MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

IMPLEMENTASI RUNGE-KUTTA ORDE 2 DENGAN METODE HEUN UNTUK ANALISIS OSILATOR HARMONIK TEREDAM

Anastasya Putri Wibowo
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia
e-mail: annastasyaputrii17@gmail.com*

Elizabeth Hutasoit
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia
e-mail: elizabethhutasoit2005@gmail.com

Niquita Sepha Kanaya
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia
e-mail: niquita.kanaya17@gmail.com

Anggi Pasha Aritonang
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia
e-mail: anggipasha10@gmail.com

Yulita Molliq Rangkuti
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia
e-mail: yulitamolliq@unimed.ac.id

Abstrak

Osilator harmonik teredam merupakan sistem fisis yang banyak dijumpai dalam berbagai bidang ilmu, terutama dalam mekanika dan dinamika sistem. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis osilator harmonik teredam menggunakan metode Heun sebagai pendekatan numerik dari metode Runge-Kutta orde 2. Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai konstanta pegas, massa, dan koefisien redaman tertentu untuk memperoleh solusi numerik terhadap sistem osilasi yang dikaji. Hasil analisis menunjukkan bahwa metode Heun memberikan akurasi yang cukup baik pada tahap awal perhitungan, tetapi mengalami akumulasi kesalahan seiring bertambahnya waktu. Penyimpangan terjadi karena metode Heun menggunakan pendekatan linier dalam setiap langkahnya, sementara solusi eksak mengikuti pola eksponensial yang lebih kompleks. Untuk meningkatkan akurasi, diperlukan langkah waktu yang lebih kecil atau metode numerik yang lebih tinggi seperti Runge-Kutta orde 4. Secara keseluruhan, metode Heun tetap menjadi pilihan yang cukup baik untuk pendekatan numerik pada sistem osilasi teredam dalam rentang waktu yang terbatas.

Kata Kunci: Osilator harmonik teredam, metode Heun, Runge-Kutta orde 2.

Abstract

A damped harmonic oscillator is a physical system widely encountered in various scientific fields, particularly in mechanics and system dynamics. This study aims to analyze the damped harmonic oscillator using the Heun method as a numerical approach within the second-order Runge-Kutta method. Simulations were conducted using specific values of the spring constant, mass, and damping coefficient to obtain a numerical solution for the oscillatory system under study. The analysis results show that the Heun method provides relatively good accuracy in the initial phase of calculations but accumulates errors over time. This deviation occurs because the Heun method employs a linear approach at each step, whereas the exact solution follows a more complex exponential pattern. To improve accuracy, a smaller time step or a higher-order numerical method, such as the fourth-order Runge-Kutta, is required. Overall, the Heun method remains a reasonably good choice for numerical approximations of damped oscillatory systems within a limited time range.

Keywords: *Damped harmonic oscillator, Heun method, second-order Runge-Kutta.*

PENDAHULUAN

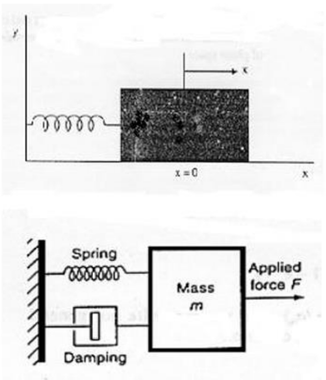
Getaran dari suatu sistem yang berosilasi pada suatu lintasan dapat berupa gerakan yang berulang secara terus menerus dan beraturan serta dapat berupa gerakan acak atau tidak teratur. Getaran yang berulang secara teratur dalam selang waktu yang sama disebut dengan gerak harmonis (Silahooy et al., 2022).

Dalam sistem mekanik, getaran dan osilasi merujuk pada gerakan bolak-balik suatu benda di sekitar posisi keseimbangan. Secara khusus, getaran adalah gerakan yang terjadi secara periodik atau acak dalam interval waktu tertentu, di mana benda bergerak maju-mundur dari posisi diamnya akibat gangguan eksternal atau internal (Huriawati et al., 2017).

