MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

PELABELAN TOTAL ANTIAJAIB $-(a, b)$ SUPER PADA GRAF

Ardila Septiana Putri
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ardilaseptiana.21042@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Pelabelan total antiajaib - H - (a, b) pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots |V(G)| + |E(G)|\}$. Bobot total dihitung sebagai $w(H') = \sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$, dan total bobot membentuk barisan aritmetika dengan suku awal a beda b. Jika $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$ maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total antiajaib - H-(a, b) super pada graf G. Menentukan syarat perlu atau cukup bagi graf G dan subgraf H dari G agar terdapat pelabelan total antiajaib -H- (a, b) pada graf G merupakan permasalahan sulit. Syarat perlu untuk graf $G = K_{1,n}$ dan subgraf $H = K_{1,t}$ (dengan $1 \leq t \leq n$) setiap subgraf $K_{1,t}$ yang isomorfik dengan H harus dapat diberi label total yang membentuk barisan aritmetika, yaitu jumlah subgraf $K_{1,n}$ yang isomorfik dengan $K_{1,t}$. Selain itu, pelabelan harus memenuhi kondisi bijektif. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa terdapat pelabelan total antiajaib super pada graf kipas F_n.

Kata Kunci: Pelabelan total antiajaib, pelabelan total super, graf bipartit komplet $K_{1,n}$, subgraf $K_{1,t}$, graf kipas F_n

Abstract

A total antimagic labeling $-H-(a, b)$ on graph G is a bijective function $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots |V(G)| + |E(G)|\}$. The total weight $w(H') = \sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e)$, and the total weight forms an arithmetic sequence with the initial term a, difference b. If $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$, then such a labeling is called a total antimagic super labeling -H- (a, b) on graph G. Determining sufficient or necessary conditions for graph G and subgraph H of G to have a total antimagic labeling -H- (a, b) is a challenging problem. A necessary condition to graph $G = K_{1,n}$ and subgraph $H = K_{1,t}$ (where $1 \leq t \leq n$) is that every subgraph $K_{1,t}$ isomorphic to H must be able to be labeled totally to form an arithmetic sequence. This means the number of subgraphs $K_{1,n}$ isomorphic to $K_{1,t}$ must satisfy the bijective condition. Furthermore, it will be proven that there exists a total antimagic super labeling on fan graphs F_n.

Keywords: *Total antimagic labeling, total super labeling, complete bipartite graph $K_{1,n}$, subgraph $K_{1,t}$, fan graph F_n.*

PENDAHULUAN

Teori Graf sebagai salah satu cabang Matematika sebenarnya sudah ada lebih dari dua abad yang lalu. Pada tahun 1736, matematikawan terkenal dari Swiss yang bernama Euler menulis jurnal pertama tentang teori graf. Pada awalnya, teori graf "kurang" penting dalam matematika karena kebanyakan digunakan untuk memecahkan teka-teki (*puzzle*) (Budayasa, 2007). Namun, dalam beberapa dekade terakhir, telah berkembang pesat. Salah satu topik dalam bidang graf adalah pelabelan graf, yang pada dasarnya mengkaji proses pemberian label berupa bilangan atau simbol pada titik, sisi, atau keduanya sesuai dengan aturan tertentu.

Graf G terdiri dari dua himpunan, yaitu himpunan berhingga (tak kosong) *V(G)* dari komponennya yang disebut titik dan himpunan berhingga (bisa kosong) $E(G)$ yang komponennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tidak berurutan dari titik – titik di *V(G)* (Budayasa, 2007). Pelabelan graf dapat dirasakan perannya terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi maupun ilmu computer (Anggun Wardhani. 2019). Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label.

Pelabelan dalam graf dapat dibagi menjadi tiga jenis, jika domain dari fungsi adalah himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domain dari fungsi adalah himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Dan jika domain dari fungsi adalah himpunan titik dan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (total *labeling*) (Masyitoh, 2019). Beberapa jenis pelabelan graf telah dikembangkan, antara lain pelabelan harmoni, pelabelan *gracefull,* pelabelan total tak beraturan, pelabelan antiajaib, dan pelabelan ajaib. Pelabelan ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček pada tahun 1963, dan penelitian terkait kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Stewart pada tahun 1960 (Gallian, 2019). Dalam pengembangan pelabelan ajaib, terdapat pula konsep pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik-ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super (Irawati dan Heri, 2011).

Salah satu pelabelan yang menarik yang dilabelkan dengan bilangan adalah pelabelan ajaib. Pelabelan ajaib adalah pelabelan pada graf di mana sisi-sisi graf diberi label sehingga jumlah label sisi yang terhubung dengan setiap titik adalah konstan. Salah satu variasi dari pelabelan ajaib adalah pelabelan antiajaib, yaitu pelabelan pada graf di mana sisi-sisi graf diberi label bilangan bulat sehingga tidak ada dua titik yang memiliki jumlah bobot yang sama. Graf sederhana $G = (V(G), E(G))$ dikatakan antiajaib jika sisi-sisinya diberi label bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots |V(G)|\}$ sehingga tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama, di mana bobot titik adalah jumlah label sisi-sisi yang terhubung dengan titik tersebut. Dalam penelitian ini menggunakan graf tanpa gelung dan tanpa sisi rangkap atau biasanya disebut graf Bintang.

