p\right) p. \quad (17)$$

$$t' = tm, c' = \frac{c}{c_0}, p' = \frac{\gamma p}{m}, \hat{A} = \frac{A}{c_0 \gamma}, \hat{B} = \frac{B}{m}, \hat{c}_1 = \frac{c_1}{c_0}.$$

Pada persamaan (16-17), parameter $t' = tm \Leftrightarrow t = \frac{t'}{m}$ menggambarkan kelipatan dari waktu t , $c' = \frac{c}{c_0} \Leftrightarrow c = c'c_0$ menunjukkan konsentrasi oksigen terlarut disertai adanya pengaruh tingkat kejenuhan air, $p' = \frac{\gamma p}{m} \Leftrightarrow p = \frac{mp'}{\gamma}$ menunjukkan kepadatan populasi fitoplankton, $\hat{A} = \frac{A}{c_0 \gamma} \Leftrightarrow A = \hat{A}c_0 \gamma$ menggambarkan pengaruh faktor lingkungan pada laju produksi oksigen yang tergantung pada tingkat kejenuhan air, $\hat{B} = \frac{B}{m} \Leftrightarrow B = \hat{B}m$ menunjukkan laju pertumbuhan maksimum fitoplankton per kapita dan $\hat{c}_1 = \frac{c_1}{c_0} \Leftrightarrow c_1 = \hat{c}_1 c_0$ tingkat kejenuhan pertumbuhan maksimum fitoplankton.

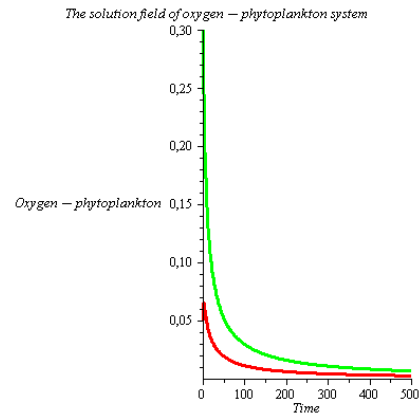
Jadi, Persamaan (16-17) setara dengan persamaan berikut.

$$\frac{dc}{dt} = A \left(1 - \frac{c}{c+c_0}\right) p - mc, \quad (18)$$

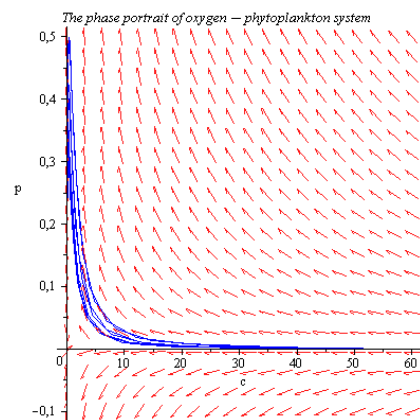
$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{Bc}{c+c_1} - p\right) p. \quad (19)$$

Persamaan (16-17) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu $T_0(0,0)$ dan $T_1\left(\frac{-c_1-1+\sqrt{\Omega}}{2}, \frac{2AB+c_1(c_1-1)-c_1\sqrt{\Omega}}{2A}\right)$ dimana $\Omega = 4AB + (c_1-1)^2$ dengan kondisi $2AB + c_1(c_1-1) > 0$ dan $AB > c_1$ dengan matriks Jacobian $J = \begin{pmatrix} -\frac{Ap}{(c+1)^2} - 1 & \frac{A}{c+1} \\ \frac{Bc_1p}{(c+c_1)^2} & \frac{Bc}{c+c_1} - 2p \end{pmatrix}$. Dari matriks Jacobian, persamaan (16-17) dihitung di setiap titik kesetimbangan, memperoleh nilai $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = 1$ untuk T_0 , $\lambda_{1,2} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\Omega}}{2}$ dimana $\rho = \frac{A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} + 2\tilde{p} + 1$ dan $\Omega = \frac{\tilde{p}\tilde{c}(2\tilde{p}\tilde{c}A + 4\tilde{p}Ac_1 + 2\tilde{c}^3 + 4\tilde{c}^2 + 2\tilde{c} + 4\tilde{c}^2c_1 + 8\tilde{c}c_1 + 4c_1 + 2\tilde{c}c_1^2 + 4c_1^2)}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)^2} + \frac{B\tilde{c}(-\tilde{c}^3 - 2\tilde{c}^2 - \tilde{c} - \tilde{c}^2c_1 - 2\tilde{c}c_1 - c_1 + \tilde{p}\tilde{c}A) + \tilde{p}c_1(2\tilde{p}c_1A - AB + 2c_1)}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)^2}$ untuk $T_1\left(\frac{-c_1-1+\sqrt{\Omega}}{2}, \frac{2AB+c_1(c_1-1)-c_1\sqrt{\Omega}}{2A}\right)$ dimana $\Omega = 4AB + (c_1-1)^2$.

Hasil simulasi dapat ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Bidang Solusi system oksigen-fitoplankton di titik T_0 dan T_1



Gambar 3. Potret fase system oksigen-fitoplankton di titik T_0 dan T_1

Model Tiga Komponen Lanjutan

Dinamika temporal yang sesuai dijelaskan oleh sistem persamaan diferensial biasa tiga komponen berikut.

$$\frac{dc}{dt} = Af(c)p - c, \quad (20)$$

$$\frac{dp}{dt} = g(c,p)p - e(p,z), \quad (21)$$

$$\frac{dz}{dt} = e(p,z) - \mu z, \quad (22)$$

dimana semua notasi sama seperti dalam bagian (12-13). Selain itu, di sini z : kepadatan zooplankton pada waktu t , dan fungsi $e(p,z)$: angka kenaikan populasi zooplankton akibat predasi dimana μ : laju kematian predator. Dalam model di atas, diasumsikan bahwa interaksi fitoplankton zooplankton digambarkan oleh model *predator-prey* standar dengan fungsi respon Holling tipe II. Suku negatif kedua dari persamaan (21) sesuai dengan pemburuan zooplankton pada fitoplankton, oleh sebab itu predasi ini berkontribusi pada suku $\beta e(p,z)$. Mempertimbangkan fungsi respon Holling tipe II

pada predator dan menggunakan parameterisasi berikut untuk predator:

$$e(p, z) = \frac{\beta pz}{p+h} \quad (23)$$

dimana h : konstanta setengah jenuh dan β : laju pertumbuhan maksimum populasi zooplankton akibat predasi. Berdasarkan persamaan (23) dan persamaan (18-19), maka persamaan (20-22) mengambil bentuk berikut:

$$\frac{dc}{dt} = A \left(1 - \frac{c}{c+1}\right) p - c, \quad (24)$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{Bc}{c+c_1} - p\right) \gamma p - \frac{\beta pz}{p+h}, \quad (25)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\beta pz}{p+h} - \mu z. \quad (26)$$

$$t' = tm, c' = \frac{c}{c_0}, p' = \frac{\gamma p}{m}, z' = \frac{\beta z}{m}, \hat{A} = \frac{A}{c_0 \gamma}, \hat{B} = \frac{B}{m}, \hat{c}_1 = \frac{c_1}{c_0}, h' = \frac{\gamma h}{m}, \hat{\mu} = \frac{\mu}{m}.$$

Pada persamaan sistem (26), parameter $z' = \frac{\beta z}{m} \Leftrightarrow z = \frac{mz'}{\beta}$ menggambarkan kepadatan populasi zooplankton, $h' = \frac{\gamma h}{m} \Leftrightarrow h = \frac{h'm}{\gamma}$ menunjukkan laju pertumbuhan maksimum fitoplankton per kapita dan $\hat{\mu} = \frac{\mu}{m} \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu}m$ menggambarkan laju kematian alami zooplankton.