Gerak osilasi merupakan salah satu ilmu fisika yang penting untuk dipahami, gerak osilasi yang biasanya dipelajari hanya berlaku pada sistem ideal, dimana sistem yang berosilasi terus menerus setelah diberikan gaya, yang merupakan gaya pemulih linier (Muspa & Pramudya, 2023).

Getaran merupakan gerakan osilasi dari suatusistem yang dapat berupa gerakan beraturan danberulang secara kontinu atau dapat juga berupagerakan tidak beraturan atau acak. Ketika sebuahgetaran atau osilasi terulang sendiri, ke depandan kebelakang, pada lintasan yang sama,gerakan tersebut disebut periodik (Selvira et al., 2020).

Osilasi sering digunakan secara bergantian dengan getaran, terutama dalam konteks gerakan periodik. Namun, osilasi biasanya merujuk pada gerakan yang lebih teratur dan periodik, seperti gerakan pendulum atau pegas yang berosilasi



Gambar 1. Pemodelan pegas osilasi

dengan frekuensi tertentu. Getaran yang berlebih akan menimbulkan suatu kegagalan fungsi pada konstruksi, sehingga diperlukan suatu pemodelan untuk mengetahui karakteristik getaran dari konstruksi tersebut. Getaran dapat diredam osilasinya dengan gaya redaman atau damping dan dalam waktu tertentu osilasi akan berhenti, sehingga tersebut disebut gerakan harmonik teredam (*damped harmonic*) (Fawzi & Ramdani, 2024). Osilator harmonik tak teredam adalah sistem ideal di mana tidak ada gaya redaman yang mempengaruhi gerakan, sehingga amplitudo osilasi tetap konstan sepanjang waktu. Contoh idealnya adalah massa yang tergantung pada pegas tanpa adanya gesekan atau hambatan udara (Noor & Fitrian, 2021).

Osilator harmonik teredam menggambarkan sistem di mana sebuah massa m terhubung ke pegas dengan konstanta pegas k dan mengalami gaya redaman proporsional terhadap kecepatannya dengan koefisien redaman c (Ghifari et al., 2023).

Apabila m merupakan notasi dari massa, b notasi dari gaya redam, dan k notasi dari konstanta pegas, maka persamaan umum diferensial pegas berosilasi teredam ditunjukkan pada persamaan (1)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (1)$$

Berdasarkan persamaan 1, gerak teredam dapat dibagi menjadi tiga kasus, karena b berada dalam selang interval nol sampai tak hingga, sehingga nilai $b^2 - 4$ km dapat bernilai positif, negatif, dan nol (Nurdin & Hastuti, 2019). Tiga kasus tersebut sebagai berikut:

a. $b^2 - 4$ km > 0 , sistem mengalami *overdamped*, atau redaman super kritis
b. $b^2 - 4$ km < 0 , sistem mengalami *underdamped*, atau redaman sub kritis
c. $b^2 - 4$ km $= 0$, sistem mengalami critical damped, atau redaman kritis

Persamaan eksak dalam kasus osilator harmonik pada umumnya menggunakan persamaan diferensial yang tidak mudah (Permata et al., 2021). Persamaan diferensial mempunyai banyak ragam dan jenis, mulai dari yang mudah diselesaikan hingga yang sulit diselesaikan, mulai dari yang sederhana sampai yang sangat kompleks. Maka diambil langkah menggunakan pendekatan numerik (Purba et al., 2024).

Kajian Teori

A. Metode Runge-Kutta Orde 2

Runge Kutta pertama kali dikembangkan oleh Carl Runge dan Wiliam Kutta dalam rangka meniru hasil dari pendekatan deret Taylor tanpa harus melakukan diferensial analitik secara berulang. Metode Runge Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih baik dan tidak memerlukan turunan dari fungsi. Metode Runge Kutta Orde empat sering digunakan karena memiliki ketelitian yang lebih tinggi (Acu et al., 2018). Metode Runge-Kutta orde 2 adalah teknik numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) yang menawarkan akurasi lebih tinggi dibandingkan metode Euler sederhana. Metode ini menggunakan pendekatan prediktor-korektor, di mana nilai awal digunakan untuk memprediksi nilai berikutnya, yang kemudian dikoreksi untuk meningkatkan akurasi (Pratama, 2020).