Kelas-kelas graf yang memiliki pelabelan total antiajaib yaitu, graf komplet (graf lengkap) dengan K_n, graf lintasan P_n, dan graf lingkaran C_n (graf siklus). Untuk $n \geq 2$, graf kipas F_n diperoleh dengan menambahkan satu titik tambahan K_1 yang terhubung ke setiap titik dalam graf lintasan P_n.

Pada artikel "Laurence dan Kathiresan (2015) yang berjudul "*On super (a,d)-Ph-antimagic total labeling of Stars*", terdapat teorema yang belum memiliki pembuktian yang memadai serta beberapa kesalahan yang ditemukan, sehingga pada penelitian kali ini penulis akan melengkapi pembuktian dari teorema tersebut, serta merevisi kesalahan-kesalahan yang ada. Oleh karena itu, dalam penelitian ini membahas tentang pelabelan total antiajaib $H-(a,b)$ super pada sebuah graf. Pada penelitian ini dibatasi pada graf G yaitu graf bipartit komplet $K_{1,n}$ yang merupakan dari subgraf $H = K_{1,t}$, $1 \leq t \leq n-1$

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga (tak kosong) $V(G)$ dari elemen-elemen yang disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak berurutan dari titik $V(G)$. (Budayasa, 2007).

Definisi 2.2

Misalkan u dan v dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ sebuah sisi G. Katakan titik u dan titik v berhubungan langsung *(adjacent)* di G, sisi e menghubungkan *(joining)* titik u dan titik v di G, u dan v titik - titik akhir sisi e, sisi e terkait *(incident)* dengan titik v dan juga titik u. Sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung *(loop)*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi-rangkap/sisi-ganda *(multiple-edges)* (Budayasa, 2007)

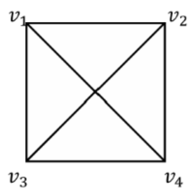
Definisi 2.3

Graf sederhana adalah graf yang tidak memiliki sisi rangkap dan tidak memiliki gelung, sedangkan graf rangkap adalah graf yang memiliki sisi rangkap tetapi tidak memiliki gelung (Budayasa, 2007).

Definisi 2.4

Graf komplet (graf lengkap) dengan n titik adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik dihubungkan dengan satu sisi (Budayasa, 2007)

Contoh 2.4



K_4

Gambar 2.4 Graf komplet dengan 4 titik

Definisi 2.5

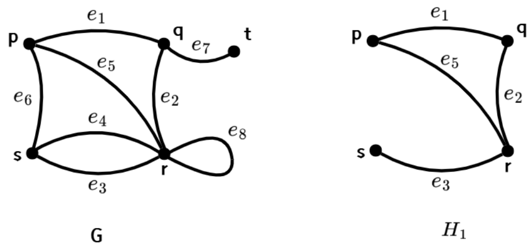
Sebuah graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Jika G sederhana dan bipartit dengan bipartisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka G disebut graf bipartit komplet, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$ (Budayasa, 2007).

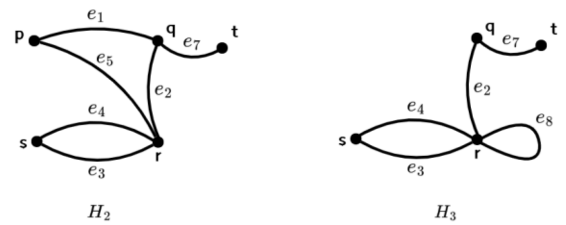
Definisi 2.6

Graf H disebut subgraf dari graf G, ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $H \subset G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut graf perentang *(spanning graf)* dari G. Misalkan $V \subset V(G)$. Subgraf dari G yang dibangun oleh V dilambangkan dengan $G[V]$ adalah subgraf dari G yang himpunan titiknya adalah V dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang mempunyai titik-titik akhir di V (Budayasa, 2007).

Contoh 2.6

Pada Gambar 2.7, graf H_1 adalah graf bagian G, graf H_2 adalah graf bagian rentang G, dan H_3 adalah graf bagian G yang dibangun oleh $V = \{q, r, s, t\}$.





Gambar 2.6. H_1 graf bagian G, graf H_2 graf bagian rentang G, dan H_3 graf bagian G yang dibangun oleh $V = \{q, r, s, t\}$.