Jadi, persamaan (24-26) setara dengan persamaan berikut.

$$\frac{dc}{dt} = A \left(1 - \frac{c}{c+1}\right) p - c, \quad (27)$$

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{Bc}{c+c_1} - p\right) p - \frac{pz}{p+h}, \quad (28)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\beta pz}{p+h} - \mu z. \quad (29)$$

Kemudian dengan memberikan waktu tunda diskrit pada laju penurunan zooplankton akibat predasi, model persamaannya menjadi

$$\frac{dc(t)}{dt} = A \left(1 - \frac{c(t)}{c(t)+1}\right) p(t) - c(t), \quad (30)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \left(\frac{Bc(t)}{c(t)+c_1} - p(t)\right) p(t) - \frac{p(t-\tau)z(t)}{p(t-\tau)+h}, \quad (31)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\beta p(t-\tau)z(t)}{p(t-\tau)+h} - \mu z(t). \quad (32)$$

2. EKUILIBRIUM

Teorema 1.

Dari persamaan diatas (30-32), kita memperoleh:

1. Tanpa syarat, persamaan (30-32) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium, yaitu T_0 .
2. Jika $2AB + c_1(c_1 - 1) > 0$ dan $AB > c_1$ maka persamaan (30-32) hanya mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu T_0 dan T_1 .

3. Jika $\beta > \mu$ dan $\frac{B \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} \right)}{-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} + 2c_1} > \frac{\mu h}{\beta - \mu}$ maka

persamaan (30-32) hanya mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu T_0 dan T_2 .

4. Jika $2AB + c_1(c_1 - 1) > 0, AB > c_1, \beta > \mu$ dan $\frac{B \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} \right)}{-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} + 2c_1} > \frac{\mu h}{\beta - \mu}$ maka persamaan (30-32) mempunyai tiga titik kesetimbangan, yaitu T_0, T_1 dan T_2 .

Bukti:

Persamaan (27-29) mencapai titik kesetimbangan ketika

$$A \left(1 - \frac{c}{c+1}\right) p - c = 0, \quad (33)$$

$$\left(\frac{Bc}{c+c_1} - p\right) p - \frac{pz}{p+h} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\beta pz}{p+h} - \mu z = 0. \quad (35)$$

Dari persamaan (35) $\frac{\beta \tilde{p}\tilde{z}}{\tilde{p}+h} - \mu\tilde{z} = 0 \Rightarrow \tilde{z} = 0 \vee \tilde{p} = \frac{\mu h}{\beta - \mu}$.

- (1) Kasus $\tilde{z} = 0$. $\left(\frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} - \tilde{p}\right)\tilde{p} - \frac{\tilde{p}\tilde{z}}{\tilde{p}+h} = 0 \Rightarrow \tilde{p} = 0 \vee \tilde{c} = \frac{\tilde{p}c_1}{B-\tilde{p}}$.

- (a) Kasus $\tilde{z} = 0$ dan $\tilde{p} = 0$. $A \left(1 - \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}+1}\right) \tilde{p} - \tilde{c} = 0 \Leftrightarrow \tilde{c} = 0$. Jadi kita memperoleh $T_0(0, 0, 0)$.

- (b) Kasus $\tilde{z} = 0$ dan $\tilde{c} = \frac{\tilde{p}c_1}{B-\tilde{p}}$. $A \left(1 - \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}+1}\right) \tilde{p} - \tilde{c} = 0 \Leftrightarrow \tilde{p} = \frac{\tilde{c}}{A}(\tilde{c} + 1)$. Substitusi $\tilde{c} = \frac{\tilde{p}c_1}{B-\tilde{p}}$ ke

persamaan $\tilde{p} = \frac{\tilde{c}}{A}(\tilde{c} + 1)$ kita mendapat $\tilde{p}_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A}$, dimana $\sigma = -2AB - c_1^2 + c_1$ dan $\kappa = AB^2$

$-Bc_1$. Mengingat bahwa $\tilde{p} = \frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A} > 0$, maka $\sigma^2 - 4A\kappa \geq 0, \sigma < 0$ dan $-\sigma$

$-\sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa} > 0 \Leftrightarrow -4A\kappa < 0$, sehingga $\kappa > 0 \Leftrightarrow AB > c_1$. Mempertimbangkan

$\tilde{p} = \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A} > 0$ maka $\sigma^2 - 4A\kappa \geq 0, \sigma < 0$ dan $-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa} > 0 \Leftrightarrow -4A\kappa > 0$, sehingga $\kappa < 0 \Leftrightarrow AB < c_1$. Jadi, akar positif

unik ada untuk $\tilde{p} = \frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A} > 0$ dengan kondisi $\sigma^2 - 4A\kappa \geq 0, \sigma < 0$ dan $AB > c_1$. Jadi kita memperoleh

$$T_1 \left(\left(\frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A} \right) c_1, \frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A}, 0 \right) \text{ dengan}$$

syarat $\sigma^2 - 4A\kappa \geq 0, \sigma < 0$ dan $AB > c_1$.