B. Metode Heun

Metode Heun, juga dikenal sebagai metode Euler yang diperbaiki atau metode trapesium eksplisit, adalah teknik numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB). Metode ini merupakan kasus khusus dari metode Runge-Kutta orde dua, yang menawarkan akurasi lebih tinggi dibandingkan metode Euler sederhana (Rahmatullah et al., 2020).

Dengan menggunakan pendekatan ini, metode Heun meningkatkan akurasi solusi numerik dibandingkan metode Euler sederhana, karena mempertimbangkan informasi kemiringan pada kedua ujung interval. Hal ini membuat metode Heun lebih efektif dalam melacak kurva solusi dengan deviasi yang lebih kecil (Rusmini et al., 2022).

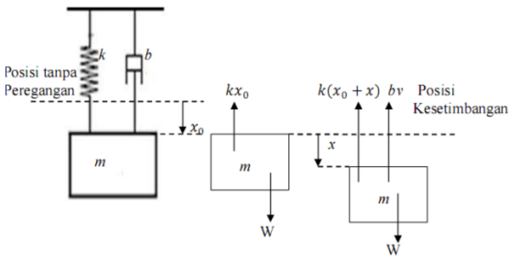
Beberapa penelitian sebelumnya telah membandingkan perhitungan analitik kasus osilator dengan pendekatan numerik. Penelitian yang dilakukan oleh (Hurit & Mungkasi, 2021) penelitian ini menunjukkan bahwa metode Heun memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Euler. Temuan ini menjadi salah satu dasar dalam penelitian ini, di mana metode Heun diterapkan dalam analisis osilator harmonik teredam, penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi efektivitas metode Heun dalam menyelesaikan persamaan diferensial yang menggambarkan sistem osilator harmonik teredam, yang merupakan salah satu fenomena penting dalam mekanika dan dinamika sistem fisis.

Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh (Novalia & Nasution, 2018). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode Heun merupakan metode numerik yang stabil dan konsisten dalam mendekati solusi sistem epidemiologi SEIR. Penelitian ini menjadi salah satu referensi penting bagi penelitian ini, yang juga menerapkan metode Heun, namun dalam konteks yang berbeda, yaitu analisis osilator harmonik teredam, penelitian ini mengeksplorasi efektivitas metode Heun dalam menyelesaikan persamaan diferensial osilator harmonik teredam, yang merupakan fenomena fundamental dalam mekanika dan fisika sistem dinamis.

Karakteristik gerakan osilator harmonik teredam perlu diperhatikan untuk mengurangi risiko ketidakseimbangan dalam sistem. Pemodelan osilator harmonik teredam dengan pendekatan pegas dapat digunakan untuk menganalisis dan mengendalikan getaran yang terjadi. Dalam penyelesaiannya, metode numerik menjadi alternatif dari solusi analitik dengan tingkat error tertentu. Penelitian ini berfokus pada implementasi metode Heun untuk menganalisis osilator harmonik teredam serta mengevaluasi akurasinya dibandingkan dengan pendekatan lainnya.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian dengan mengkaji studi literatur yg membahas tentang kasus gerakan osilator harmonik teredam yang ditunjukkan pada Gambar 1. Dimana sebuah pegas dengan konstanta kekakuan (k) 26,8 $\mathrm{N/m}$ dengan beban massa (m) 5 kg diberi sebuah simpangan, sehingga menyebabkan pegas akan berisolasi, selanjutnya nilai-nilai koefisien redaman (b) 0.9, serta simpangan (x) dan kecepatan (x') pada detik ke-o adalah 0.56 m dan 10 m/s (Nurdin & Hastuti, 2019).



Gambar 2. Sistem Pegas Massa Teredam dan Diagram Benda Bebas

Penelitian ini adalah modifikasi dari penelitian , yang diselesaikan berdasarkan metode numerik. Adapun metode yang akan digunakan pada penelitian ini yaitu dengan menggunakan *Runge Kutta Orde 2*, Metode *Heun*, dan Galat yang akan di implementasikan pada aplikasi *coding Anaconda Navigator*.