Definisi 2.7

Misalkan G sebuah graf. Jalan *(walk)* di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. W adalah sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k, atau jalan (v_0, v_k). Titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. Sedangkan titik – titik $v_1, v_2, v_3, \dots v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W. Perhatikan bahwa panjang jalan W dan k disebut panjang jalan W. Sebuah titik G, mungkin saja muncul lebih dari satu dalam jalan W, begitu juga sebuah sisi G boleh muncul lebih dari satu kali dalam jalan W, jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak *(trail)*. Jika semua titik $v_0, v_1, v_2 \dots v_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut lintasan *(path)*. Sebuah jalan W dengan Panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tutup disebut sirkit. Sebuah sirkit di graf G yang memuat semua sisi G disebut sirkit Euler. Sebuah graf yang memuat sirkit Euler disebut graf Euler. Sebuah sikel *(cycle)* adalah sebuah jejak tertutup *(closed trail)* yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut sikel k, disimbolkan dengan C_k. Sebuah sikel yang memuat semua titik sebuah graf disebut Sikel Hamilton. Graf yang memuat sikel Hamilton disebut graf Hamilton (Budayasa, 2007).

Definisi 2.8

Dua graf dikatakan isomorfik yang ditulis sebagai $G \cong H$, apabila terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $V(H)$, sedemikian hingga banyak sisi yang menghubungkan titik-titik u, v di G, sama dengan banyak sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u, v (Budayasa, 2007).

Definisi 2.9

Barisan aritmetika k bilangan dengan suku awal a dan beda b memiliki suku-suku sebagai berikut: $a\,, (a+b)\,, (a+2b), \ldots a+(k-1)b$ (Rosen, 2012).

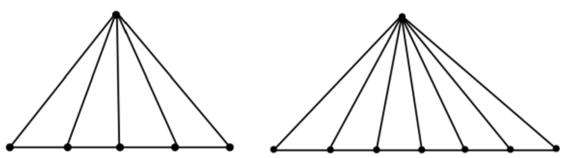
Definisi 2.10

Fungsi $f: A \to B$ disebut injektif jika dan hanya jika $\forall x, y \in A, x \neq y \to f(x) \neq f(y)$, sedangkan fungsi $f: A \to B$ disebut surjektif jika dan hanya jika $\forall y \in B, \exists x \in A \ni f(x) = y$. Jika fungsi $f: A \to B$ injektif dan surjektif maka f disebut bijektif (Budayasa, 2007)

Definisi 2.11

Graf lintasan P_n adalah graf lintasan dengan jumlah titik n dan jumlah sisi $(n-1)$. Graf kipas F_n dibentuk dari sebuah lintasan dengan n titik $(n \geq 2)$ P_n dan menambahkan titik baru x di luar P_n dan menghubungkan titik x tersebut ke setiap titik P_n dengan sebuah sisi. Selanjutnya titik x disebut titik pusat dari F_n. Perhatikan bahwa pada graf F_n ada sikel panjang t, C_t untuk setiap t dengan $3 \leq t \leq n+1$. Lebih lanjut ada sebanyak $n-(t-2)$ sikel C_t pada F_n. Contoh dari graf kipas F_5 dan F_7 dapat dilihat pada Gambar 2.12.

Contoh 2.11



$(\boldsymbol{a})\ F_5$ $\quad$ **(b)** F_7

Gambar 2.11. Graf kipas F_5 dan F_7

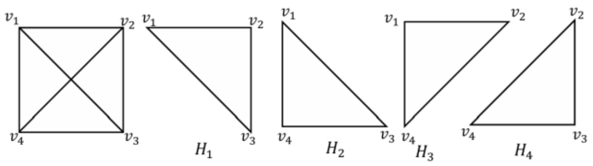
HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Penutup Sisi

Definisi 3.1

Misalkan G graf yang memiliki himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Sebuah himpunan subgraf – subgraf G yang berbeda $S = \{H_1, H_2, H_3 \ldots . H_k\}$ disebut himpunan penutup sisi G jika setiap sisi G termuat pada paling sedikit satu subgraf H_i. Jika untuk setiap i yang isomorfik dengan graf H, maka S disebut sebuah penutup -H graf G.

Contoh 3.1 Perhatikan graf komplet $G = K_4$ berikut. Gambar 3.1 (a) menunjukkan Graf komplet dengan 4 titik (K_4) dan (b) menunjukkan Graf komplet dengan 3 titik (K_3)



$(a)\ G = K_4$ $\quad$ $(b)\ H = K_3$

Gambar 3.1 (a) Graf komplet dengan 4 titik
(b) Graf komplet dengan 3 titik

Himpunan $S = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ sebuah penutup *sisi* G. Karena $\forall_{i,j},\ i \neq j,\ 1 \leq i \leq 4,\ H_i \cong H_j$ dan $H_i \cong K_3$ maka S adalah sebuah penutup -K_3 graf G. Selanjutnya akan didefinisikan konsep pelabelan total antiajaib super pada sebuah graf