Substitusikan $\sigma = -2AB - c_1^2 + c_1$ dan $\kappa =$

$AB^2 - Bc_1$ ke persamaan $\frac{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa})}{2A}c_1$ kita

mendapat

$$\frac{(-(-2AB - c_1^2 + c_1) - \sqrt{(-2AB - c_1^2 + c_1)^2 - 4A(AB^2 - Bc_1)})}{2AB + (-2AB - c_1^2 + c_1) + \sqrt{(-2AB - c_1^2 + c_1)^2 - 4A(AB^2 - Bc_1)}}c_1 = \frac{-c_1 - 1 + \sqrt{\Omega}}{2}, \text{ dengan } \Omega = 4AB$$

$+(c_1 - 1)^2$. Substitusi $\sigma = -2AB - c_1^2 + c_1$ dan $\kappa = AB^2 - Bc_1$ ke persamaan $\frac{-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4A\kappa}}{2A}$ kita memperoleh

$$\frac{-(-2AB - c_1^2 + c_1) - \sqrt{(-2AB - c_1^2 + c_1)^2 - 4A(AB^2 - Bc_1)}}{2A} = \frac{2AB + c_1(c_1 - 1) - c_1\sqrt{\Omega}}{2A}. \text{ Jadi kita mendapat } T_1\left(\frac{-c_1 - 1 + \sqrt{\Omega}}{2}, \frac{2AB + c_1(c_1 - 1) - c_1\sqrt{\Omega}}{2A}, 0\right) \text{ dimana } \Omega = 4AB + (c_1 - 1)^2 \text{ dengan syarat } 2AB + c_1(c_1 - 1) > 0 \text{ dan } AB > c_1.$$

$$(2) \text{ Kasus } \tilde{p} = \frac{\mu h}{\beta - \mu}. \left(\frac{B\tilde{c}}{\tilde{c} + c_1} - \tilde{p}\right)\tilde{p} - \frac{\tilde{p}\tilde{z}}{\tilde{p} + h} = 0 \Leftrightarrow \tilde{z} = \left(\frac{\mu h}{\beta - \mu} + h\right)\left(\frac{B\tilde{c}}{\tilde{c} + c_1} - \frac{\mu h}{\beta - \mu}\right).$$

Substitusi $\tilde{p} = \frac{\mu h}{\beta - \mu}$ ke persamaan (33) kita memperoleh $A\left(1 - \frac{\tilde{c}}{\tilde{c} + 1}\right)\tilde{p} - \tilde{c} = 0 \Rightarrow \tilde{c}_{1,2} =$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}}}{2}. \text{ Jadi terdapat}$$

$$T_2\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}}}{2}, \frac{\mu h}{\beta - \mu}, \frac{\beta h\left(\mu B - \mu B\sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} - \beta B + \beta B\sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} + \mu h - \mu h\sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}}\right)}{(\beta - \mu)^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} + 2c_1\right)}\right)$$

$$\text{dengan syarat } \beta > \mu \text{ dan } \frac{B\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}}\right)}{-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}} + 2c_1} > \frac{\mu h}{\beta - \mu}.$$

3. STABILITAS T_2 TANPA WAKTU TUNDA

Teorema 2.

Kita mempunyai T_0, T_1 dan T_2 yang merupakan tiga titik kesetimbangan dari persamaan (16-18) yang terdapat pada teorema 1.

1. Titik ekuilibrium T_0 tidak informatif.
2. Titik ekuilibrium T_1 simpul stabil dan simpul tidak stabil.
3. Titik ekuilibrium T_2 simpul stabil.

Bukti.

Matriks Jacobian dari persamaan (27-29) diberikan

$$\text{oleh } J = \begin{pmatrix} \frac{-Ap}{(c+1)^2} - 1 & \frac{A}{c+1} & 0 \\ \frac{Bc_1p}{(c+c_1)^2} & \frac{Bc}{c+c_1} - 2p - \frac{zh}{(p+h)^2} & -\frac{p}{p+h} \\ 0 & \frac{\beta hz}{(p+h)^2} & \frac{\beta p}{p+h} - \mu \end{pmatrix}.$$

(1) Di $T_0(0, 0, 0)$, matriks Jacobiannya adalah

$$J(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}. \text{ Jadi, kita mendapat}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0 \text{ dan } \lambda_3 = -\mu.$$

(2) Di $T_1(\tilde{c}, \tilde{p}, 0)$, matriks Jacobiannya adalah

$$J(\tilde{c}, \tilde{p}, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - 1 - \lambda & \frac{A}{\tilde{c}+1} & 0 \\ \frac{Bc_1\tilde{p}}{(\tilde{c}+c_1)^2} & \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p} - \lambda & -\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+h} \\ 0 & 0 & \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \mu - \lambda \end{pmatrix}.$$

Jadi, kita mendapat $\lambda_1 = \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \mu \vee \lambda_{1,2} =$

$$\frac{-\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 4\Theta}}{2} \text{ dimana } \kappa = \frac{A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} + 2\tilde{p} + 1 \text{ dan}$$

$$\Theta = \frac{A\tilde{p}(-B\tilde{c}^2 - 2B\tilde{c}c_1 + 2\tilde{p}\tilde{c}^2 + 4\tilde{p}\tilde{c}c_1 + 2\tilde{p}c_1^2)}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)^2} + \frac{B(\tilde{c}^4 - 2\tilde{c}^3 - \tilde{c}^2 - \tilde{c}^3c_1 - 2\tilde{c}^2c_1 - \tilde{c}c_1 - Ac_1\tilde{p})}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)^2} + \frac{2\tilde{p}(\tilde{c}^4 + 2\tilde{c}^3c_1 + \tilde{c}^2c_1^2 + 2\tilde{c}^3 + 4\tilde{c}^2c_1 + 2c_1^2\tilde{c} + \tilde{c}^2 + 2c_1\tilde{c})}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)^2}.$$

(3) Di $T_2(\tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{z})$ matriks Jacobiannya adalah

$$J(\tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} -\frac{A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - 1 & \frac{A}{\tilde{c}+1} & 0 \\ \frac{Bc_1\tilde{p}}{(\tilde{c}+c_1)^2} & \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p} - \frac{\tilde{z}h}{(\tilde{p}+h)^2} & -\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+h} \\ 0 & \frac{\beta h\tilde{z}}{(\tilde{p}+h)^2} & \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \mu \end{pmatrix} = \lambda^3 -$$

$$\phi\lambda^2 - \varepsilon\lambda - \rho = 0. \text{ Jika } \phi = -\mu - \frac{A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - 1 +$$

$$\frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h}, \varepsilon = -\frac{A\tilde{p}\mu}{(\tilde{c}+1)^2} - \mu + \frac{B\tilde{c}\mu}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p}\mu - \frac{\tilde{z}h\mu}{(\tilde{p}+h)^2} + \frac{A\tilde{p}B\tilde{c}}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)} - \frac{2\tilde{p}^2A}{(\tilde{c}+1)^2} - \frac{A\tilde{p}\tilde{z}h}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{p}+h)^2} + \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p} - \frac{\tilde{z}h}{(\tilde{p}+h)^2} + \frac{A\tilde{p}^2\beta}{(\tilde{p}+h)(\tilde{c}+1)^2} + \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \frac{\beta\tilde{p}B\tilde{c}}{(\tilde{c}+c_1)(\tilde{p}+h)} + \frac{2\beta\tilde{p}^2}{\tilde{p}+h} + \frac{ABc_1\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)(\tilde{c}+c_1)^2}, \rho = -\frac{A\beta\tilde{p}^2\tilde{z}h}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{p}+h)^3} - \frac{\beta\tilde{p}h\tilde{z}}{(\tilde{p}+h)^3} - \frac{AB\beta\tilde{p}^2\tilde{c}}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)(\tilde{p}+h)} + \frac{2A\tilde{p}^3\beta}{(\tilde{p}+h)(\tilde{c}+1)^2} + \frac{A\beta\tilde{p}^2\tilde{z}h}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{p}+h)^3} - \frac{B\beta\tilde{p}\tilde{c}}{(\tilde{c}+c_1)(\tilde{p}+h)} + \frac{2\beta\tilde{p}^2}{\tilde{p}+h} + \frac{\beta\tilde{p}\tilde{z}h}{(\tilde{p}+h)^3} - \frac{AB\beta\tilde{p}^2c_1}{(\tilde{c}+1)(\tilde{c}+c_1)^2(\tilde{p}+h)} + \frac{ABc_1\tilde{p}\mu}{(\tilde{c}+1)(\tilde{c}+c_1)^2} - \frac{2A\tilde{p}^2\mu}{(\tilde{c}+1)^2} - \frac{A\tilde{p}\tilde{z}h\mu}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{p}+h)^2} + \frac{B\tilde{c}\mu}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p}\mu - \frac{\tilde{z}h\mu}{(\tilde{p}+h)^2} + \frac{AB\tilde{p}\tilde{c}\mu}{(\tilde{c}+1)^2(\tilde{c}+c_1)}.$$

