

STRUKTUR GRAF DENGAN BARISAN DERAJAT $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ DAN $\{m^n, n^m\}$

Astri Widyawati Sulisty Cahyani

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : astriwidyawati.21035@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Graf G terdiri atas himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Salah satu aspek penting dalam graf adalah barisan derajat, yaitu representasi derajat titik yang memberikan informasi ringkas tentang karakteristik graf. Penelitian ini mengkaji graf dengan barisan derajat $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ yang memiliki m titik masing-masing berderajat $m-1$ dan n titik masing-masing berderajat $n-1$. Graf ini ekuivalen-derajat dengan graf lengkap $K_m \cup K_n$, tetapi tidak isomorfik dengannya, dilambangkan $G_{m,n}$. Sementara itu, komplemen dari graf ini, yaitu graf $\bar{G}_{m,n}$ memiliki barisan derajat $\{m^n, n^m\}$, yang ekuivalen-derajat dengan graf bipartit $K_{m,n}$ tetapi tidak isomorfik dengannya. Dalam artikel ini, membuktikan karakteristik dari graf tersebut, yaitu keterhubungan, keberadaan titik-pemutus dan sisi-pemutus, serta sifat Hamiltonian, dengan $\text{diam}(G) \leq 4$ dan bersifat *pancyclic*.

Kata Kunci: Ekuivalen-derajat, Barisan derajat, Hamiltonian, Pancyclic

Abstract

A graph G consists of a set of vertices $V(G)$ and a set of edges $E(G)$. One of the essential aspects of a graph is the degree sequence, which represents the degrees of vertices and provides a concise summary of the graph's characteristics. This study examines graphs with the degree sequence $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ where m vertices each have a degree of $m-1$ and n vertices each have a degree of $n-1$. This graph is degree-equivalent to the complete graph $K_m \cup K_n$ but not isomorphic to it, denoted as $G_{m,n}$. Meanwhile, the complement of this graph, denoted as $\bar{G}_{m,n}$, has the degree sequence $\{m^n, n^m\}$, which is degree-equivalent to the bipartite graph $K_{m,n}$ but is not isomorphic to it. In this paper, we prove the characteristics of these graphs, including connectivity, the existence of cut vertices and cut edges, as well as Hamiltonian properties, with $\text{diam}(G) \leq 4$ and *pancyclic* properties.

Keywords: Degree-equivalent, Degree sequence, Hamiltonian, Pancyclic

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang matematika yang sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun silam. Jurnal pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal di Swiss bernama Euler. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf kurang signifikan, karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (puzzle), namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang seperti: Ilmu Komputer, Teknik, Sains, Bisnis, dan Ilmu Sosial (Budayasa, 2007).

Graf G terdiri dari himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Salah satu konsep penting dalam graf adalah derajat titik, yaitu banyaknya sisi G yang terkait dengan titik tersebut. Barisan derajat adalah representasi dari kumpulan nilai derajat setiap titik dalam graf sederhana, yang disusun dalam bentuk barisan secara berurutan dari nilai terbesar hingga terkecil. Barisan ini memberikan informasi tentang struktur graf secara ringkas (Barrus, 2016).

Graf dengan barisan derajat $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ dan $\{m^n, n^m\}$ merupakan salah satu graf yang menarik untuk dipelajari. Pada graf dengan pola ini, dimana terdapat m titik dengan masing-masing berderajat $m-1$ dan n titik dengan masing-masing

berderajat $n - 1$, serta terdapat m titik dengan masing-masing berderajat n dan n titik dengan masing-masing berderajat m (Brimkov & Brimkov, 2024). Graf ini tidak hanya menarik dari sisi teoritis, tetapi juga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti dalam analisis komputer, sistem transportasi, dan model interaksi sosial. Misalnya dalam analisis computer, model graf ini dapat menggambarkan hubungan antar perangkat dalam suatu jaringan, di mana konektivitas tetap dapat dipertahankan meskipun terjadi kegagalan pada salah satu perangkat.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji karakteristik graf dengan pola barisan derajat tersebut, khususnya dalam aspek keterhubungan, titik-pemutus dan sisi-pemutus, serta sifat Hamiltonian, dan bersifat *pancyclic* dengan diameter. Dengan memahami sifat-sifat tersebut, diharapkan penelitian ini dapat memberikan pemahaman lebih mendalam dan sebagai referensi bacaan yang bermanfaat.

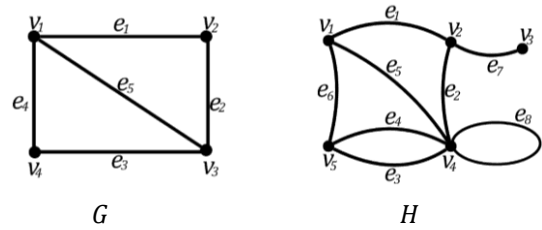
KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi G . Misalkan u dan v dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) sebuah sisi G . Kita katakan titik u dan titik v berhubungan langsung (adjacent) di G ; sisi e menghubungkan (joining) titik u dan titik v di G ; u dan v titik-titik akhir sisi e ; sisi e terkait (incident) dengan titik u dan titik v . Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) dengan setiap titik digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis). Sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (loop). Graf yang memiliki lebih dari satu sisi yang menghubungkan antara titik u dan v , sisi-sisinya disebut sisi-rangkap (multiple-edges). Graf yang

tidak memiliki gelung dan tidak memiliki sisi-rangkap disebut graf sederhana (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1:

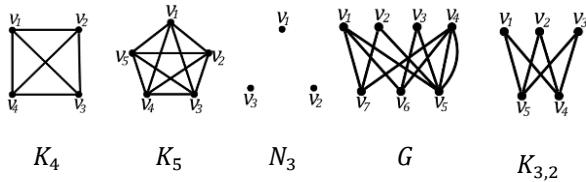


Gambar 2.1 Graf sederhana G dan graf tak sederhana H

Gambar 2.1 Graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx, e_4 = ux, e_5 = uw$. Sebaliknya, graf H dengan $V(H) = \{p, q, r, s, t\}$ dan $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dimana $e_1 = pq, e_2 = qr, e_3 = rs, e_4 = rs, e_5 = pr, e_6 = ps, e_7 = qt, e_8 = rr$. Graf G adalah graf sederhana, sedangkan graf H bukan graf sederhana.

Definisi 2.2:

Graf lengkap (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi. Graf yang tidak memiliki sisi disebut graf kosong atau graf nol. Graf nol dengan n titik dilambangkan dengan N_n . Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi G menghubungkan sebuah titik di A dengan sebuah titik di B . Kita sebut (A, B) bipartit dari G . Selanjutnya apabila G sederhana dan bipartit dengan bipartit (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B , maka G disebut graf bipartit lengkap, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.2:


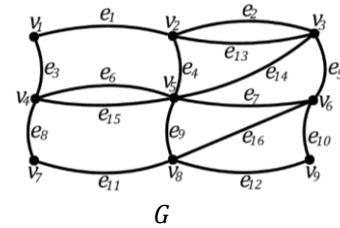
Gambar 2.2 Graf lengkap, graf kosong, dan graf bipartit

Gambar 2.2 K_4 graf lengkap dengan 4 titik, K_5 graf lengkap dengan 5 titik, N_3 graf kosong dengan 3 titik, G graf bipartit, dan $K_{3,2}$ graf bipartit lengkap.