B. Pelabelan Total Antiajaib Super

Definisi 3.2

Misalkan $G = (V(G),\ E(G))$ graf dan H subgraf di G. Pelabelan total antiajaib -H-(a,b) pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif

$$f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

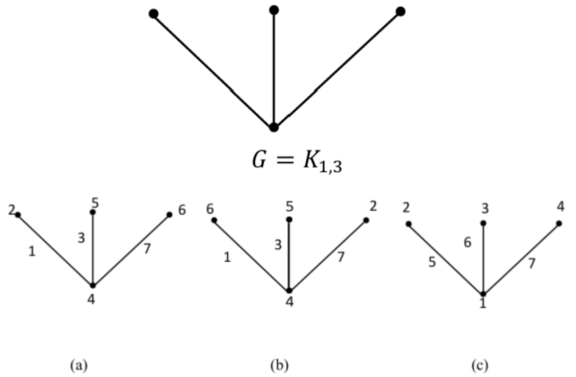
sedemikian hingga, untuk semua subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H, memiliki total label (bobot) :

$$w(H') = \sum_{v \in V(H')} f(v) + \sum_{e \in E(H')} f(e),$$

dari total label (bobot) $w(H')$ membentuk barisan aritmetika dengan suku awal a dan beda b yaitu: a , $(a+b)$, $(a+2b), \ldots, a+(k-1)b$, di mana a dan b bilangan bulat positif dan k merupakan banyaknya subgraf G yang isomorfik dengan H.

Selanjutnya, jika syarat tambahan dipenuhi yaitu: $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$ maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total antiajaib - H-(a,b) super pada graf G.

Contoh 3.2 Perhatikan graf bipartit komplet $K_{1,3}$ dengan 4 titik berikut



Gambar 3.2 Graf $K_{1,3}$

Gambar 3.2 (a), menunjukkan sebuah pelabelan total antiajaib - K_2 - (7,5) pada graf G , dengan K_2 merupakan graf komplet dengan 2 titik.

Gambar 3.2 (b), menunjukkan sebuah pelabelan total antiajaib -K_2-(11,1) pada graf G. Pelabelan tersebut juga merupakan pelabelan total antiajaib -P_3-(19,1) pada graf G, dengan P_3 graf lintasan dengan 3 titik.

Perhatikan bahwa pelabelan graf G pada gambar (a) dan (b), bukan pelabelan super karena ada titik G berlebel lebih dari 4 padahal $|V(G)| = 4$

Gambar 3.2 (c), menunjukkan sebuah pelabelan total antiajaib - K_2 - (8,2) super pada graf G . Pelabelan tersebut juga merupakan sebuah pelabelan antiajaib - P_3-(17,2) super pada graf G.

Menentukan syarat perlu atau cukup bagi graf G dan subgraf H dari G agar terdapat pelabelan total antiajaib - H - (a,b) pada graf G merupakan permasalahan sulit.

Berikut ini diberikan sebuah syarat perlu atau cukup untuk keberadaan pelabelan yang demikian pada sebuah graf.

Teorema 3.1 :

Misalkan G graf dan H subgraf G dan k adalah banyaknya subgraf G yang isomorfik dengan $H, k \geq 2$. Jika terdapat pelabelan total antiajaib -H-(a,b) super pada G, maka

$$b \leq \frac{|V(H)|\,(|V(G)| - |V(H)|) + |E(H)|\ (|E(G)| - |E(H)|)}{k-1}$$

Bukti :

Karena G memiliki pelabelan total antiajaib $-H-(a,b)$ super maka minimum total label H paling sedikit

$$1 + 2 + \ldots + |V(H)| + (|V(G)| + 1) + (|V(G)| + 2) + \ldots + (|V(G)| + |E(H)|)$$

Sehingga diperoleh :

$$a \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + |V(H)| + (|V(G)| + 1) + (|V(G)| + 2) + \ldots + (|V(G)| + |E(H)|) \quad (1)$$

Karena

$$1 + 2 + 3 + \cdots + |V(H)| = \frac{|V(H)|\ (|V(H)| + 1)}{2}$$

dan

$$1 + 2 + 3 + \cdots + |E(H)| = \frac{|E(H)|\ (|E(H)| + 1)}{2}$$

Sehingga, penjumlahan dari nilai $|V(G)|$ sebanyak $|E(H)|$

$$|V(G)| + |V(G)| + \ldots + |V(G)| = |E(H)| \cdot |V(G)|$$

Maka pertidaksamaan (1) menjadi

$$a \geq \frac{|V(H)|\ (|V(H)| + 1)}{2} + \frac{|E(H)|\ (|E(H)| + 1)}{2} + |E(H)|\,|V(G)| \quad (2)$$

Demikian juga maksimum total label H tidak melebihi

$$X = |V(G)| + (|V(G)| - 1) + \ldots + (|V(G)| - |V(H)| + 1) + (|V(G)| + |E(G)|) + (|V(G)| + |E(G)| - 1) + \ldots + (|V(G)| + |E(G)| - |E(H)| + 1)$$

dengan banyaknya subgraf G yang isomorfik H adalah k, maka

$$a + (k-1)b \leq X$$

atau

$$(k-1)b \leq X - a \quad (3)$$

Karena

$$1 + 2 + \ldots + (|V(H)| - 1) = \frac{1}{2}\ |V(H)|\ (|V(H| - 1)$$

dan

$$1 + 2 + \ldots + (|E(H)| - 1) = \frac{1}{2}\ |E(H)|\ (|E(H| - 1)$$

Maka X dapat disederhanakan menjadi

$$X = -\tfrac{1}{2}\ |V(H)|\ (|V(H)| - 1) + |V(H)|\ |V(G)| - \tfrac{1}{2}|E(H)|\ (|E(H)| - 1) + |E(H)|\ (|V(G)| + |E(G)|) \quad (4)$$