Runge Kutta Orde 2

Metode RK orde kedua menggunakan fungsi inkremen dengan dua suku (n = 2). Metode urutan kedua itu akan tepat jika solusi dari persamaan diferensial adalah kuadrat. Selain itu,karena istilah dengan h3 dan lebih besar dihilangkan selama pengurangan, kesalahan pemotongan lokal adalah O (h3) dan global kesalahan pemotongan adalah O (h2). Versi persamaan orde kedua (F.Mesa, 2020).

$$y_{i+1} = y_i(a_i k_i + a_2 k_2)h \quad (1)$$

Dimana

$$k_1 = f(x_i y_i)y$$
$$k_2 = f(x_i + p_i h, yi + q_{11}k_1)h \quad (2)$$

Strategi dasar dari metode Runge-Kutta adalah penggunaan manipulasi aljabar untuk mendapatkan nilai a_1, a_2, p_1dan p_{11}, jadi kita harus memiliki deret Taylor orde 2:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i y_i)h + f' \frac{x_{i-1}y_{i-1}}{2!} h^2 \quad (3)$$
$$f'(x_{i-1}y_{i-1}) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} \quad (4)$$

Subtitusikan (4) kedalam (3) :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i y_i)h + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!} \quad (5)$$

Kemudian diamati bahwa deret Taylor untuk fungsi dua variabel, khususnya deret Taylor orde 2 untuk k_2 di (2) adalah:

$$k_2 = f(x_i + p_i h, yi + q_{11}k_1 h) =$$
$$f(x_i y_i) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} \quad (6)$$

Dengan mengganti nilai k_2, diperoleh di (6), dan k_1, di (2),dalam (1) kita memiliki:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 f(x_i y_i)h + a_2 f(x_i y_i)h + \left(a_2 p_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h^2 + a_2 p_1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}h^2\right) \quad (7)$$

Akhirnya, melalui perbandingan antara (5) dan (7) tersebut hubungan berikut dapat diperoleh untuk konstanta a_1, a_2, p_1dan p_{11}

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_1 = \frac{1}{2} \quad (8)$$

Di bawah kelas metode eksplisit ini, kami akan mempertimbangkan metode Heun, metode Euler yang Dimodifikasi, aturan Titik Tengah, dan metode Raltson. Semua metode ini memiliki metode turunan yang sama dengan pengecualian konstanta yang terlibat mengambil nilai yang berbeda. Ini memiliki bentuk umum (Eziokwu et al, 2020).

Metode Heun

persamaan dari Metode Heun adalah sebagai berikut (F,M & G., 2020).

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Galat

Ada empat metode yang dapat digunakan dalam menentukan galat persamaan diferensial biasa, yaitu metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, metode Heun, dan metode Euler. Berdasarkan soal yang diselesaikan dalam menentukan galat persamaan diferensial menggunakan metode Deret Taylor, metode Runge-Kutta, metode Heun dan metode Euler, metode yang menghasilkan galat paling kecil adalah metode Runge-Kutta. Galat atau error atau dalam keseharian disebut kesalahan. Galat atau error dapat juga didefinisikan sebagai selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi dengan observasi atau kenyataan yang terjadi di lapangan.

Galat dapat berfungsi untuk menunjukkan efisiensi dari satu jenis percobaan atau penelitian ke penelitian yang lain. Secara normal, kita menginginkan galat yang bernilai kecil bahkan tidak terjadi galat. Namun ketiadaan galat juga dapat menyebabkan pertanyaan dalam penelitian kita. Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Misalkan a adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a, maka selisih $\varepsilon = a - a$ - adisebut galat (Pandia & Sitepu, 2021).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan dibahas hasil perhitungan numerik yang diperoleh menggunakan metode Heun dan dibandingkan dengan solusi eksak untuk mengevaluasi tingkat akurasi dari metode tersebut. Penelitian ini berfokus pada analisis sistem pegas-massa dengan redaman, di mana tujuan utamanya adalah untuk memodelkan dan memahami perilaku dinamis sistem yang mengalami gaya redaman.