Definisi 2.3:

Misalkan G graf. Jalan (walk) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga $vi-1$ dan vi adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah jalan dari titik v_0 ke titik v_1 , atau jalan- (v_0, v_k) . Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Adapun titik- titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W ; dan k disebut panjang jalan W . Perhatikan bahwa panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Sebuah titik G , mungkin saja muncul lebih dari satu kali dalam jalan W , begitu juga dengan sebuah sisi G , boleh muncul lebih dari satu kali pada jalan W . jika semua sisi $e_1, e_2, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (trail). Jika semua titik $v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (path). Sebuah jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tutup disebut sirkuit. Sebuah sirkuit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkuit Euler. Sebuah graf yang memuat sirkuit Euler disebut graf Euler. Sebuah siklus (cycle) adalah sebuah jejak tertutup (closed trail) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam sebuah siklus disebut panjang dari siklus tersebut. Siklus dengan panjang k disebut siklus- k , dilambangkan dengan C_k . Sebuah siklus yang memuat semua titik sebuah graf disebut Siklus Hamilton. Lintasan Hamilton adalah lintasan yang memuat semua titik di G . Jika graf G memuat siklus Hamilton, maka G memuat lintasan Hamilton. Akan tetapi, sebaliknya tidak berlaku, artinya jika graf G memuat lintasan Hamilton maka G belum

tentu memuat siklus Hamilton. Graf yang memuat siklus Hamilton disebut graf Hamilton (Budayasa, 2007).

Contoh 2.3:


Gambar 2.3 Graf G

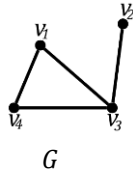
Perhatikan graf G pada Gambar 2.3:

- 1) Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_6, e_5, v_3)$ adalah sebuah jalan- (v_1, v_3) di graf G yang panjangnya 4. Karena dalam barisan ini sisi e_5 muncul lebih dari sekali, jelas barisan ini bukan jejak.
- 2) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_6, v_5, e_9, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4)$ adalah sebuah jejak buka di G dengan panjang 5. Karena titik v_4 muncul lebih dari sekali, maka jejak tersebut bukan lintasan.
- 3) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_8, v_7, e_{11}, v_8, e_9, v_5)$ adalah sebuah lintasan di graf G dengan panjang 4. Lintasan $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{14}, v_5, e_7, v_6, e_{10}, v_9, e_{12}, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4)$ memuat semua titik G , jadi lintasan tersebut merupakan lintasan Hamilton.
- 4) Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_4, v_5, e_9, v_8, e_{12}, v_9, e_{10}, v_6, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah jejak tutup (sirkuit) di G dengan panjang 8. Jejak tutup ini bukan siklus karena titik internal v_5 muncul lebih dari satu kali. Sirkuit $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{13}, v_2, e_4, v_5, e_{14}, v_3, e_5, v_6, e_7, v_5, e_9, v_8, e_{16}, v_6, e_{10}, v_9, e_{12}, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4, e_6, v_5, e_{15}, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah sirkuit Euler di G . Jadi G graf Euler.
- 5) Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_6, v_5, e_4, v_2, e_1, v_1)$ adalah sebuah siklus di G dengan panjang 4. Siklus $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{14}, v_5, e_7, v_6, e_{10}, v_9, e_{12}, v_8, e_{11}, v_7, e_8, v_4, e_3, v_1)$ memuat semua titik G , jadi siklus tersebut merupakan siklus Hamilton. Dengan demikian graf G merupakan graf Hamilton.

Definisi 2.4:

Misalkan G graf dan $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan titik v di G , dilambangkan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v . Diameter graf G , dilambangkan dengan $diam(G)$, didefinisikan seperti berikut (Bondy & Murty, 1976):

$$diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$$

Contoh 2.4:

Gambar 2.4 Graf dengan diameter 2

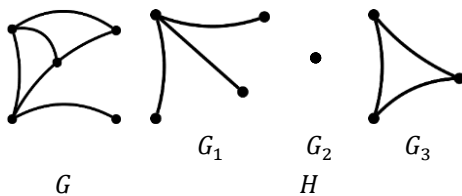
Gambar 2.4 karena $d(v_1, v_2) = 2, d(v_1, v_3) = 1$
 $d(v_1, v_4) = 1, d(v_2, v_3) = 1, d(v_2, v_4) = 2, d(v_3, v_4) = 1$
 maka $diam(G) = \max\{2, 1, 1, 1, 2, 1\} = 2$.

Jelas bahwa untuk graf komplet K_n dengan $n \geq 2$ diperoleh $diam(K_n) = 1$. Begitu juga untuk graf bipartit komplet $K_{m,n}$ diperoleh:

$$diam(K_{m,n}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } m = n = 1 \\ 2, & \text{untuk } m \geq 2 \text{ atau } n \geq 2 \end{cases}$$

Definisi 2.5:

Graf G dikatakan terhubung (connected) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan dalam G yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika kondisi ini tidak terpenuhi, graf G dikatakan takterhubung (disconnected). Sebuah komponen graf G adalah sebuah graf bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G . Graf H dikatakan graf bagian terhubung maksimal dari graf G , jika tidak ada graf bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H . Jadi setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen sedangkan graf tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen (Budayasa, 2007).

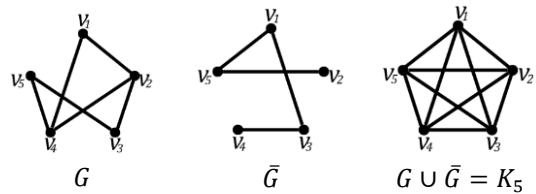
Contoh 2.5:

Gambar 2.5 graf G terhubung dan graf H tak terhubung

Gambar 2.5 graf G adalah graf terhubung. Sementara graf H adalah graf tidak terhubung dengan 3 komponen, yaitu G_1, G_2 , dan G_3 .

Definisi 2.6:

Misalkan G graf sederhana. Komplemen G , dilambangkan dengan $\bar{G}$, adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G

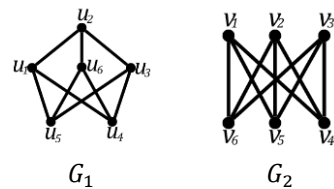
dan dua titik u dan v di $\bar{G}$ berhubungan langsung jika dan hanya jika di G titik u dan v tidak berhubungan langsung. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$ dua graf, maka gabungan G dengan H , dinotasikan $G \cup H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup E(H)$. Dengan demikian, jika G graf sederhana dengan n titik, maka $G \cup \bar{G} = K_n$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.6:

Gambar 2.6 Graf G dan komplemennya

Gambar 2.6 graf G , komplemen G ($\bar{G}$), dan $G \cup \bar{G}$ adalah graf komplet K_5 .

Definisi 2.7:

Dua graf G dan H dikatakan isomorfik, ditulis $G \cong H$ jika: (i) terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$; (ii) banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G , sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u dan titik v (Budayasa, 2007).

Contoh 2.7:

Gambar 2.7 Graf isomorfik

Gambar 2.7, graf G_1 isomorfik dengan graf G_2 , karena $V(G_1)$ dan $V(G_2)$ berkorespondensi satu-satu yaitu:

$V(G_1)$		$V(G_2)$
u_1	$\leftrightarrow$	v_1
u_6	$\leftrightarrow$	v_2
u_3	$\leftrightarrow$	v_3
u_4	$\leftrightarrow$	v_4
u_2	$\leftrightarrow$	v_5
u_5	$\leftrightarrow$	v_6

Definisi 2.8:

Misalkan G graf dan v titik G . Derajat titik v , dilambangkan $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelang dihitung dua kali).

Derajat minimum G dilambangkan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai:

$$\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$$

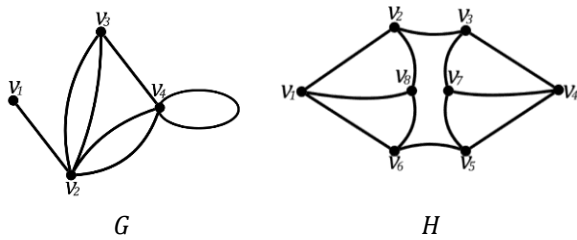
Derajat maksimum G dilambangkan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$$

Graf G disebut graf beraturan- k jika setiap titik dalam G memiliki derajat k (Budayasa, 2007).

Perhatikan bahwa $d(v) < V(G)$ di graf G .