Dari pertidaksamaan (2), (3), dan persamaan (4) diperoleh :

$$(k-1)b \leq |V(H)| \cdot |V(G)| - \tfrac{1}{2}\ |V(H)|\ (|V(H) - 1) + |E(H)|\ (|V(G)| + |E(G)|) - \tfrac{1}{2}\ |E(H)|\ (|E(H)| -$$

$1) - \{\frac{1}{2}|V(H)|\,(|V(H)|+1) + \frac{1}{2}\,|E(H)|(|E(H)| + 1) + |E(H)| \cdot |V(G)|\}$
$= |V(H)| \cdot |V(G)| - |V(H)| \cdot |V(H)| + |E(H)| \cdot |E(G)| - |E(H)| \cdot |E(H)|$

Karena $k \geq 2$, maka

$$b \leq \frac{|V(H)|\,(|V(G)| - |V(H)|) + |E(H)|\,(|E(G)| - |E(H)|)}{k-1}$$

Dengan demikian bukti teorema lengkap. ■

Perhatikan bahwa, jika G graf bipartit komplet $K_{1,n}$ dengan $n \geq 2$ dan H adalah graf komplet K_2, maka $|V(G)| = n+1$; $|E(G)| = n$; $|V(H)| = 2$; $|E(H)| = 1$; dan $k = n$.

sehingga berdasarkan dari Teorema 3.1 diperoleh:

Akibat 3.1.1 :

Jika terdapat pelabelan total antiajaib -K_2-(a,b) super pada graf $K_{1,n}$, maka $b \leq 3$.

Selanjutnya apabila H adalah $K_{1,t}$ dengan $1 \leq t < n$, maka $K_{1,t}$ adalah subgraf dari $K_{1,n}$, dan ada sebanyak $\binom{n}{t}$ subgraf $K_{1,n}$ yang isomorfik dengan $K_{1,t}$. Karena $|V(K_{1,t})| = t+1$; $|E(K_{1,t})| = t$, dan $k = \binom{n}{t}$, maka dari Teorema 3.1, diperoleh

$$b \leq \frac{(t+1)\ (n+1-t-1) + t\,(n-t)}{\binom{n}{t} - 1}$$
$$= \frac{(n-t)\ (2t+1)}{\binom{n}{t} - 1}$$

sehingga akibat lain dari Teorema 3.1 adalah sebagai berikut :

Akibat 3.1.2 :

Jika terdapat pelabelan total antiajaib -$K_{1,t}$- (a,b) super pada graf $K_{1,n}$ dengan $1 \leq t < n$, maka $b \leq \frac{(n-t)(2t+1)}{\binom{n}{t}-1}$

Berikut akan ditunjukkan bahwa ada pelabelan total antiajaib untuk $G = K_{1,n}, n \geq 2, H = K_2$ dan $b = 2$.

Teorema 3.2 :

Terdapat pelabelan total antiajaib - K_2 - $(n+5, 2)$ super pada graf $K_{1,n}$ dengan $n \geq 2$.

Bukti :

Perhatikan graph $K_{1,n}$ memiliki satu titik berderajat n, diberi nama titik x dan sebanyak n titik pendant (titik berderajat satu), namakan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jelas bahwa, $\forall_i, 1 \leq i \leq n, e_i = xv_i \in E(K_{1,n})$, dan e_i isomorfik dengan graf komplet K_2 perhatikan :

$$|\,V(K_{1,n})\,| = n+1 \text{ dan } |\,E(K_{1,n})\,| = n$$

$$v_0 = x \ \rightarrow x = v_0$$

Selanjutnya kontruksikan fungsi

$$f : V(K_{1,n}) \cup E(K_{1,n}) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 2n+1\}$$

Sedemikian hingga :

$$(i)\ f(v_i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ i+1, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$(ii)\ f(e_i) = n+1+i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Dari persamaan (i) diperoleh :

$$f\left(V(K_{1,n})\right) = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\} = A$$

Dari persamaan (ii) diperoleh :

$$f\left(E(K_{1,n})\right) = \{\,n+2, n+3, \ldots, 2n+1\} = B$$

Sehingga

$$f\left(V(K_{1,n}) \ \cup\ E(K_{1,n})\right) = A \ \cup\ B$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$$

Dan $|R_f| = |A \cup B| = 2n+1$

Karena domain fungsi f adalah

$$D_f = V(K_{1,n}) \ \cup\ E(K_{1,n})$$

Dan $V(K_{1,n}) \cap E(K_{1,n}) = \emptyset$

Maka $|D_f| = |V(K_{1,n})| \cup |E(K_{1,n})|$
$= 2n+1$

Karena D_f dan R_f himpunan berhingga dan $|D_f| = |R_f| = 2n+1$, maka fungsi f bijektif.