Sehingga kita mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = \frac{\phi}{3} +$

$$\frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}(-\phi^2 - 3\varepsilon)}}{3(-27\rho - 2\phi^3 - 9\phi\varepsilon + 3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2 + 4\rho\phi^3 + 18\rho\phi\varepsilon - \phi^2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3})^{\frac{1}{3}}} - \frac{(-27\rho - 2\phi^3 - 9\phi\varepsilon + 3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2 + 4\rho\phi^3 + 18\rho\phi\varepsilon - \phi^2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3})^{\frac{1}{3}}}{3.2^{\frac{1}{3}}}, \lambda_2 = \frac{\phi}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})(-\phi^2 - 3\varepsilon)}{3.2^{\frac{2}{3}}(-27\rho - 2\phi^3 - 9\phi\varepsilon + 3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2 + 4\rho\phi^3 + 18\rho\phi\varepsilon - \phi^2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3})^{\frac{1}{3}}}$$

$$+ \frac{(1-i\sqrt{3})(-27\rho-2\phi^3-9\phi\epsilon+3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2+4\rho\phi^3+18\rho\phi\epsilon-\phi^2\epsilon^2-4\epsilon^3})^{\frac{1}{3}}}{6.2^{\frac{1}{3}}}, \quad b_7 = \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \mu.$$

$$\frac{\phi}{3} -$$

$$\frac{(1-i\sqrt{3})(-\phi^2-3\epsilon)}{3.2^{\frac{2}{3}}(-27\rho-2\phi^3-9\phi\epsilon+3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2+4\rho\phi^3+18\rho\phi\epsilon-\phi^2\epsilon^2-4\epsilon^3})^{\frac{1}{3}}} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-27\rho-2\phi^3-9\phi\epsilon+3\sqrt{3}\sqrt{27\rho^2+4\rho\phi^3+18\rho\phi\epsilon-\phi^2\epsilon^2-4\epsilon^3})^{\frac{1}{3}}}{6.2^{\frac{1}{3}}}.$$

4. STABILITAS T_2 DENGAN WAKTU TUNDA

Teorema 3

Jika $\beta > \mu$ dan $\frac{B(-1+\sqrt{1+\frac{4A\mu h}{\beta-\mu}})}{-1+\sqrt{1+\frac{4A\mu h}{\beta-\mu}}+2c_1} > \frac{\mu h}{\beta-\mu}$ dipenuhi dan

diberikan τ_k dan $\omega_k > 0$ diperoleh dari persamaan $\omega_k = \sqrt{z^*}$ dimana $z^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$

dan $\omega^6 + A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0$, dengan

$$A = b_7^2 + 2b_2b_3 + b_1^2 - b_4^2,$$

$$B = b_1^2b_7^2 + b_2^2b_3^2 + 2b_2b_3b_7^2 + 2b_4b_5b_6b_7 - b_5^2b_6^2 - b_1^2b_4^2 - b_4^2b_7^2,$$

$$C = -b_1^2b_5^2b_6^2 + 2b_1^2b_4b_5b_6b_7 + b_2^2b_3^2b_7^2 - b_1^2b_4^2b_7^2$$

Dengan kondisi Routh Hurwitz Dimana

$$b_1 = \frac{-A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - 1, b_2 = \frac{A}{\tilde{c}+1}, b_3 = \frac{Bc_1\tilde{p}}{(\tilde{c}+c_1)^2}, b_4 = \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} -$$

$$2\tilde{p} - \frac{\tilde{z}h}{(\tilde{p}+h)^2}, b_5 = -\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+h}, b_6 = \frac{\beta h\tilde{z}}{(\tilde{p}+h)^2}, b_7 = \frac{\beta\tilde{p}}{\tilde{p}+h} - \mu$$

selanjutnya T_2 adalah keseimbangan persamaan (16-18), maka

1. Titik kesetimbangan dalam T_2 dari persamaan (16-18) stabil ketika $\tau < \tau_k$ dan tidak stabil ketika $\tau > \tau_k$.
2. Persamaan (16-18) mengalami bifurkasi Hopf pada titik kesetimbangan T_2 ketika $\tau = \tau_k$.

Bukti.

Hasil analisis menunjukkan bahwa T_2 stabil. Dengan memberikan waktu tunda $\tau > 0$ akan menyebabkan perubahan kestabilan titik kesetimbangan T_2 . Untuk menganalisis titik kesetimbangan T_2 dengan waktu tunda, kita melinearkan (27-29) di sekitar titik ekuilibrium T_2 , kemudian diperoleh model yang dilinearisasi

$$\frac{dc}{dt} = b_1c(t) + b_2p(t), \quad (36)$$

$$\frac{dp}{dt} = b_3c(t) + b_4p(t-\tau) + b_5z(t), \quad (37)$$

$$\frac{dz}{dt} = b_6p(t-\tau) + b_7z(t), \quad (38)$$

$$\text{dimana } b_1 = \frac{-A\tilde{p}}{(\tilde{c}+1)^2} - 1, b_2 = \frac{A}{\tilde{c}+1}, b_3 = \frac{Bc_1\tilde{p}}{(\tilde{c}+c_1)^2}, b_4 =$$

$$\frac{B\tilde{c}}{\tilde{c}+c_1} - 2\tilde{p} - \frac{\tilde{z}h}{(\tilde{p}+h)^2}, b_5 = -\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}+h}, b_6 = \frac{\beta h\tilde{z}}{(\tilde{p}+h)^2},$$

Misalkan solusi persamaan (36-38) adalah

$$c(t) = le^{\lambda t}, p(t) = me^{\lambda t}, z(t) = ne^{\lambda t}. \quad (39)$$