Contoh 2.8:



Gambar 2.8 Graf G dan graf H

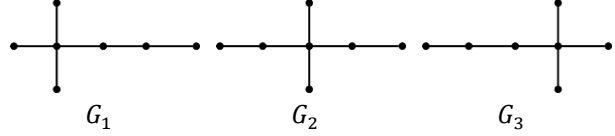
Perhatikan Gambar 2.8, derajat titik-titik pada graf G adalah sebagai berikut $d(v_1) = 1, d(v_2) = 5, d(v_3) = 3, d(v_4) = 5$, sehingga $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 5$. Pada graf H setiap titiknya berderajat 3 disebut graf beraturan-3, $\delta(H) = \Delta(H) = 3$. Selain itu, graf komplet dengan n titik merupakan graf beraturan- $(n-1)$. Sikel dengan n titik, C_n adalah graf beraturan-2.

Definisi 2.9:

Misalkan G graf. Barisan derajat G adalah barisan bilangan bulat taknegatif dari derajat titik-titik G . Barisan derajat tersebut dimulai dari derajat terbesar ke derajat terkecil (monoton turun). Graf G_1 dan graf G_2 dikatakan ekuivalen-derajat jika G_1 dan G_2 memiliki barisan derajat yang sama (Brimkov & Brimkov, 2024).

Contoh 2.9:

Perhatikan graf-graf G_1, G_2 dan G_3 pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Graf ekuivalen-derajat dan isomorfik

Barisan derajat $G_i, \forall i, 1 \leq i \leq 3$ adalah $(4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ atau disingkat $(4^1, 2^2, 1^4)$. Jadi G_1, G_2 dan G_3 adalah graf-graf ekuivalen-derajat. Perhatikan bahwa graf G_1 dan graf G_2 adalah graf-graf yang tidak isomorfik. Sedangkan G_1 isomorfik G_3 .

Catatan :

Jika G_1 isomorfik G_2 , maka G_1 dan G_2 ekuivalen-derajat. Akan tetapi, jika kedua graf ekuivalen-derajat, maka belum tentu kedua graf isomorfik.

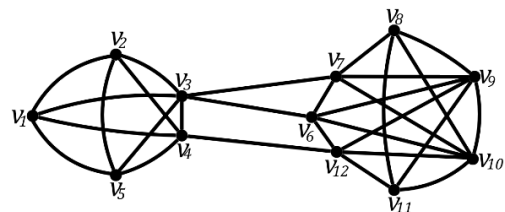
Definisi 2.10:

Misalkan G graf terhubung dan $V_1 \subset V(G)$. Himpunan V_1 disebut himpunan-titik-pemutus G , jika $G - V_1$ menghasilkan graf tak terhubung atau graf trivial (graf dengan hanya satu titik). Minimum $|V_1|$ sedemikian hingga V_1 merupakan himpunan-titik-pemutus G yang disebut konektivitas-titik G , dilambangkan dengan $\kappa(G)$.

Dengan kata lain, konektivitas-titik graf G atau $\kappa(G)$ merupakan minimum banyaknya titik G yang harus dihapus agar graf yang baru tak terhubung atau graf trivial. Graf G terhubung-titik- k adalah graf yang menjadi tak terhubung jika k titik dihapus.

Jelas bahwa jika graf G tak terhubung maka $\kappa(G) = 0$. Begitu juga, jika G graf komplet dengan n titik, maka $\kappa(G) = n - 1$. Jelas bahwa graf G terhubung-titik- k jika dan hanya jika $\kappa(G) \geq k$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.10 :



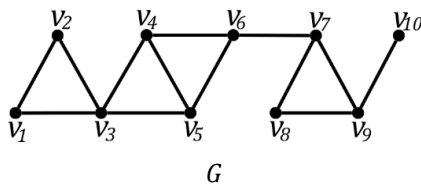
Gambar 2.10 Graf G terhubung-2

Graf G pada Gambar 2.10 terhubung-titik-2 dengan $\kappa(G) = 2$. Himpunan titik-pemutus minimum di graf G adalah $V' = \{v_3, v_4\}$.

Definisi 2.11:

Titik-pemutus dari graf G adalah titik yang jika dihapus akan membentuk graf baru yang jumlah komponen graf tersebut lebih banyak dari graf G . Sisi-pemutus (bridge) dari G adalah sisi yang jika dihilangkan maka menambah jumlah komponen dari graf G . Blok dari suatu graf G adalah graf bagian maksimal dari G yang tidak memiliki titik-pemutus. Jika G tidak dapat dipisahkan, maka menjadi terhubung-2 (bikoneksi) (Brimkov & Brimkov, 2024).

Contoh 2.11 :

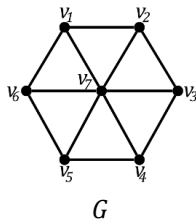


Gambar 2.11 Graf G memiliki blok, titik-pemutus, dan sisi-pemutus

Graf G pada Gambar 2.11 memiliki 4 titik-pemutus, yaitu v_3, v_6, v_7 , dan v_9 , 2 jembatan, yaitu sisi v_6v_7 dan v_9v_{10} , 5 blok yaitu $G_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $G_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $G_3 = \{v_6, v_7\}$, $G_4 = \{v_7, v_8, v_9\}$ dan $G_5 = \{v_9, v_{10}\}$.

Definisi 2.12:

Graf G dengan $n \geq 3$ titik disebut graf pansiklik (*pancyclic*) jika G memuat semua siklus C_l dengan $3 \leq l \leq n$ (Bondy J. A., 1971). Contoh graf *pancyclic* diberikan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf G *pancyclic*

Graf G pada Gambar 2.12 memuat:

$$C_3 = \{v_1, v_2, v_7, v_1\},$$

$$C_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_7, v_1\},$$

$$C_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_1\},$$

$$C_6 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_1\},$$

$$C_7 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1\}$$

sehingga G merupakan graf *pancyclic*.

Definisi 2.13:

Misalkan graf G gabungan saling lepas dua graf komplet K_m dan K_n yang saling lepas,

$$G = K_m \cup K_n$$

Karena derajat setiap titik K_m adalah $(m - 1)$ dan derajat setiap titik K_n adalah $(n - 1)$, sehingga untuk $m \geq n$ (tanpa menghilangkan keumuman), barisan derajat G adalah

$$(m - 1, m - 1, \dots, m - 1, n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$$

Keterangan :

$$m - 1, m - 1, \dots, m - 1 \rightarrow \text{sebanyak } m$$

$$n - 1, n - 1, \dots, n - 1 \rightarrow \text{sebanyak } n$$

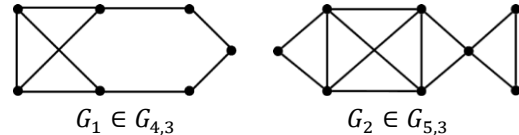
Ini disingkat sebagai berikut

$$\{(m - 1)^m, (n - 1)^n\}$$

Karena hanya ada dua kemungkinan derajat titik yaitu $(m - 1)$ dan $(n - 1)$, maka graf yang demikian disebut graf bireguler atau semireguler.

Selanjutnya, himpunan semua graf G yang tidak isomorfik dengan $K_m \cup K_n$, tetapi ekuivalen-derajat dengan $K_m \cup K_n$ dilambangkan dengan $G_{m,n}$, sedangkan himpunan komplemen dari setiap graf dalam $G_{m,n}$ dilambangkan dengan $\bar{G}_{m,n}$ (Brimkov & Brimkov, 2024).