Misalkan subgraf $K_{1,n}$ yang dibangun oleh sisi e_i dilambangkan dengan $H_i, \forall_i, 1 \leq i \leq n$. Maka, dari (i) dan (ii) total label (bobot) H_i adalah

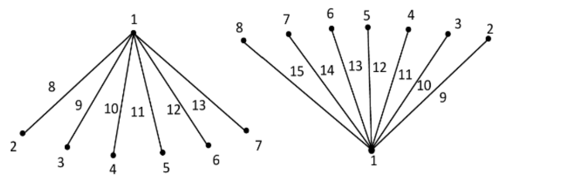
$$w(H_i) = w(e_i) = f(x) + f(v_i) + f(e_i)$$
$$= 1 + (1+i) + (n+1+i)$$
$$= n + 2i + 3$$

Sehingga $w(H_1), w(H_2), w(H_3), \ldots, w(H_n)$ membentuk barisan n+5, n+7, ... ,3n+3 yang merupakan barisan aritmetika dengan suku pertama $a = n$+5 dan $b = 2$.

Berdasarkan Definisi 3.2 f merupakan pelabelan total antiajaib $-K_2-(n+5,2)$ super pada graph $K_{1,n}$. Pelabelan total antiajaib $-K_2-(n+5,2)$ disebut super karena label terkecil digunakan pada simpul sebelum sisi.

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Sebagai dapat ditemukan pada gambar di bawah ini.



(a). Pelabelan total antiajaib -K_2-$(11,2)$ super pada $K_{1,6}$

(b). Pelabelan total antiajaib -K_2-$(12,2)$ super pada $K_{1,7}$

Gambar 3.3 Pelabelan total antiajaib -K_2

Teorema 3.3 :

Tidak ada pelabelan total antiajaib -K_2-$(a,3)$ super pada graf $K_{1,n}$ untuk $n \geq 3$

Bukti :

Andaikan ada pelabelan total antiajaib $-K_2-(a,3)$ super pada graph $K_{1,n}$ maka

nilai a terkecil adalah $1+2+(n+2)=n$+5.

Jelas bahwa banyaknya subgraf $K_{1,n}$ yang isomorfik dengan $H=K_2$ adalah n. Akibatnya, total label terbesar H adalah $a+(n-1)\,b$ dan

$$a+(n-1)\,b \leq (n+5)+(n-1)\,3$$
$$= 4n+2 \qquad (1)$$

Total label H_n graf $K_{1,n}$ terbesar adalah

$$2+\ (n+1)\ +\ 2n+\ 1\ =\ 3n+4 \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2)

$$4n+2 \leq\ 3n+4 \rightarrow n \leq 2 \text{ (kontradiksi)}$$

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Teorema 3.4 :

Tidak ada pelabelan total antiajaib -$K_{1,2}$-$(a,3)$ super pada graf $K_{1,n}$ untuk $n \geq 3$

Bukti :

Misalkan ada pelabelan total antiajaib $K_{1,2}-(a,3)$ pada graf $K_{1,n}$ dengan $G=K_{1,n}$

Dan $H\ =\ K_{1,2}$, maka $|V(G)|\ =n+1$, $|E(G)|=n$, $|V(H)|=3$. $|E(H)|=2$ terdapat sebanyak $k=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ subgraf G isomorfik dengan H. Berdasarkan akibat 3.2 diperoleh :

$$b \leq \frac{(n-2)(4+1)}{\binom{n}{2}-1} = \frac{(n-2)5}{\frac{n(n-1)}{2}-1} = \frac{(n-2)5}{\frac{n(n-1)-2}{2}} = \frac{(n-2)\,10}{n^2-n-2} = \frac{(n-2)10}{(n-2)\,(n+1)} = \frac{10}{n+1}$$

sehingga,

$$b\ \leq\ \frac{10}{n+1}$$

Karena $n\ \geq\ 3$ dan b bilangan bulat postif maka $b \leq 2$. Kontradiksi bahwa $b=3$.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika graf G memiliki pelabelan total antiajaib - H - (a,b) super, maka G juga memiliki pelabelan total antiajaib -H-(a',b) super.

Teorema 3.5

Jika graf G memiliki pelabelan total antiajaib -H-(a,b) super maka G juga memiliki pelabelan total antiajaib -H-(a',b) super dengan

$$a'\ =\ P+Q-a$$

Dimana

$$P\ = (|V(G)|+1)\ |V(H)|$$
$$Q\ = (2|V(G)|+|E(G)|+1)\ |E(H)|$$

dengan k banyaknya subgraf G yang isomorfik dengan H.

Bukti :

Misalkan f adalah sebuah pelabelan total antiajaib $-H-(a,b)$ super pada graf G.