Substitusi persamaan (39) ke persamaan (36-38), lalu dibagi $e^{\lambda t}$ sehingga

$$l\lambda = b_1l + b_2m, \quad (40)$$

$$m\lambda = b_3l + b_4me^{-\lambda\tau} + b_5n, \quad (41)$$

$$n\lambda = b_6me^{-\lambda\tau} + b_7n. \quad (42)$$

Persamaan (40-42) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} l\lambda \\ m\lambda \\ n\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4e^{-\lambda\tau} & b_5 \\ 0 & b_6e^{-\lambda\tau} & b_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}.$$

Jadi kita mendapat persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4e^{-\lambda\tau} - \lambda & b_5 \\ 0 & b_6e^{-\lambda\tau} & b_7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 + (-b_1 - b_4e^{-\lambda\tau} - b_7)\lambda^2 + (b_1b_4e^{-\lambda\tau} + b_1b_7 + b_4b_7e^{-\lambda\tau} - b_2b_3 - b_5b_6e^{-\lambda\tau}) - b_1b_4b_7e^{-\lambda\tau} + b_2b_3b_7 + b_5b_6b_1e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (43)$$

Nilai eigen persamaan karakteristik (43) adalah real and negatif atau bilangan kompleks dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $-b_1 - b_4 - b_7 > 0$, $b_1b_4 + b_1b_7 + b_4b_7 - b_2b_3 - b_5b_6 > 0$ dan $-b_1b_4b_7 + b_2b_3b_7 + b_5b_6b_1 > 0$. Jadi dengan adanya waktu tunda, titik ekuilibrium T_2 stabil jika dan hanya jika kedua syarat tersebut terpenuhi. Sehingga nilai eigen dari persamaan (43) misal $\lambda = \mu \pm i\omega$ dengan $\mu = 0$ dan $\omega > 0$ ($\lambda = \pm i\omega$). Untuk melihat perubahan kestabilan persamaan model terhadap waktu tunda, maka nilai eigen tersebut disubstitusi ke persamaan (43) sehingga diperoleh akar-akar dari persamaan karakteristik

$$\Delta(i\omega, \tau) = b_1b_4\omega \sin \omega\tau + b_4b_7\omega \sin \omega\tau + b_4\omega^2 \cos \omega\tau + b_1\omega^2 + b_7\omega^2 - b_5b_6\omega \sin \omega\tau - b_1b_4b_7 \cos \omega\tau + b_5b_6b_1 \cos \omega\tau + b_2b_3b_7 + (-b_4\omega^2 \sin \omega\tau - \omega^3 + b_1b_4b_7 \sin \omega\tau + b_1b_4\omega \cos \omega\tau + b_4b_7\omega \cos \omega\tau + b_1b_7\omega - b_2b_3\omega - b_5b_6\omega \cos \omega\tau - b_1b_5b_6 \sin \omega\tau)i \quad (44)$$

Persamaan (44) bernilai nol jika bagian real dan bagian imajiner nol, maka diperoleh

$$\omega^3 - b_1b_7\omega + b_2b_3\omega = -b_4\omega^2 \sin \omega\tau + b_1b_4b_7 \sin \omega\tau + b_1b_4\omega \cos \omega\tau + b_4b_7\omega \cos \omega\tau - b_1b_5b_6 \sin \omega\tau - b_5b_6\omega \cos \omega\tau \quad (45)$$

$$\text{and } -b_1\omega^2 - b_7\omega^2 - b_2b_3b_7 = -b_1b_4b_7 \cos \omega\tau + b_1b_4\omega \sin \omega\tau + b_5b_6b_1 \cos \omega\tau + b_4b_7\omega \sin \omega\tau + b_4\omega^2 \cos \omega\tau - b_5b_6\omega \sin \omega\tau. \quad (46)$$

Selanjutnya mengeliminasi persamaan (45-46) dengan mengkuadratkan kedua sisi menghasilkan

$$\begin{aligned}
& b_1^2 b_7^2 \omega^2 - 2b_1 b_2 b_3 b_7 \omega^2 - 2b_1 b_7 \omega^4 + b_2^2 b_3^2 \omega^2 + \\
& 2b_2 b_3 \omega^4 + \omega^6 = b_1^2 b_4^2 b_7^2 \sin^2 \omega \tau + \\
& 2b_1^2 b_4^2 b_7 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_1^2 b_4^2 \omega^2 \cos^2 \omega \tau - \\
& 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 \sin^2 \omega \tau - 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& b_1^2 b_5^2 b_6^2 \sin^2 \omega \tau + 2b_1 b_4^2 b_7^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& 2b_1 b_4^2 b_7 \omega^2 \cos^2 \omega \tau - 2b_1 b_4^2 b_7 \omega^2 \sin^2 \omega \tau - \\
& 2b_1 b_4^2 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau - \\
& 4b_1 b_4 b_5 b_6 b_7 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau - 2b_1 b_4 b_5 b_6 \omega^2 \cos^2 \omega \tau + \\
& 2b_1 b_4 b_5 b_6 \omega^2 \sin^2 \omega \tau + 2b_1 b_5^2 b_6^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& b_4^2 b_7^2 \omega^2 \cos^2 \omega \tau - 2b_4^2 b_7 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& b_4^2 \omega^4 \sin^2 \omega \tau - 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega^2 \cos^2 \omega \tau + \\
& 2b_4 b_5 b_6 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_5^2 b_6^2 \omega^2 \cos^2 \omega \tau \quad (47)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& b_1^2 \omega^4 + 2b_1 b_2 b_3 b_7 \omega^2 + 2b_1 b_7 \omega^4 + b_2^2 b_3^2 b_7^2 + \\
& 2b_2 b_3 b_7^2 \omega^2 + b_7^2 \omega^4 = b_1^2 b_4^2 b_7^2 \cos^2 \omega \tau - \\
& 2b_1^2 b_4^2 b_7 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_1^2 b_4^2 \omega^2 \sin^2 \omega \tau - \\
& 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 \cos^2 \omega \tau + \\
& 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_1^2 b_5^2 b_6^2 \cos^2 \omega \tau - \\
& 2b_1 b_4^2 b_7^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau - 2b_1 b_4^2 b_7 \omega^2 \cos^2 \omega \tau + \\
& 2b_1 b_4^2 b_7 \omega^2 \sin^2 \omega \tau + 2b_1 b_4^2 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& 4b_1 b_4 b_5 b_6 b_7 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& 2b_1 b_4 b_5 b_6 \omega^2 \cos^2 \omega \tau - 2b_1 b_4 b_5 b_6 \omega^2 \sin^2 \omega \tau - \\
& 2b_1 b_5^2 b_6^2 \omega \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_4^2 b_7^2 \omega^2 \sin^2 \omega \tau + \\
& 2b_4^2 b_7 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau + b_4^2 \omega^4 \cos^2 \omega \tau - \\
& 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega^2 \sin^2 \omega \tau - 2b_4 b_5 b_6 \omega^3 \cos \omega \tau \sin \omega \tau + \\
& b_5^2 b_6^2 \omega^2 \sin^2 \omega \tau \quad (48)
\end{aligned}$$