Contoh 2.13 :

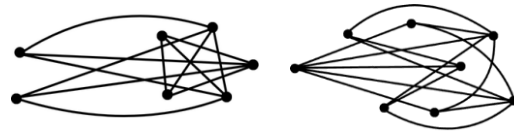


$$G_1 \in G_{4,3}$$

Barisan derajat G_1
adalah $(3^4, 2^3)$

$$G_2 \in G_{5,3}$$

Barisan derajat G_2
adalah $(4^5, 2^3)$



$$\bar{G}_1 \in \bar{G}_{4,3}$$

Barisan derajat $\bar{G}_1$
adalah $(4^3, 3^4)$

$$\bar{G}_2 \in \bar{G}_{5,3}$$

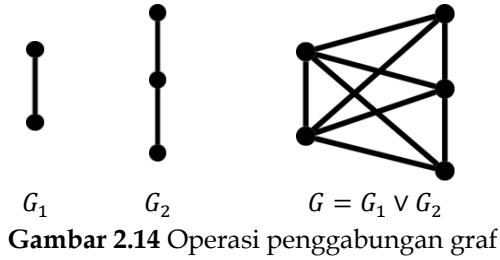
Barisan derajat $\bar{G}_2$
adalah $(5^3, 3^5)$

Gambar 2.13 Graf $G_{m,n}$ dan komplemennya

Definisi 2.14

Operasi penggabungan lengkap dari dua graf G_1 dan G_2 , dilambangkan $G = G_1 \vee G_2$ didefinisikan sebagai: memiliki himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Contoh 2.14 :



Gambar 2.14 Operasi penggabungan graf

Lemma 2.1:

Jika G graf maka $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$

Bukti:

Misalkan $e = uv \in E(G)$. Sisi $e = uv$ dihitung dua kali, yaitu dalam menghitung derajat titik u dan derajat titik v sehingga dalam menghitung jumlah derajat semua titik di G , setiap sisi G dihitung tepat dua kali. Akibatnya, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ ■

HASIL DAN PEMBAHASAN

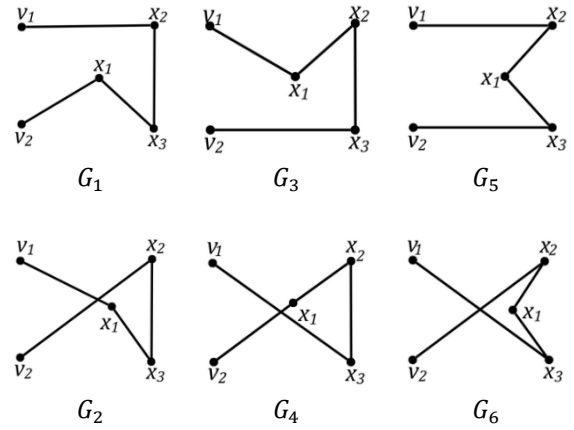
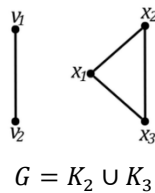
Definisi 3.1:

Misalkan u, v, x, y empat titik graf G sedemikian hingga uv dan xy adalah sisi G , tetapi ux dan vy bukan sisi G . Operasi pengalihan-2-sisi G adalah mengalihkan (mengganti) sisi-sisi uv dan xy dengan sisi ux dan vy .

Perhatikan bahwa, jika graf baru yang dihasilkan dari operasi tersebut adalah H , maka barisan derajat H sama dengan barisan derajat G . Dengan kata lain, H ekuivalen-derajat dengan G . Jelas bahwa, penerapan sebarisan operasi pengalihan-2-sisi pada graf G akan menghasilkan sebarisan graf-graf yang ekuivalen-derajat dengan G (Brimkov & Brimkov, 2024).

Contoh 3.1 :

Perhatikan graf $G = K_2 \cup K_3$ pada Gambar 3.1:



Gambar 3.1 Graf G dan operasi pengalihan-2-sisi

Perhatikan bahwa :

- (i) Operasi pengalihan-2-sisi v_1v_2 dan x_1x_2 pada G menghasilkan graf G_1 atau G_2
 - (ii) Operasi pengalihan-2-sisi v_1v_2 dan x_1x_3 pada G menghasilkan graf G_3 atau G_4
 - (iii) Operasi pengalihan-2-sisi v_1v_2 dan x_2x_3 pada G menghasilkan graf G_5 atau G_6
- $\forall i, 1 \leq i \leq 6$, barisan derajat G_i adalah $(2^3, 1^2)$, sehingga $G_{3,2} = \{G_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$.

Teorema 3.1:

Jika $G \in G_{m,n}$, maka G terhubung

Bukti :

Karena $G \in G_{m,n}$, maka graf G memiliki $m + n$ titik, dan ada m titik berderajat $m - 1$ dan n titik berderajat $n - 1$.

Andaikan G tak terhubung. Maka G memiliki paling sedikit dua komponen. Tanpa menghilangkan keumuman, $m \geq n$. Misalkan $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ komponen G yang memiliki banyak titik minimum. Ditinjau tiga kemungkinan $|V(G_1)|$.

Kemungkinan 1: $|V(G_1)| < n$

Dalam hal ini berlaku $\forall v \in V(G_1) \subset V(G), d_G(v) < n - 1$, sehingga terjadi kontradiksi.

Kemungkinan 2: $|V(G_1)| > n$

Karena graf G memiliki $m + n$ titik, jika G_1 memiliki lebih dari n titik, maka semua komponen lain dalam G memiliki kurang dari m titik. Akibatnya, semua titik yang berderajat $m - 1$ harus berada di dalam G_1 . Akan tetapi, hal tersebut bertentangan dengan asumsi bahwa G_1 merupakan komponen dengan jumlah titik paling sedikit. Hal ini bertentangan dengan minimalitas G_1 , sehingga terjadi kontradiksi.

Kemungkinan 3: $|V(G_1)| = n$

Maka semua titik G_1 berderajat $n - 1$, akibatnya $G_1 = K_n$. Misal G_2 memuat semua komponen G yang lain. Maka $|V(G_2)| = m$ dan $\forall v \in V(G_2) \subset V(G)$, $d_G(v) = m - 1$, sehingga $G_2 = K_m$, jadi $G = G_1 \cup G_2 = K_n \cup K_m \in G_{m,n}$, bertentangan dengan definisi graf $G_{m,n}$ sehingga terjadi kontradiksi. Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Teorema 3.2:

Jika $G \in G_{m,n}$, maka G memenuhi salah satu dari berikut :

1. Tidak memiliki titik-pemutus dan tidak memiliki sisi-pemutus.
2. Memiliki satu titik-pemutus dan tidak memiliki sisi-pemutus.
3. Memiliki dua titik-pemutus dan memiliki satu sisi-pemutus.
4. Memiliki dua titik-pemutus dan memiliki dua sisi-pemutus.
5. Memiliki tiga titik-pemutus dan memiliki empat sisi-pemutus.

Bukti :

Jelas bahwa, untuk $m = 1$ atau $n = 1$, $G_{m,n} = \emptyset$. Begitu juga, untuk $m = n = 2$, $G_{m,n} = \emptyset$.

Karena $G_{2,3} = G_{3,2} = \{P_5\}$, dimana P_5 adalah lintasan dengan lima titik (lihat Gambar 3.1). Setiap titik berderajat 2 pada lintasan adalah titik-pemutus dan setiap sisi pada lintasan merupakan sisi-pemutus. Maka lintasan P_5 memiliki tiga titik-pemutus dan empat sisi-pemutus. Ini berarti kasus (5) terbukti.

Untuk $m = 2$ dan $n \geq 4$, misalkan $V(K_2) = \{x_1, x_2\}$ dan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $G = K_2 \cup K_n$. Terapkan operasi pengalihan-2-sisi x_1x_2 dan $v_iv_j = e_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, pada graf G diperoleh graf $H_{i,j}$. Jelas graf $H_{i,j}$ isomorfik dengan sebuah graf yang diperoleh dari $K_2 \cup K_n$ dengan menghapus sisi $v_iv_j = e_{ij}$ dari K_n dan sisi x_1x_2 dari K_2 , lalu menambahkan dua sisi, yaitu sisi v_ix_1 dan sisi v_jx_2 . Graf $H_{i,j}$ memiliki dua titik-pemutus, yaitu titik v_i dan titik v_j , serta dua sisi-pemutus, yaitu sisi v_ix_1 dan sisi v_jx_2 . Jadi untuk $m = 2$ dan $n \geq 4$, kasus (4) terpenuhi. Analog untuk $m \geq 4$ dan $n = 2$, kasus (4) juga terpenuhi. Contohnya seperti graf $H_2 \in G_{2,5}$ pada Gambar 3.2.