Dalam konteks ini, metode Heun dipilih sebagai salah satu metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial yang menggambarkan sistem pegas-massa dengan redaman. Hasil perhitungan numerik yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi eksak yang didapatkan dari persamaan diferensial yang mengatur gerakan sistem pegas-massa dengan redaman. Dengan membandingkan kedua solusi tersebut, kita dapat mengevaluasi kesalahan yang mungkin timbul akibat pendekatan numerik yang digunakan oleh metode Heun. Selain itu, analisis ini juga akan mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi akurasi metode Heun, seperti besar langkah waktu yang digunakan dan karakteristik sistem pegas-massa itu sendiri.

Pada gambar 3&4 akan ditampilkan syntax perhitungan numerik dari metode heun dan penentuan Galat eror nya :

```
# Parameter sistem pegas massa teredam
m = 1.5     # Massa (kg)
k = 26.8    # Konstanta pegas (N/m)
b = 0.9     # Koefisien redaman

# Definisi sistem persamaan diferensial
def f(t, y):
    dxdt = y[1]  # Kecepatan
    dvdt = -(b/m) * y[1] - (k/m) * y[0]  # Percepatan dari hukum Newton
    return np.array([dxdt, dvdt])

# Metode Heun (Prediktor-Korektor)
def heun_method(f, y0, t0, tf, h):
    t_values = np.arange(t0, tf + h, h)
    y_values = [y0]
    y = np.array(y0)

    for t in t_values[:-1]:
        k1 = f(t, y)
        y_pred = y + h * k1
        k2 = f(t + h, y_pred)

        y += (h/2) * (k1 + k2)
        y_values.append(y.copy())

    return t_values, np.array(y_values)

# Solusi eksak (tanpa redaman berat)
def exact_solution(t):
    omega_d = np.sqrt(k/m - (b/(2*m))**2)
    A = x0
    B = (v0 + (b/(2*m)) * x0) / omega_d
    return np.exp(-b*t/(2*m)) * (A * np.cos(omega_d * t) + B * np.sin(omega_d * t))
```

Gambar 3. Syntax yang digunakan

```
# Parameter awal
x0 = 0.56   # Simpangan awal (m)
v0 = 10.0   # Kecepatan awal (m/s)
y0 = [x0, v0]
t0 = 0      # Waktu awal (s)
tf = 20     # Waktu akhir (s)
h  = 0.1    # Langkah waktu kecil untuk akurasi

# Menjalankan metode Heun
t_values, y_values = heun_method(f, y0, t0, tf, h)

# Menghitung solusi eksak
exact_values = np.array([exact_solution(t) for t in t_values])

# Menghitung galat (Error Heun)
error_heun = ((exact_values - y_values[:, 0]) / exact_values) * 100

# Filter hanya nilai setiap detik (0, 1, 2, ..., 20)
filtered_indices = [i for i in range(len(t_values)) if np.isclose(t_values[i] % 1, 0)]
filtered_t = t_values[filtered_indices]
filtered_x_heun = y_values[filtered_indices, 0]
filtered_exact = exact_values[filtered_indices]
filtered_error = error_heun[filtered_indices]
```

Gambar 4. Syntax yang digunakan

Kode ini mensimulasikan sistem pegas-massa-teredam menggunakan **Metode Heun** dan membandingkannya dengan solusi eksak. Sistem ini didasarkan pada persamaan diferensial Newton, yang direpresentasikan dalam bentuk turunan kecepatan dan percepatan.

Metode Heun diterapkan dengan prediksi menggunakan metode Euler, lalu dikoreksi dengan evaluasi ulang, sehingga menghasilkan solusi yang lebih akurat. Solusi eksak dihitung menggunakan formula osilasi teredam ringan.

Hasil perhitungan dibandingkan dalam tabel dan grafik. Grafik pertama menunjukkan perbedaan antara metode Heun dan solusi eksak, sementara grafik kedua menunjukkan galat metode Heun terhadap waktu. Hasil menunjukkan bahwa metode Heun cukup akurat dengan tingkat kesalahan yang kecil, membuatnya lebih baik dibandingkan metode Euler biasa.