Kontruksi pelabelan g dari f sedemikian hingga

$$g(v)=|V(G)|+1-f(v), \forall\ v\epsilon V(G) \text{ dan}$$

$$g(e)=2\ |V(G)|\ +\ |E(G)|+1-\ f\ (e), \forall\ e\epsilon E(G)$$

Terdapat pelabelan g setiap subgraf H' dari G yang isomorfik dengan H, memiliki total label sebagai berikut:

$$w_g(H') = \sum_{v \epsilon V(H')} g(v) + \sum_{e \epsilon E(H')} g(e)$$

$$= (|V(G)| + 1)\ |V(H)| + (2\ |V(G)| + |E(G)| + 1)\ |E(H)| - \left\{ \sum_{v \epsilon V(H')} f(v) + \sum_{e \epsilon E(H')} f(e) \right\}$$

sehingga

$$w_g(H') = (|V(G)| + 1)\ |V(H)| + (2\ |V(G)|\ + |E(G)| + 1)\ |E(H)| - w_f(\ H'\ )$$

$$= P + Q - w_f(\ H'\ )$$

karena $w_f(H')$ membentuk barisan aritmetika

$$a, (a + b), (a + 2b), \ldots, a + (k - 1)b \qquad (1)$$

maka $w_g(H')$ membentuk barisan aritmetika

$$\big((P + Q - a),\ (P + Q - a - b),\ (P + Q - a - 2b), \ldots (P + Q - a - (k - 1)\ b)\big)$$

karena f pelabelan super, maka

$$f|V(G)|\ =\ \{1, 2, 3, \ldots |V(G)|\}$$

karena $\forall\ v \epsilon V(G)$

$$g\ (v) = |V(G)| + 1 - f(v)$$

Maka

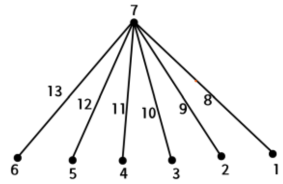
$$g(\ |V(G)|\ ) = \{\ |V(G)|, |V(G)| - 1, |V(G)| -\ 2, \ldots 1\ \} \qquad (2)$$

dari (1) dan (2) dan Definisi 3.2 disimpulkan bahwa G adalah pelabelan total antiajaib $-H - (P + Q - a, b)$ super.

Dengan demikian, teorema terbukti ■

Sebagai transformasi dari pelabelan f ke pelabelan g, dapat dilihat berikut ini. Perhatikan Gambar 3.3 (a) menunjukkan pelabelan total antiajaib - K_2 - (11,2) super pada graf $K_{1,6}$. Jika pelabelan ini, dilambangkan dengan f, maka pelabelan g dengan definisi

$g(v) = |V(G)| + 1 - f(v), \forall v \in V(G)$ dan
$g(e) = 2\ |V(G)|\ + |E(G)| +\ 1\ -\ f(e), \forall e\ \in\ E(G)$
Pelabelan yang diperoleh :



Gambar 3.4 Pelabelan total antiajaib - K_2 - (26,2) super pada graf $K_{1,6}$.

Teorema 3.6 :
Jika $3 \leq t \leq n$ maka terdapat pelabelan total antiajaib - C_t - $(t^2 + 2tn - t + 3, 2t - 5)$ super pada graf kipas F_n.

Bukti :

Misalkan titik pusat dari graf kipas F_n adalah x dan himpunan titik – titik F_n yang terletak pada P_n adalah $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kontruksi pelabelan $f: V(F_n) \cup E(F_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$

Sehingga

(i) $f(x) =\ 1$
(ii) $f(v_i) =\ n + 2 - i,\ 1\ \leq\ i\ \leq\ n$
(iii) $f(v_i v_{i+1}) =\ 3n + 1 - i,\ 1\ \leq\ i\ \leq\ n - 1$
(iv) $f(xv_i) =\ n + 1 +\ i,\ 1\ \leq\ i\ \leq\ n$

Selanjutnya akan ditunjukkan :

i. Bahwa f bijektif
ii. Barisan total bobot subgraf F_n yang isomorfik dengan C_t membentuk barisan aritmetika dengan suku awal $t^2 + 2tn - t + 3$ dengan beda $2t - 5$

i. Buktikan bahwa f bijektif

Dari persamaan (ii), diperoleh :

$$f\big(V(P_n)\big) = \{2,3,4, \ldots, n + 1\}$$

sehingga dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh :

$$f\big(V(F_n)\big) = \{1\} \cup f\big(V(P_n)\big) = \{1,2,3, \ldots, n + 1\}$$

Misalkan

$$E_1 = \{xv_i | 1 \le i \le n\} \text{ dan}$$
$$E_2 = \{v_i v_{i+1} | 1 \le i \le n-1\}$$

Dari pengkontruksian persamaan (iv) diperoleh :

$$f(E_1) = \{n+2, n+3, \dots, 2n + 1\} \quad (1)$$

dan dari (iii) diperoleh :

$$f(E_2) = \{2n+2, 2n+3, \dots, 3n\} \quad (2)$$

Sehingga dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$f(E(F_n)) = f(E_1) \cup f(E_2)$$
$$= \{ n+2, n+3, \dots, (2n+1), (2n+2), \dots, 3n \}$$

sehingga, $R_f(V(F_n) \cup E(F_n)) = \{ 1, 2, 3, \dots, n+1,\ n+2, \dots, 3n \}$

dengan demikian, f merupakan fungsi bijektif dengan $f(V(F_n)) = \{1, 2, \dots, (n+1) \}$.