Graf $H_1 \in G_{3,4}$ pada Gambar 3.2, memperlihatkan bahwa H_1 tidak memiliki titik-pemutus dan tidak memiliki sisi-pemutus. Ini berarti kasus (1) terbukti.

Klaim: Jika $G \in G_{m,n}$, maka tidak mungkin G tidak memiliki titik-pemutus dan memiliki sisi-pemutus.

Bukti klaim:

Andaikan $G \in G_{m,n}$ tidak memiliki titik-pemutus dan memiliki sisi-pemutus, maka G memiliki paling sedikit satu komponen K_2 . Ini berarti graf G tak terhubung, kontradiksi dengan Teorema 3.1.

Selanjutnya, akan ditunjukkan jika $G \in G_{m,n}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ dan jika G memiliki satu titik-pemutus, maka G memenuhi kasus (2) dan (3). Karena G memiliki satu titik-pemutus pada G , maka G memiliki paling sedikit dua blok dan masing-masing memiliki tepat satu titik-pemutus. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua blok dari G dan x adalah titik-pemutus dari G_1 .

Tanpa menghilangkan keumuman misal $n \geq m$. Jika $n = m$, maka semua titik di V_1 berderajat $n - 1$, sehingga $|V_1| \geq n$, karena beberapa titik yang bukan titik-pemutus di G memiliki paling sedikit $n - 1$ titik tetangga di G_1 . Dengan alasan serupa, $|V_2| \geq n$. Jika $|V_1| \geq n$ dan $|V_2| \geq n$, maka $|V_G| = |V_1| + |V_2| - 1 > n + n - 1 = 2n - 1$ (kontradiksi).

Akibatnya, $|V_1| = n$ atau $|V_2| = n$, sehingga terdapat dua kasus:

Kasus 1:

Salah satu $|V_1|$ dan $|V_2|$ harus sama dengan n dan yang lainnya $n + 1$. Tanpa menghilangkan keumuman misalkan $|V_1| = n$ dan $|V_2| = n + 1$. Dalam hal ini, G_1 merupakan graf komplit dengan n titik dan setiap titik di G_1 berderajat $n - 1$ di G_1 , tetapi titik-pemutus x di G_1 derajatnya melebihi $n - 1$ di G . Kontradiksi bahwa $G \in G_{m,n}$.

Kasus 2:

$|V_1| = n$ dan $|V_2| = n$. Dalam hal ini, G_1 merupakan graf komplit dengan n titik dan setiap titik di G_1 berderajat $n - 1$ di G_1 , tetapi titik-pemutus x di G_1 derajatnya melebihi $n - 1$ di G . Kontradiksi bahwa $G \in G_{m,n}$.

Dengan demikian $n > m$.

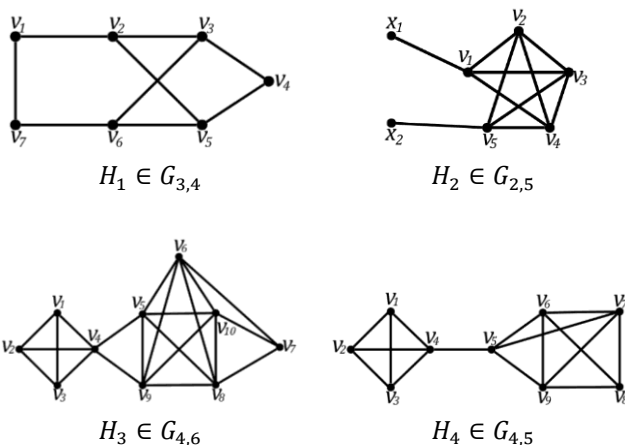
Andaikan semua titik di V_1 memiliki derajat yang sama, tanpa menghilangkan keumuman, misal $n - 1$. Akibatnya, $|V_1| \geq n$. Karena banyak titik berderajat $n - 1$ di G adalah n , maka $|V_1| = n$. Sehingga, G_1 graf komplet dengan n titik. Akibatnya $d_G(x) > n - 1$, kontradiksi. Jadi ada titik di V_1 berderajat $m - 1$ dan ada titik berderajat $n - 1$. Sehingga, $|V_1| \geq m$ dan G_1 graf komplit dengan m titik. Jika $d_G(x) = m - 1$, maka x bukan titik-pemutus G . Akibatnya, $d_G(x) = n - 1$, kontradiksi.

Andaikan x satu-satu titik di G_1 dengan $n - 1$ dan semua titik yang lain berderajat $m - 1$. Maka $|V_1| \geq m$, seperti sebelumnya, G_1 graf komplit dengan m titik.

Jika hanya G_2 blok lain dari G , maka G memiliki satu titik-pemutus dan tidak memiliki jembatan. Dalam hal ini, kasus (2) dipenuhi.

Jika G_2 bukan satu-satunya blok G selain G_1 , maka karena G_1 memiliki tepat satu titik dengan derajat $n - 1$, G_2 memiliki paling sedikit satu titik bukan titik-pemutus berderajat $n - 1$ dan memiliki n titik (perhatikan bahwa $|V(G_2)| \neq n + 1$, sebab jika tidak, G_1 dan G_2 hanya blok G dengan satu titik-pemutus). Dalam hal ini, tidak ada blok G dengan sebuah titik yang tidak terletak di G_1 atau G_2 . Sebab jika tidak, maka blok tersebut muat titik berderajat 1, kontradiksi bahwa $n > m \geq 3$. Dalam hal ini, G memiliki tiga blok, yaitu G_1, G_2 dan G_3 yaitu sebuah jembatan yang menghubungkan G_1 dan G_3 . Akibatnya, G memiliki dua titik-pemutus dan satu sisi-pemutus (jembatan). Kasus (3) dipenuhi. Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.2:



Gambar 3.2 Graf memenuhi Teorema 3.2

Gambar 3.2, graf $H_1 \in G_{3,4}$ tidak memiliki titik-pemutus dan tidak memiliki sisi-pemutus yang memenuhi kasus (1), graf $H_2 \in G_{2,5}$ memiliki dua titik-pemutus (titik v_1 dan v_5) dan memiliki dua sisi-pemutus (sisi v_1x_1 dan sisi v_5x_2) memenuhi kasus (4), graf $H_3 \in G_{4,6}$ memiliki satu titik-pemutus (titik v_4) dan tidak memiliki sisi-pemutus yang memenuhi kasus (2), dan graf $H_4 \in G_{4,5}$ memiliki dua titik-pemutus (titik v_4 dan v_5) dan memiliki satu sisi-pemutus (sisi v_4v_5) yang memenuhi kasus (3).

Lemma berikut penting untuk pembahasan selanjutnya.

Lemma 3.3:

Jika G graf sederhana dengan n titik ($n \geq 3$) dan untuk setiap dua titik u dan v yang tidak berhubungan langsung di G berlaku $d(u) + d(v) \geq n$, maka G graf Hamilton.