Kemudian menambahkan kedua persamaan (47-48) dan mengelompokkan berdasarkan pangkat ω , kita memperoleh polinomial berderajat empat berikut.

$$\omega^6 + A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \quad (49)$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= b_7^2 + 2b_2 b_3 + b_1^2 - b_4^2, \\
B &= b_1^2 b_7^2 + b_2^2 b_3^2 + 2b_2 b_3 b_7^2 + 2b_4 b_5 b_6 b_7 - \\
& b_5^2 b_6^2 - b_1^2 b_4^2 - b_4^2 b_7^2, \\
C &= -b_1^2 b_5^2 b_6^2 + 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 + b_2^2 b_3^2 b_7^2 - \\
& b_1^2 b_4^2 b_7^2.
\end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan perhitungan, misalkan $z = \omega^2$, jadi persamaan (49) changes to

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0, \quad (50)$$

Nilai akar persamaan (50) ditentukan oleh Lemma 1 sebagai berikut.

Lemma 1. (Olsder, 2004)

Didefinisikan $\xi = A^2 - 3C$.

- Jika $C < 0$, maka persamaan (50) mempunyai akar positif sederhana unik.
- Jika $C \geq 0$ dan $\xi < 0$, maka persamaan (50) tidak mempunyai akar real.

- Jika $C \geq 0$ dan $\xi \geq 0$, maka persamaan (50) mempunyai dua akar positif jika dan hanya jika $z = \frac{1}{3}(-A + \sqrt{\xi}) > 0$ dan $h(z) \leq 0$.

Misalkan persamaan (50) mempunyai akar positif sederhana. Tanpa mengurangi keumuman, kita berasumsi bahwa persamaan tersebut mempunyai tiga akar positif, masing-masing dinotasikan oleh z_1, z_2 dan z_3 . Maka persamaan (50) mempunyai tiga akar positif, misalkan $\omega_1 = \sqrt{z_1}, \omega_2 = \sqrt{z_2}$ dan $\omega_3 = \sqrt{z_3}$.

Selanjutnya mensubstitusi ω_k ke persamaan. (45-46) dan menyelesaikan τ_k , kita mendapat

$$\tau = \frac{1}{\omega_k} \tan^{-1} \left(\frac{V}{Y} \right) + \frac{2k\pi}{\omega_k}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

dimana

$$\begin{aligned}
V &= b_1^2 b_4 b_7^2 \omega_k - b_1^2 b_5 b_6 b_7 \omega_k + b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 \omega_k - \\
& b_1 b_4 b_7 \omega_k^3 + b_1 b_5 b_6 \omega_k^3 + b_2 b_3 b_4 b_7^2 \omega_k + \\
& b_2 b_3 b_4 \omega_k^3 - b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 \omega_k + b_4 b_7^2 \omega_k^3 + b_4 \omega_k^5 - \\
& b_5 b_6 b_7 \omega_k^3 + b_1^2 b_4 \omega_k + b_1 b_4 b_7 \omega_k - b_1 b_5 b_6 \omega_k, \\
Y &= b_1^2 b_4^2 b_7^2 + b_1^2 b_4^2 \omega_k^2 - 2b_1^2 b_4 b_5 b_6 b_7 + \\
& b_1^2 b_5^2 b_6^2 - b_1 b_2 b_3 b_4 b_7^2 + b_1 b_2 b_3 b_5 b_6 b_7 - \\
& b_1 b_4 b_7^2 \omega_k^2 + b_1 b_5 b_6 b_7 \omega_k^2 + b_2 b_3 b_4 b_7 \omega_k^2 + \\
& b_4^2 b_7^2 \omega_k^2 + b_4^2 \omega_k^4 - 2b_4 b_5 b_6 b_7 \omega_k^2 + b_4 b_7 \omega_k^4 + \\
& b_5^2 b_6^2 \omega_k^2 - b_1^2 b_4 b_7 + b_1 b_4 \omega_k^2
\end{aligned}$$

Lemma 2

Jika salah satu dari berikut ini benar.

- $C < 0$ dan $h'(\omega_{bif}) \neq 0$;
- $C \geq 0, \xi > 0, \bar{z} > 0$ dan $h'(\bar{z}) < 0$;

maka $\frac{dRe\lambda(\tau_{bif})}{d\tau} \neq 0$, dimana τ_{bif} dan ω_{bif} didefinisikan dalam persamaan (50).

Selanjutnya mendiferensialkan (43) terhadap τ , maka kita memperoleh

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R + (S\lambda^2 + T\lambda + U)e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$P = -b_1 - b_7$$

$$Q = b_1 b_7 - b_2 b_3$$

$$R = b_2 b_3 b_7$$

$$S = -b_4$$

$$T = b_1 b_4 + b_4 b_7 - b_5 b_6$$

$$U = -b_1 b_4 b_7 + b_5 b_6 b_1$$

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R + S\lambda^2 e^{-\lambda\tau} + T\lambda e^{-\lambda\tau} + Ue^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\lambda^3)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + P \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} + Q \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} +$$

$$S \left\{ \lambda^2 \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d(\lambda^2)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} +$$

$$T \left\{ \lambda \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] + e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right\} +$$

$$U \left[\frac{d(e^{-\lambda\tau})}{d(-\lambda\tau)} \left(-\lambda \cdot 1 + \tau \frac{d(-\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda^2 \frac{d\lambda}{d\tau} + 2P\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + Q \frac{d\lambda}{d\tau} - S\lambda^3 e^{-\lambda\tau} - S\lambda^2 \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + 2S\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - T\lambda^2 e^{-\lambda\tau} - T\lambda \tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} + T \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} - U\lambda e^{-\lambda\tau} - U\tau \frac{d\lambda}{d\tau} e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{(S\lambda^2 + T\lambda + U)\lambda e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2P\lambda + Q - (S\lambda^2 + T\lambda + U)\tau e^{-\lambda\tau} + (2S\lambda + T)e^{-\lambda\tau}}$$

Dari persamaan (52), kita mempunyai $e^{-\lambda\tau} = \frac{-\lambda^3 - P\lambda^2 - Q\lambda}{S\lambda^2 + T\lambda + U}$. Maka kita mendapat