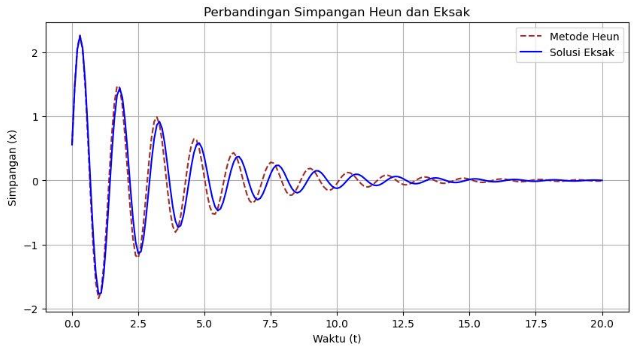
Tabel berikut menyajikan data hasil perhitungan simpangan menggunakan metode Heun, nilai solusi eksak, serta tingkat kesalahan yang terjadi pada setiap titik waktu tertentu.

Tabel 1. Hasil Perhitungan dan Eror

t (detik)	Simpangan Heun (x)	Eksak	Eror Heun (%)
0.0	0.560000	0.560000	0.00000
1.0	-1.841780	-1.768646	-4.135050
2.0	0.681339	0.940134	27.527384
3.0	0.670668	0.307555	-118.064519
4.0	-0.747821	-0.732882	-2.038313
5.0	0.026413	0.348129	92.412756
6.0	0.407830	0.156670	-160.311176
7.0	-0.235778	-0.301561	21.813970
8.0	-0.102524	0.126716	180.909077
9.0	0.188618	0.076125	-147.775241
10.0	-0.044276	-0.123235	64.072006
11.0	-0.082494	0.045143	282.739439
12.0	0.069669	0.035793	-94.646592
13.0	0.008836	0.050020	117.664515
14.0	-0.44113	0.015637	382.102591
15.0	0.018902	0.016423	-15.099902
16.0	0.014664	-0.020165	172.720327
17.0	-0.018612	0.005210	457.231595
18.0	0.001802	0.007392	75.624299
19.0	0.009530	-0.008073	218.049215
20.0	-0.006178	0.001637	477.354123

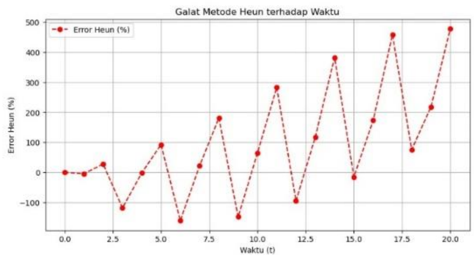
Pada analisis sistem pegas-massa dengan redaman menggunakan metode Heun, dilakukan perbandingan antara solusi numerik dengan solusi eksak untuk melihat seberapa akurat pendekatan yang dihasilkan oleh metode numerik tersebut. Data yang diperoleh menunjukkan hasil perhitungan simpangan dari metode Heun, solusi eksak, serta tingkat kesalahan (error) antara keduanya.

Pada awal perhitungan, nilai simpangan awal yang digunakan adalah 0.56 meter dengan kecepatan awal 10 m/s. Dari hasil perhitungan, terlihat bahwa pada t = 0 detik, nilai metode Heun dan solusi eksak memiliki nilai yang sama, yaitu 0.56 meter. Namun, seiring bertambahnya waktu, perbedaan antara metode Heun dan solusi eksak mulai terlihat. Pada beberapa titik waktu tertentu, metode Heun menunjukkan penyimpangan yang cukup besar dibandingkan dengan solusi eksak. Contohnya, pada t = 6 detik, simpangan metode Heun adalah 0.40783, sedangkan solusi eksak memberikan nilai sebesar 0.15667, yang menghasilkan galat sekitar -160.31%. Hal ini menunjukkan bahwa metode Heun mengalami akumulasi kesalahan numerik yang menyebabkan hasilnya semakin berbeda dengan solusi eksak.



Gambar 5. Perbandingan simpangan Heun dan Eksak

Jika dilihat dalam bentuk gambar grafik 1 perbandingan antara metode Heun dan solusi eksak, terlihat bahwa kurva metode Heun (digambarkan dengan garis putus-putus berwarna coklat) memiliki pola yang mengikuti kurva solusi eksak (garis solid berwarna biru), namun dengan sedikit penyimpangan pada beberapa titik. Pada awalnya, metode Heun masih dapat mengikuti bentuk dari solusi eksak dengan cukup baik, tetapi seiring bertambahnya waktu, perbedaan antara kedua kurva semakin besar. Hal ini menunjukkan bahwa metode Heun memiliki keterbatasan dalam mempertahankan akurasi untuk sistem yang mengalami perubahan signifikan dalam dinamika pergerakannya.