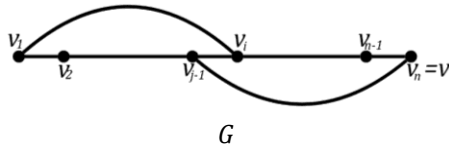
Bukti :

Andaikan G bukan graf Hamilton, karena $n \geq 3$ maka G bukan graf komplet K_n . Akibatnya, terdapat dua titik G yang tidak berhubungan langsung. Bentuk graf G_1 dari G dengan menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan langsung tersebut. Jika G_1 bukan graf Hamilton, maka graf G_1 bukan graf komplit, sehingga ada dua titik yang tidak berhubungan langsung di graf G_1 . Bentuk graf G_2 dari G_1 dengan cara menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan dua titik yang tidak berhubungan secara langsung tersebut. Jika graf G_2 bukan graf Hamilton maka, maka graf G_2 bukan graf komplit, proses penambahan sisi ini bisa dilanjutkan sampai diperoleh graf maksimal-non-Hamilton G_k . Penambahan sisi dengan cara seperti diatas menghasilkan graf sederhana yang baru dengan n titik, $n \geq 3$ dan

$$d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) \geq n, \forall u, v \notin E(G_k) \dots \dots \dots (1)$$

Karena G_k non Hamilton, maka terdapat dua titik di G_k yang tidak berhubungan langsung sedemikian hingga $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) \geq n$. Bentuk graf G^* sedemikian hingga $G^* = G_k + uv$. Maka graf G^* adalah graf Hamilton dan setiap siklus Hamilton di G^* pasti memuat sisi uv . Akibatnya, terdapat lintasan Hamilton di G_k yang berawal di titik u dan berakhir di titik v . Misalkan lintasan Hamilton tersebut adalah $(u = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n = v)$. Jika $uv_i \in E(G_k)$,

maka $v_{i-1}v \notin E(G_k)$. Karena jika tidak maka di G_k akan terdapat siklus Hamilton ($u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u$) di G_k ini bertentangan bahwa G_t non Hamilton. Seperti Gambar 3.3:



Gambar 3.3 Graf G

Sehingga, jika $d_{G_k}(u) = x$, maka $d_{G_k}(v) < n - x$ (karena G_k sederhana). Dengan demikian, $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) < x + n - x = n$. Ini kontradiksi dengan (1). Dengan demikian lemma terbukti ■

Lemma 3.4:

Jika G graf sederhana dengan n titik, $n \geq 3$ dan $d(v) \geq \frac{n}{2}$ untuk setiap $v \in V(G)$, maka G graf Hamilton.

Bukti :

Karena untuk setiap $v \in V(G)$ berlaku $d(v) \geq \frac{n}{2}$, maka untuk setiap dua titik u dan v yang tidak berhubungan langsung berlaku $d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. Berdasarkan Lemma 3.3, maka G graf Hamilton. Teorema terbukti (Budayasa, 2007). ■

Teorema 3.5:

Jika $G \in G_{m,n}$ dan G memiliki paling sedikit satu titik-pemutus, maka G memuat lintasan Hamilton.

Bukti :

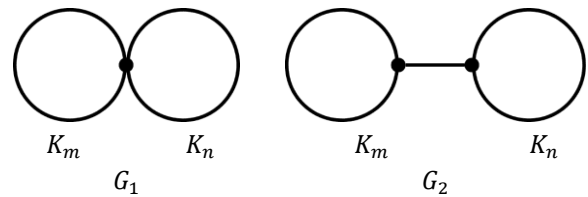
Karena G memiliki paling sedikit satu titik-pemutus, maka kita berada pada kasus (2), (3), (4), dan (5) dalam Teorema 3.2.

Untuk G memiliki tiga titik-pemutus dan empat sisi-pemutus, maka $G = P_5$. Jelas $G = P_5$ memuat lintasan Hamilton.

Untuk $m = 2$ dan $n \geq 4$ graf $G \in G_{m,n}$, berdasarkan Teorema 3.2, $G = H_{i,j}$. Graf bagian dari $H_{i,j}$ yang dibangun oleh $V(K_n)$ dinamakan G_1 . Perhatikan bahwa $G_1 = K_n - \{e_{i,j}\}$. Perhatikan bahwa titik v_i dan titik v_j di G tidak berhubungan langsung dan $d_{G_1}(v_i) = n - 2$ dan $d_{G_1}(v_j) = n - 2$. Sehingga $d_{G_1}(v_i) + d_{G_1}(v_j) = 2n - 4 \geq n$, untuk $n \geq 4$.

Sehingga berdasarkan Lemma 3.3, graf G_1 Hamilton dan ada lintasan Hamilton di G_1 dari titik v_i ke titik v_j , namakan lintasan tersebut P . Sehingga ada lintasan Hamilton dari x_1 ke x_2 di G yaitu berawal di x_1 kemudian telusuri sisi x_1v_i , kemudian menelusuri P dari v_i ke v_j di graf G_1 , kemudian akhirnya menelusuri sisi v_jx_2 dan berakhir di titik x_2 . Perhatikan bahwa graf $H_{i,j}$ memiliki dua titik-pemutus yaitu v_i dan v_j , dan memiliki dua sisi-pemutus, yaitu sisi x_1v_i dan sisi v_jx_2 .

Untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$, berdasarkan bukti Teorema 3.2, kemungkinan graf $G \in G_{m,n}$ dikatakan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf $G \in G_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$

Perhatikan G_1 maupun G_2 memuat lintasan Hamilton. G_1 memiliki satu titik-pemutus dan tidak memiliki sisi-pemutus, sedangkan G_2 memiliki dua titik-pemutus dan satu sisi-pemutus. Dengan demikian bukti teorema lengkap. ■

Definisi 3.2:

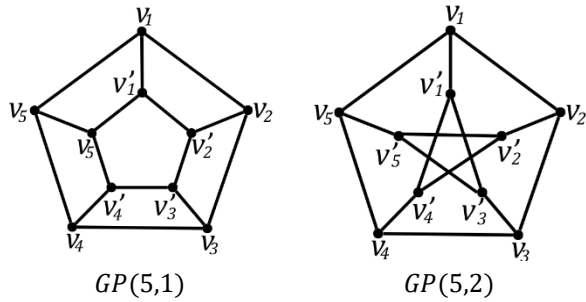
Misalkan n dan k dua bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$ dan $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Graf siklus $C_n(k)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $V(C_n(k)) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ dan titik v'_i dan v'_j berhubungan langsung jika dan hanya jika $|i - j| = k$, dengan $1 \leq i, j \leq n$. Misalkan siklus $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$.

Selanjutnya graf Petersen umum $GP(n, k)$ adalah graf dengan $V(GP(n, k)) = V(C_n) \cup V(C_n(k))$ dan $E(GP(n, k)) = E(C_n) \cup E(C_n(k)) \cup \{v_i v'_i | 1 \leq i \leq n\}$ (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Catatan: jelas bahwa $|V(GP(n, k))| = 2n$, $|E(GP(n, k))| = 3n$ dan $GP(n, k)$ graf beraturan-3.

Contoh 3.3 :

$n = 5$, maka $1 \leq k \leq 2$. Graf $GP(5, 1)$ dan graf $GP(5, 2)$ dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Graf Petersen

Lemma berikut diperlukan dalam pembuktian Teorema selanjutnya. Bukti Lemma dapat dilihat di (Bondy & Kouider, 1988).

Lemma 3.6

Jika G graf beraturan- r dengan paling banyak $3r + 1$ titik, maka G graf Hamilton atau G graf *petersen*.

Menggunakan Lemma di atas, kita buktikan Teorema berikut

Teorema 3.7:

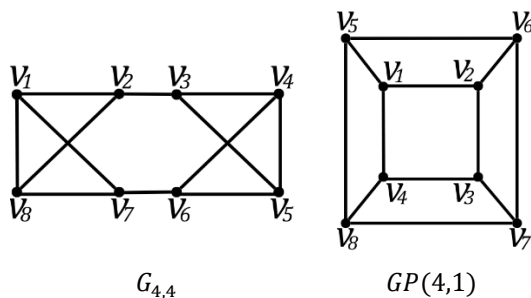
Jika $G \in G_{n,n}$ maka G terhubung-2 dan Hamilton

Bukti :

Seperti dalam pembuktian Teorema 3.2, $G_{1,1} = \emptyset$ dan $G_{2,2} = \emptyset$ dan untuk $m, n \geq 3$ dan $m = n$ maka G tidak memiliki titik-pemutus. Akibatnya berdasarkan Definisi 2.10, maka G graf terhubung-2. Karena $\forall v \in V(G)$ berderajat $n - 1$ dan banyak titik adalah $2n$, maka G graf beraturan- $(n - 1)$ dengan $2n$ titik. Berdasarkan Lemma 3.6, graf G Hamilton atau graf G graf *petersen*. Berdasarkan Definisi 3.2, maka G bukan graf *petersen*, sehingga G graf Hamilton. Tetapi untuk $n = 4$, $G \in G_{4,4}$ merupakan graf *petersen* sekaligus G juga merupakan graf Hamilton.