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(-\lambda^3 - P\lambda^2 - Q\lambda)}{3\lambda^2 + 2P\lambda + Q - \tau(-\lambda^3 - P\lambda^2 - Q\lambda) + (2S\lambda + T)e^{-\lambda\tau}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)_{\tau=\tau_b} &= \frac{\lambda(-\lambda^3 - P\lambda^2 - Q\lambda)}{3\lambda^2 + 2P\lambda + Q - \tau(-\lambda^3 - P\lambda^2 - Q\lambda) + (2S\lambda + T)e^{-\lambda\tau}} \\ &= \frac{i\omega_b(-(\omega_b)^3 - P(\omega_b)^2 - Q(\omega_b))}{3(i\omega_b)^2 + 2P(i\omega_b) + Q - \tau(-(i\omega_b)^3 - P(i\omega_b)^2 - Q(i\omega_b)) + (2S(i\omega_b) + T)(\cos \omega_b \tau_b - i \sin \omega_b \tau_b)} \\ &= \frac{-\omega_b^4 + i[\omega_b^3 + K\omega_b^2]}{-3\omega_b^2 + 2P(i\omega_b) + Q - \tau_b(i\omega_b)^3 - \tau_b P\omega_b^2 + \tau_b Q(i\omega_b) + 2S(i\omega_b) \cos \omega_b \tau_b + 2S\omega_b \sin \omega_b \tau_b + T \cos \omega_b \tau_b - T i \sin \omega_b \tau_b} \\ &= \frac{-\omega_b^4 + Q\omega_b^2 + P\omega_b^3 i}{P_1^2 + Q_1^2} \cdot (P_1 - Q_1 i) \end{aligned}$$

dengan

$$P_1 = -3\omega_b^2 + Q - \tau_b P\omega_b^2 + 2S\omega_b \sin \omega_b \tau_b + T \cos \omega_b \tau_b$$

$$Q_1 = 2P\omega_b - \tau_b \omega_b^3 + \tau_b Q\omega_b + 2S\omega_b \cos \omega_b \tau_b - S \sin \omega_b \tau_b$$

$$= \frac{3\omega_b^6 - 4Q\omega_b^4 + 2P^2\omega_b^4 + Q^2\omega_b^2}{P_1^2 + Q_1^2}$$

$$\text{Jadi } \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_b} = \frac{\omega_b^2(3\omega_b^4 + (-4Q + 2P^2)\omega_b^2)}{P_1^2 + Q_1^2} \neq 0$$

5. SIMULASI DI T_2 DENGAN WAKTU TUNDA

Simulasi numerik model oksigen terlarut-fitoplankton-zooplankton menggunakan Holling II dengan waktu tunda dilakukan untuk menunjukkan pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik kesetimbangan T_2 . Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi pada titik kesetimbangan T_2 dengan waktu tunda disajikan sebagai berikut.

$$B = 1; \beta = 2; \mu = 0,6; h = 0,35; A = 1; c_1 = 0,01.$$

Jadi diperoleh

$$\tilde{c} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4A\mu h}{\beta - \mu}}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 0,53 \cdot 0,5 \cdot 0,1}{1 - 0,5}}}{2} = 0,647508942.$$

$$\tilde{p} = \frac{\mu h}{\beta - \mu} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{1 - 0,5} = 0,15.$$

$$\tilde{z} = \frac{\beta h(-\mu B \tilde{c} + \beta B \tilde{c} - \mu h \tilde{c} - \mu h c_1)}{(\beta - \mu)^2(\tilde{c} + c_1)} = 0,4173955408$$

Jadi diperoleh titik ekuilibrium $T_2(0,647508942; 0,15; 0,4173955408)$.

Kemudian dari nilai parameter pada Tabel 1, diperoleh

$$b_1 = \frac{-A\tilde{p}}{(\tilde{c} + c_1)^2} - 1 = -1,055263158.$$

$$b_2 = \frac{A}{\tilde{c} + c_1} = 0,6069769787.$$

$$b_3 = \frac{Bc_1\tilde{p}}{(\tilde{c} + c_1)^2} = 0,003469668090.$$

$$b_4 = \frac{B\tilde{c}}{\tilde{c} + c_1} - 2\tilde{p} - \frac{\tilde{z}h}{(\tilde{p} + h)^2} = 0,1004373242.$$

$$b_5 = -\frac{\tilde{p}}{\tilde{p} + h} = -0,3.$$

$$b_6 = \frac{\beta h \tilde{z}}{(\tilde{p} + h)^2} = 1,168707514.$$

$$b_7 = \frac{\beta \tilde{p}}{\tilde{p} + h} - \mu = \frac{1,0,1}{0,1 + 0,1} - 0,5 = 0.$$

$$\omega^6 + (b_7^2 + 2b_2b_3 + b_1^2 - b_4^2)\omega^4 + (b_1^2b_7^2 + b_2^2b_3^2 + 2b_2b_3b_7^2 + 2b_4b_5b_6b_7 - b_5^2b_6^2 - b_1^2b_4^2 - b_4^2b_7^2)\omega^2 - b_1^2b_5^2b_6^2 + 2b_1^2b_4b_5b_6b_7 + b_2^2b_3^2b_7^2 - b_1^2b_4^2b_7^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \omega^6 + 1,107704694\omega^4 - 0,1341579329\omega^2 - 0,1368912642$$

Karena $\omega > 0$, maka dipilih $\omega_k = 0,595965266986721$.

Kemudian dicari nilai τ_k dengan mensubstitusi nilai $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ dan ω_k ke persamaan berikut (51) diperoleh $\tau_k = 0,4546731781$.

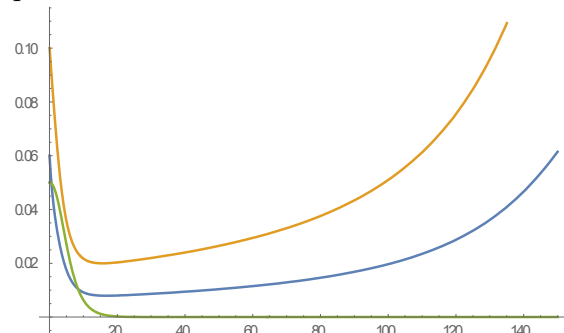
Pada artikel ini hanya dibahas nilai waktu tunda saat, sebelum dan sesudah nilai waktu tunda pada $k = 0$. Selain parameter yang disebutkan pada Tabel 3, perlu dilakukan pemilihan parameter waktu tunda yang dindikasikan untuk menunjukkan adanya bifurkasi Hopf.

Tabel 1. Pemilihan Waktu Tunda dan Stabilitas Model

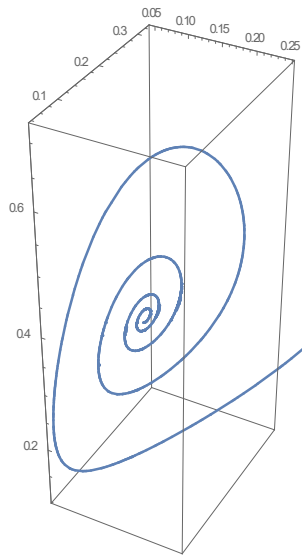
No	Kasus	τ	Stabilitas titik ekuilibrium
1	$\tau < \tau_k$	0,1	Spiral stabil
2	$\tau = \tau_k$	0,4546731781	Spiral stabil
3	$\tau > \tau_k$	0,8	Spiral tidak stabil

Simulasi di T_2 untuk kasus $\tau < \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 0,1 < \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4 dan 5.