Gambar 6. Galat Metode Heun terhadap waktu

Ketika kita melihat grafik galat metode Heun yang ada pada gambar grafik 2 terhadap waktu, terlihat bahwa kesalahan relatif metode ini tidak bersifat konstan, melainkan naik turun dengan pola tertentu. Pada beberapa titik waktu, kesalahan metode Heun bahkan mencapai nilai yang sangat besar. Misalnya, pada t = 14 detik, kesalahan mencapai 382.10%, dan pada t = 20 detik, kesalahan mencapai angka 477.35%. Kesalahan yang besar ini menunjukkan bahwa metode Heun mungkin kurang akurat untuk sistem dengan osilasi teredam, terutama dalam jangka waktu yang lebih panjang.

PENUTUP

SIMPULAN

Dari analisis ini dapat disimpulkan bahwa metode Heun memberikan hasil yang cukup baik dalam rentang waktu awal, tetapi ketidak akuratan semakin meningkat seiring waktu. Penyimpangan ini terjadi dikarena metode Heun merupakan metode numerik dengan pendekatan linier pada setiap langkahnya, sedangkan solusi eksak mengikuti pola eksponensial yang lebih kompleks. Akibatnya, akumulasi kesalahan terjadi dan mengakibatkan hasil yang kurang akurat dalam jangka waktu yang lebih lama. Untuk meningkatkan akurasi, salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memperkecil langkah waktu (h), sehingga metode Heun dapat lebih mendekati solusi eksak. Selain itu, metode numerik yang lebih kompleks, seperti metode Runge-Kutta orde lebih tinggi, juga dapat digunakan untuk mengurangi tingkat kesalahan yang terjadi.

Secara keseluruhan, metode Heun tetap merupakan salah satu metode numerik yang cukup baik dalam pendekatan solusi sistem osilasi teredam, terutama untuk waktu yang tidak terlalu panjang. Namun, untuk kebutuhan analisis dengan tingkat akurasi yang lebih tinggi, perlu dipertimbangkan metode lain yang lebih presisi atau melakukan penyempurnaan pada langkah-langkah perhitungan yang digunakan.

SARAN

Penelitian ini menggunakan metode Heun dalam analisis osilator harmonik teredam, sehingga pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan pendekatan dengan metode numerik lainnya, seperti Runge-Kutta orde lebih tinggi, serta mempertimbangkan faktor-faktor eksternal seperti gangguan non-linier dan efek eksternal lainnya pada sistem osilasi.

DAFTAR PUSTAKA

Acu, Y., Lapanporo, B. P., & Kushadiwijayanto, A. A. (2018). Model Sederhana Gerak Osilator dengan Massa Berubah Terhadap Waktu Menggunakan Metode Runge Kutta. *Positron*, *7*(2), 42. https://doi.org/10.26418/positron.v7i2.23276

Eziokwu, C. E. (2020). On review of the convergence Analyses of the Runge Kutta Fixed Point Iterative Methods. *Asian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 20-44.

Fawzi, G. N., & Ramdani, Y. (2024). Analisis Model Getaran Pegas Teredam Kendaraan Bermotor dengan Metode Runge-Kutta Gill dan Milne. *Jurnal Riset Matematika*, *4*(1), 17–28.

F.Mesa, D. D. (2020). Numerical Comparison by Different Methods (Second Order Runge Kutta Methods, Heun Method, Fixed Point Method and Ralston Method) to Differential Equations with Initial Condition. *Scientia et Technica Año XXV*, 25(02),299-305.