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Contoh 3.4 :


 Gambar 3.6 Graf $G_{4,4}$ dan graf *petersen*

Teorema 3.8:

Jika $G \in G_{m,n}$ maka $\text{diam}(G) \leq 4$

Bukti :

Misal $G \in G_{m,n}$ dan $u, v \in V(G), u \neq v$. Tanpa menghilangkan keumuman, $n \geq m$. Akan ditunjukkan $d(u, v) \leq 4$ di G . Jika $u, v \in E(G)$ maka $d(u, v) = 1$. Jika $u, v \notin E(G)$, ditinjau dua kasus:

Kasus 1:

[$(m = n)$ atau $(n > m$ dan $(d(u) = n - 1$ atau $d(v) = n - 1))$]

Jika $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, misal $x \in N(u) \cap N(v)$, maka $P_1(u, x, v)$ sebuah lintasan dari u ke v panjang dua. Akibatnya $d(u, v) \leq 2$.

Jika $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, maka $N(u) \cup \{u\} \cup N(v) \cup \{v\} = V(G)$. Perhatikan bahwa $N(u) \cup \{u\} \cup N(v) \cup \{v\} = |N(u)| + |\{u\}| + |N(v)| + |\{v\}| = d(u) + 1 + d(v) + 1 = (n - 1) + 1 + (m - 1) + 1 = n + m = |V(G)|$. Karena $G \in G_{m,n}$ berdasarkan Teorema 3.1, maka G terhubung. Akibatnya ada $x \in N(u)$ dan $y \in N(v)$, sedemikian hingga $x, y \in E(G)$. Akibatnya $P_2 = (u, x, y, v)$ sebuah lintasan dari u ke v dengan panjang tiga, akibatnya $d(u, v) \leq 3$.

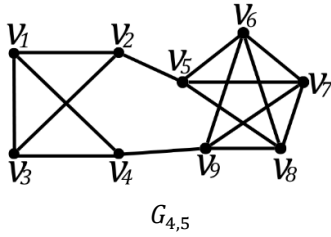
Kasus 2:

[$n > m$ dan $d(u) = d(v) = m - 1$]

Jika $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, maka $\exists x \in N(u) \cap N(v)$ sehingga $P_3 = (u, x, v)$ sebuah lintasan dari u ke v panjang dua. Akibatnya $d(u, v) \leq 2$.

Jika $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, karena $d(u) = m - 1, d(v) = m - 1$ dan $u, v \notin E(G)$ maka masing-masing dari u ke v memiliki paling banyak $m - 1$ tetangga yang masing-masing berderajat $m - 1$. Akibatnya u dan v memiliki paling sedikit satu tetangga berderajat $n - 1$. Misalkan x dan y masing-masing tetangga dari u dan v , secara berturut-turut. Jika $x, y \in E(G)$, maka $P_4(u, x, y, v)$ sebuah lintasan dari u ke v panjang tiga, akibatnya $d(u, v) \leq 3$. Jika $x, y \notin E(G)$, maka $|N(x)| + |N(y)| = d(x) + d(y) = (n - 1) + (n - 1) = 2n - 2$. Jika $n > m$, maka $|N(x) \cap N(y)| \neq \emptyset$. Misal $z \in |N(x) \cap N(y)|$, maka $P_5 = (u, x, z, y, v)$ sebuah lintasan dari u ke v panjang empat, akibatnya $d(u, v) \leq 4$. Jadi, terbukti Jika $G \in G_{m,n}$ maka $\text{diam}(G) \leq 4$. ■

Contoh 3.5 :



Gambar 3.7 Graf $diam(G) \leq 4$

Pada Gambar 3.7 diperoleh:

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= 1, d(v_1, v_3) = 1, d(v_1, v_4) = 1, \\ d(v_1, v_5) &= 2, d(v_1, v_6) = 3, d(v_1, v_7) = 3, \\ d(v_1, v_8) &= 3, d(v_1, v_9) = 2, d(v_2, v_3) = 1, \\ d(v_2, v_4) &= 2, d(v_2, v_5) = 1, d(v_2, v_6) = 2, \\ d(v_2, v_7) &= 2, d(v_2, v_8) = 2, d(v_2, v_9) = 3, \\ d(v_3, v_4) &= 1, d(v_3, v_5) = 2, d(v_3, v_6) = 3, \\ d(v_3, v_7) &= 3, d(v_3, v_8) = 3, d(v_3, v_9) = 2, \\ d(v_4, v_5) &= 3, d(v_4, v_6) = 2, d(v_4, v_7) = 2, \\ d(v_4, v_8) &= 2, d(v_4, v_9) = 1, d(v_5, v_6) = 1, \\ d(v_5, v_7) &= 1, d(v_5, v_8) = 1, d(v_5, v_9) = 2, \\ d(v_6, v_7) &= 1, d(v_6, v_8) = 1, d(v_6, v_9) = 1, \\ d(v_7, v_8) &= 1, d(v_8, v_9) = 1. \end{aligned}$$

Jadi didapatkan $diam(G_{4,5}) = 3 \leq 4$.

Lemma 3.9

Jika G graf Hamilton dengan n titik dan paling sedikit $\frac{n^2}{4}$ sisi, maka G graf *pancyclic* atau $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$

Bukti:

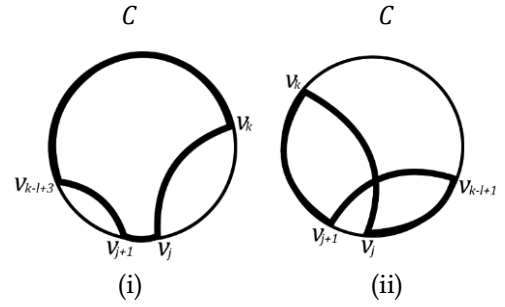
Misalkan $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ sebuah siklus panjang n di G (mempresentasikan C dengan titik-titik secara berurutan). Setiap sisi G dapat dianggap tali busur C . Definisikan panjang tali busur sebagai jarak antara titik-titik ujungnya, yang mengelilingi C .

Asumsikan bahwa G bukan graf *pancyclic*. Maka G tidak memiliki siklus panjang l , $3 \leq l < n$. Untuk titik-titik yang terkait v_j, v_{j+1} di C , perhatikan pasangan tali busur berikut (catatan: untuk bagian disini, semua cukup diambil modulo n):

Untuk $j + l - 1 \leq k \leq j - 1$ pasangan (v_j, v_k)
dengan (v_{j+1}, v_{k-l+3})

Untuk $j + 2 \leq k \leq j + l - 2$ pasangan (v_j, v_k)
dengan (v_{j+1}, v_{k-l+1})

Maka jelas bahwa paling banyak satu tali busur dari setiap pasang dapat menjadi sisi G , karena kedua pasangan tali busur bersama dalam bagian C , akan membentuk siklus panjang l seperti Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Graf G dengan siklus C

Oleh karena itu, untuk setiap j ,

$$d(v_j) + d(v_{j+1}) \leq n. \quad (1)$$

Dengan persamaan jika dan hanya jika tepat satu dari setiap pasang tali busur merupakan sisi G .

Pertama, kita tunjukkan bahwa n genap. Misalkan n ganjil, maka berdasarkan (1), beberapa titik yang dapat kita anggap v_n memiliki derajat paling banyak $\frac{(n-1)}{2}$. Oleh karena itu, berdasarkan (1): $2|E(G)| = \sum_{j=1}^n d(v_j) \leq \frac{n(n-1)}{2} + d(v_n) \leq \frac{(n-1)(n+1)}{2} < \frac{n^2}{2}$.