Gambar 4. Bidang Solusi sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau < \tau_k$

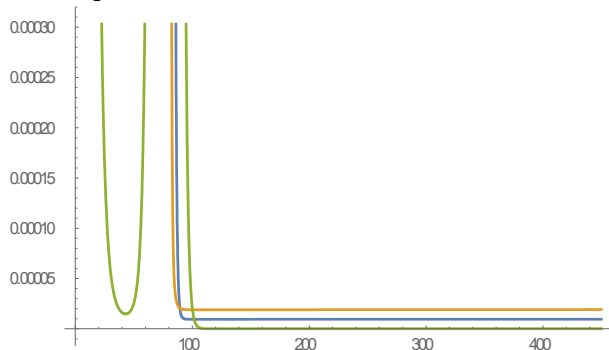


Gambar 5. Potret fase sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau < \tau_k$

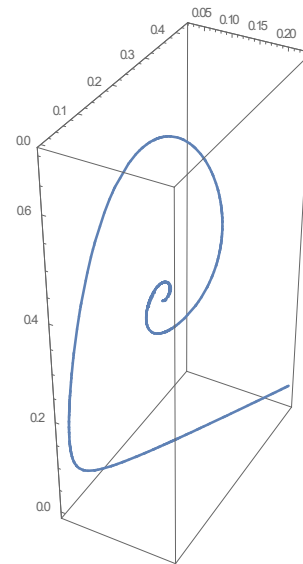
Untuk bidang Solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga oksigen-fito-zooplankton tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai. Gambar 5 juga menunjukkan T_2 kasus $\tau < \tau_k$ bersifat stabil. Jadi pada kondisi ini terjadi kestabilan jumlah oksigen-fito-zooplankton.

Simulasi di T_2 untuk kasus $\tau = \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 0,4546731781 = \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 6 dan 7.



Gambar 6. Bidang Solusi sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau = \tau_k$



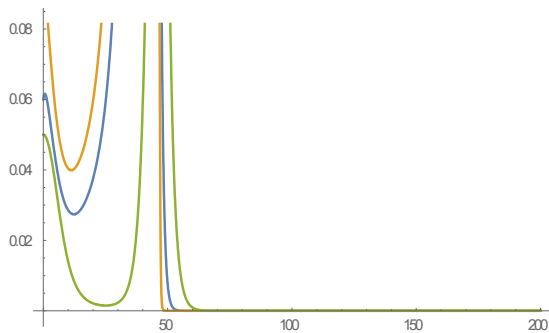
Gambar 7. Potret fase sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau = \tau_k$

Untuk bidang Solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin kecil, sehingga oksigen-fito-zooplankton tersebut berkembang dan akhirnya stabil menuju ke suatu nilai.

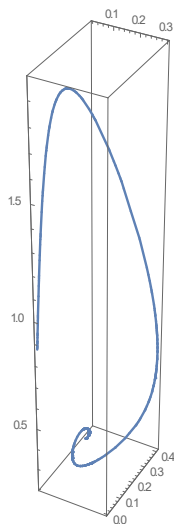
Gambar 7 juga menunjukkan T_2 kasus $\tau = \tau_k$ bersifat stabil. Jadi pada kondisi ini terjadi kestabilan jumlah oksigen-fito-zooplankton.

Simulasi di T_2 untuk kasus $\tau > \tau_k$

Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan adalah $\tau = 0,8 > \tau_k$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 8 dan 9.



Gambar 8. Bidang Solusi sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau > \tau_k$



Gambar 9. Potret fase sistem oksigen-fito-zooplankton di T_2 untuk kasus $\tau > \tau_k$

Untuk bidang Solusi memperlihatkan adanya osilasi dengan simpangan yang semakin besar, sehingga oksigen-fito-zooplankton tersebut berkembang dan di akhir waktu oksigen-fito-zooplankton mengalami penurunan jumlah dan hampir terjadi kepunahan.

Gambar 9 juga menunjukkan T_2 kasus $\tau > \tau_k$ bersifat tidak stabil. Jadi pada kondisi ini tidak terjadi kestabilan jumlah oksigen-fito-zooplankton.

Penutup Simpulan

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa berdasarkan model non-dimensional diperoleh model predator-prey menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan waktu tunda pada kolam stabilisasi limbah fakultatif.

Untuk menganalisis keberadaan bifurkasi Hopf, dinamika populasi predator-prey disimulasikan berdasarkan tiga kasus dengan meningkatkan waktu tunda laju penurunan populasi predator (τ_k). Dengan memilih nilai parameter yang tepat (τ_k), kita bisa menunjukkan adanya bifurkasi Hopf. Pada kasus $\tau = \tau_k$ spiral stabil berubah menjadi spiral tidak stabil dan juga muncul adanya limit cycle. Ini dikenal sebagai bifurkasi Hopf. Kemudian untuk mengilustrasikan model tersebut dilakukan simulasi model dengan menggunakan software Maple 12 dan mathematica 9. Simulasi model memberikan hasil yang sama dengan analisis.

Daftar Pustaka

- Chau, M., & Reith, R. (2020). IDC - Smartphone Market Share - Vendor. Retrieved January 8, 2021, from SmartphonAnton, H. 2005. *Elementary Linear Algebra 9th Edition*. Singapore: John Wiley & Sons.
- Clark, D. N. 1999. *Analysis Calculus and Differential Equation*. New York: CRC Press.
- Clark, D. N. 2000. *Dictionary of Analysis, Calculus and Differential Equations*. New York: CRC Press.
- Hull, V. 2008. Modelling dissolved oxygen dynamics in coastal lagoons. *Ecological Modelling*, Vol. 211, 468–480.
- Irwani. 2009. *Dynamic Behavior of Competition System Between Tumors with Immune in Delay Differential Equations*. Department of Mathematics ITS.
- Liao, X. et al. 2007. *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier, Vol. 5.
- Misra, A. K. 2010. Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to submerged macrophytes. *Nonlinear Analalysis Modelling and Control*, Vol. 15, No. 2, 185–198.
- Misra, A. K. et al. 2011. Modeling the depletion of dissolved oxygen in a lake due to algal bloom: Effect of time delay. *Advances in Water Resources*, Vol. 34, No. 12, 1232–1238.
- Oldsder, G. J. et al. 2004 *Mathematical System Theory*. Netherlands: VVSD.
- Strogatz, S. H. 2014. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering 2nd Ed*. Massachusetts: Cambridge Perseus Books.
- Sekerci, Y., Petrovskii, S. 2015. Mathematical Modelling of Plankton-Oxygen Dynamics Under the Climate Change. *Bull Math Biol*, Vol. 77, No. 12, 2325–2353.