Ghifari, M. R., Agung Pramono, R., & Nur Aziz, K. (2023). Aplikasi Gaya Magnet Pada Fenomena Osilasi Teredam Dalam Sistem Gerak Harmonik Sederhana. *Jurnal Penelitian Fisika Dan Terapannya (JUPITER)*, *5*(1), 16–22. https://doi.org/10.31851/jupiter.v5i1.11839

Huriawati, F., Yusro, A. C., & Fisika, P. (2017). PENGEMBANGAN ODD "OSILATOR DIGITAL DETECTOR" SEBAGAI ALAT PERAGAPRAKTIKUM GERAK HARMONIK SEDERHANA. *Jurnal Inovasi Dan Pembelajaran Fisika*, *4*(2), 1–9. https://ejournal.unsri.ac.id/index.php/jipf/article/view/4257

Hurit, R. U., & Mungkasi, S. (2021). The Euler, Heun, and Fourth Order Runge-Kutta Solutions to SEIR Model for the Spread of Meningitis Disease. *Mathline : Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *6*(2), 140–153. https://doi.org/10.31943/mathline.v6i2.176

Muspa, R. M., & Pramudya, Y. (2023). Studi Numerik Gerak Osilasi Teredam Balok Pada Bidang Miring. *JRST (Jurnal Riset Sains Dan Teknologi)*, *7*(1), 59. https://doi.org/10.30595/jrst.v7i1.15315

Noor, I., & Fitrian, A. (2021). Simulasi Sederhana Gelombang Pegas. *Prosiding Seminar Nasional Sains*, *67*(1), 67–72.

Novalia, E., & Nasution, H. (2018). Testing the Stability and Consistency of the Heun Method in the Susceptible, Exposed, Infected and Recovered Epidemic Model for Dengue Fever. *Jurnal Sains Indonesia*, *42*(2), 52–58.

Nurdin, A., & Hastuti, S. (2019). Analisa Gerakan Osilator Harmonik Teredam Menggunakan Metode Numerik. *Journal of Mechanical Engineering*, *3*(2). https://doi.org/10.31002/jom.v3i2.3366

Permata, H. W., Kusumastuti, A., & Juhari, J. (2021). Solusi Numerik Model Gerak Osilasi Vertikal dan Torsional Pada Jembatan Gantung. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, *1*(1), 1–13. https://doi.org/10.18860/jrmm.v1i1.13409

Pratama, D. (2020). MODELING LARGE-ANGLE PENDULUM OSCILLATIONS WITH QUADRATIC DAMPING AND DAMPING ON THE STRING. *Jurnal Pendidikan Fisika*, *10*(2), 0–5.

Purba, F., Sihotang, H. M. W., Sukma, M., Tarigan, N. C. W., Sihombing, T. V., & Elfitra, E. (2024). ANALISIS PENYELESAIAN SOAL PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA: METODE DERET TAYLOR, RUNGE-KUTTA, HEUN, DAN EULER. *Jurnal Multidisiplin Inovatif*, *8*(6), 153–161.

Rahmatullah, S., Arman, Y., & Apriansyah, A. (2020). Simulasi Gerak Osilasi Model Pegas Bergandeng Menggunakan Metode Runge-Kutta. *Prisma Fisika*, *8*(3), 180. https://doi.org/10.26418/pf.v8i3.43681

Rusmini, E., Fauziah, F. A., Arianto, N. F., Izzah, D. H., Jayanti, S. D., Hasanah, R., & Sunarmi, N. (2022). Visualisasi osilator harmonik kuantum dengan polinomial hermitte menggunakan simulasi pemrograman matlab. *Jurnal MIPA Dan Pembelajarannya*, *2*(3), 183–189.

Selvira, C. A., Subaedi, A. N., Azzahra, N. A., Novitasari, O., & Antarnusa, G. (2020). Meningkat Keakuratan Simulasi Osilasi Harmonik Teredam pada Pegas Menggunakan Tracker Video Analysis and Modelling Tool. *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Fisika*, *3*(1), 336. https://jurnal.untirta.ac.id/index.php/sendikfi/index

Silahooy, S., Nhholoan, D., & Fitrianingrum, A. M. (2022). Analisis Pengaruh Massa Beban Terhadap Koefisien Redaman Menggunakan Software Python. *Jurnal Pendidikan Fisika Dan Sains (JPFS)*, *5*(1), 2022–2045.

Pandia, W., & Sitepu, I. (2021).Penentuan Galat Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 Dengan Metode Numerik.*Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia*,6(1),31-37.