Oleh karena itu, G memiliki sisi lebih sedikit dari $\frac{n^2}{4}$, kontradiksi dengan hipotesis. Karena n genap maka berdasarkan (1), disimpulkan bahwa $|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}$. Tetapi berdasarkan hipotesis $|E(G)| \geq \frac{n^2}{4}$. Sehingga $|E(G)| = \frac{n^2}{4}$ dan persamaan (1) terpenuhi untuk setiap j . Maka:

$$(v_j, v_k) \in E(G) \Leftrightarrow (v_{j+1}, v_{k-l+3}) \notin E(G), j + l - 1 \leq k \leq j - 1 \quad (2)$$

$$(v_j, v_k) \in E(G) \Leftrightarrow (v_{j+1}, v_{k-l+1}) \notin E(G), j + 2 \leq k \leq l - 2 \quad (3)$$

Misalkan G bukan graf bipartisi lengkap $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. Maka beberapa tali busur di G memiliki panjang genap. Kita akan menunjukkan ada tali busur panjang dua di G . Asumsikan $k \geq 4$ adalah panjang tali busur terpendek di G dan $(v_j, v_{j+k}) \in E(G)$. Ada kasus yang masing-masing diilustrasikan pada Gambar 3.9:

i. $4 \leq k \leq n - 1$

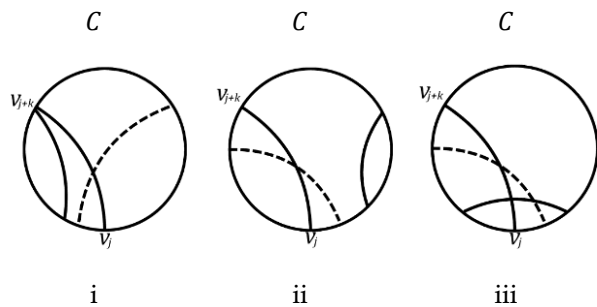
$(v_{j+1}, v_{j+k+l-3}) \notin E(G)$ karena tali busur ini dengan (v_j, v_{j+k}) merupakan bagian dari C yang jika digabung akan membentuk siklus panjang l . Maka berdasarkan (2), $(v_{j+2}, v_{j+k}) \in E(G)$ dengan tali busur panjang $k - 2$, kontradiksi dengan minimalitas dari k .

ii. $n - l + 2 \leq k \leq 2n - 2l$

Berdasarkan (3), $(v_{j-1}, v_{j+k+l-1}) \notin E(G)$ dengan (2), $(v_{j-2}, v_{j+k+2l-4}) \in E(G)$. Akan tetapi, tali busur memiliki panjang $2n - k - 2l + 2 \leq k - 2$, kontradiksi dengan minimalitas dari k .

iii. $2n - 2l + 2 \leq k \leq 2n - 2$

Dengan (3), $(v_{j-1}, v_{j+k+l-1}) \notin E(G)$ dan dengan $(v_{j-2}, v_{j+k+2l-2}) \in E(G)$. Tali busur memiliki panjang $k + 2l - 2n \leq k - 2$, kontradiksi dengan minimalitas dari k .



Gambar 3.9 Graf G

Maka, dapat disimpulkan ada tali busur $(v_j, v_{j+2}) \in E(G)$. Akan tetapi, $(v_j, v_{j+l}) \notin E(G)$ dan dengan (2), $(v_j, v_{j+k}) \in E(G)$. Dengan menelusuri C dengan cara ini, dapat kita simpulkan semua tali busur dengan panjang dua ada di G . Jelas bahwa G adalah graf *pancyclic*. Bertentangan dengan asumsi dan jadi G memang harus $K_{n,n}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$. Dengan demikian Lemma telah terbukti. ■

Teorema 3.10:

Jika $G \in \bar{G}_{n,n}$, maka G *pancyclic*

Bukti :

Karena $G \in \bar{G}_{n,n}$ maka setiap titik di G berderajat n dan banyak titik $2n$, sehingga berdasarkan Lemma 3.4 maka G graf Hamilton(1)

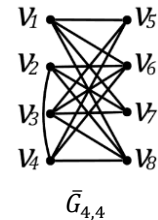
Berdasarkan Teorema Jabat Tangan,

$$\begin{aligned} |E(G)| &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \\ &= \frac{1}{2} n(2n) \\ &= n^2 \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $G \in \bar{G}_{n,n}, G \neq K_{n,n} \dots \dots \dots (3)$

Dari (1), (2), dan (3) dan Lemma 3.9, disimpulkan bahwa G graf *pancyclic*. ■

Contoh 3.6 :



Gambar 3.10 Graf $G \in \bar{G}_{4,4}$ *pancyclic*

Gambar 3.10 memuat: $C_3 = \{v_2, v_8, v_4, v_2\}$, $C_4 = \{v_1, v_5, v_3, v_6, v_1\}$, $C_5 = \{v_6, v_3, v_8, v_4, v_2, v_6\}$, $C_6 = \{v_1, v_8, v_4, v_6, v_2, v_7, v_1\}$, $C_7 = \{v_2, v_4, v_8, v_1, v_5, v_3, v_7, v_1\}$, $C_8 = \{v_2, v_8, v_1, v_7, v_3, v_5, v_4, v_6, v_2\}$.

PENUTUP

SIMPULAN

Pada penelitian ini dapat disimpulkan bahwa graf $G_{m,n}$ merupakan graf yang tidak isomorfik dengan graf $K_m \cup K_n$, tetapi ekuivalen-derajat dengan graf $K_m \cup K_n$ memiliki barisan derajat $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ dan komplemennya, graf $\bar{G}_{m,n}$ merupakan graf yang tidak isomorfik dengan graf bipartit komplet $K_{m,n}$, tetapi ekuivalen-derajat dengan graf bipartit komplet $K_{m,n}$ memiliki barisan derajat $\{m^n, n^m\}$. Graf tersebut memiliki sifat sebagai berikut:

1. Graf $G \in G_{m,n}$ merupakan graf terhubung.
2. Graf $G \in G_{m,n}$ memiliki titik-pemutus dan sisi-pemutus yang teridentifikasi dalam lima kategori.
3. Graf $G \in G_{m,n}$ memuat lintasan Hamilton jika memiliki paling sedikit satu titik-pemutus.
4. Graf $G \in G_{m,n}$ merupakan graf terhubung-2 dan graf Hamilton.
5. Graf $G \in G_{m,n}$ merupakan graf dengan $\text{diam}(G) \leq 4$.
6. Graf $G \in \bar{G}_{n,n}$ merupakan graf *pancyclic*.

SARAN

Penelitian ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan mengeksplorasi graf yang memiliki pola barisan derajat berbeda untuk memahami sifat-sifat strukturalnya secara luas. Selain itu, dapat dilakukan penelitian aplikasi praktis graf dengan barisan derajat tertentu dalam berbagai bidang, seperti dalam optimasi jaringan komputer, perencanaan sistem transportasi, dan analisis interaksi sosial.

DAFTAR PUSTAKA

- Barrus, M. D. (2016). On Realization Graphs of Degree Sequences. *Discrete Mathematics* 339, 2146-2152.
- Bondy, J. A. (1971). Pancyclic Graph I*. *Journal of Combinatorial Theory* 11, 80-84.
- Bondy, J. A., & Kouider, M. (1988). Hamilton Cycle in Regular 2-Connected Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 177-186.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. (1976). *Graph Theory With Applications*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- Brimkov, B., & Brimkov, V. (2024). Graph with Degree Sequence $\{(m-1)^m, (n-1)^n\}$ and $\{m^n, n^m\}$. *Discrete Applied Mathematics* 358, 477-486.
- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *GRAPHS & DIGRAPHS, SIXTH EDITION*. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group.
- Jackson, B. (1980). Hamilton Cycle in Regular 2-Connected Graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 27-46.