ii. Buktikan bahwa barisan total bobot subgraf F_n yang isomorfik dengan C_t membentuk barisan aritmetika dengan suku awal $t^2 + 2tn - t + 3$ dengan beda $2t - 5$

Misalkan sikel C_t yang ke -i merupakan subgraf dari F_n dilambangkan dengan C_t^i

untuk $i = 1$ diperoleh $= (x, v_{n-t+2}, v_{n-t+3}, \dots, v_n, x)$

perhatikan bahwa total bobot C_t^1 adalah

$$w(C_t^1) = f(x) + \sum_{i=n-t+2}^{n} f(v_i) + \sum_{i=n-t+2}^{n-1} f(v_i v_{i+1}) + f(xv_{n-t+2}) + f(xv_n)$$
$$= t^2 + 2nt - t + 3$$

untuk $i = 2$ diperoleh $= (x, v_{n-t+1}, v_{n-t+2}, \dots, v_{n-1}, x)$

perhatikan bahwa total bobot C_t^2 adalah

$$w(C_t^2) = f(x) + \sum_{i=n-t+1}^{n-1} f(v_i) + \sum_{i=n-t+1}^{n-2} f(v_i v_{i+1}) + f(xv_{n-t+1}) + f(xv_{n-1})$$
$$= t^2 + 2nt + t - 2$$

sehingga nilai b diperoleh sebagai berikut :

$$b = w(C_t^2) - w(C_t^1)$$
$$b = 2t - 5$$

Secara umum C_t yang ke - j , $1 \le j \le n - t + 2$ dilambangkan dengan C_t^j

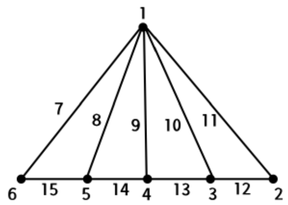
$$C_t^j = (x,\ v_{n-j-t+1},\ v_{n-j-t+2}, \dots,\ v_{n-j-1},\ x)$$

$$w(C_t^j) = f(x) + \sum_{i=n-j-t+1}^{n-j-1} f(v_i) + \sum_{i=n-j-t+1}^{n-j-2} f(v_i v_{i+1}) + f(xv_{n-j-t+1}) + f(xv_{n-j-1})$$
$$= t^2 + 2nt + 2jt - 5j + t - 2$$

sehingga nilai b diperoleh sebagai berikut :

$$b = w(C_t^{j+1}) - w(C_t^j)$$
$$b = 2t - 5$$

Sebagai ilustrasi dari pelabelan dalam bukti diperoleh pelabelan antiajaib super graf F_5 seperti gambar berikut ini .



Gambar 3.5 Pelabelan antiajaib super graf F_5

Perhatikan untuk $t = 3$ diperoleh barisan aritmetika berikut : 39, 40, 41, 42

Untuk $t = 4$ diperoleh barisan aritmetika berikut : 55, 58, 61

Untuk $t = 5$ diperoleh barisan aritmetika berikut : 73, 78

Dengan demikian, barisan total bobot subgraf F_n yang isomorfik dengan C_t membentuk barisan aritmetika dengan suku awal $t^2 + 2tn - t + 3$ dengan beda $2t - 5$. Sehingga, teorema terbukti ∎

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total antiajaib *H-(a,b)* super pada graf yang telah dibahas pada bab sebelumnya, Berikut ini sebuah syarat perlu atau cukup untuk keberadaan pelabelan yang demikian pada sebuah graf.

Syarat cukup bagi suatu graf G dengan subgraf H dari G.

1. Misalkan G graf dan H subgraf G dan k adalah banyaknya subgraf G yang isomorfik dengan $H, k \geq 2$. Jika terdapat pelabelan total antiajaib -H-(a, b) super pada G, maka
$$b \leq \frac{|V(H)|\,(|V(G)| - |V(H)|) + |E(H)|\,(|E(G)| - |E(H)|)}{k-1}$$
2. Jika graf G memiliki pelabelan total antiajaib -H-(a, b) super maka G juga memiliki pelabelan total antiajaib -H-(a', b) super dengan
$$a' = P + Q - a$$
Dimana
$P = (|V(G)| + 1)\,|V(H)|$
$Q = (2\,|V(G)| + |E(G)| + 1)\,|E(H)|$
dengan k banyaknya subgraf G yang isomorfik dengan H.

SARAN

Pada penelitian selanjutnya penulis disarankan untuk mengeksplorasi pelabelan total antiajaib super pada graf roda dengan mempertimbangkan parameter seperti bobot dan struktur subgraf isomorfik. Penelitian selanjutnya juga dapat mencakup analisis perbandingan antara pelabelan pada graf roda dan graf lain yang telah diteliti, untuk memahami perbedaan dan kesamaannya.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). *Graphs & digrafs* (5th ed.). CRC Press.

Haviar, M., Ivaska, M. (2014). *Vertex Labellings of Simple Graph*. Research and Exposition in Mathematics. Banska Bystrica (34) pp. 72 – 74

Irawati, Novi, dan Heri, Robertus. (2011). Pelabelan Total Titik Ajaib pada *Complete* Graph K_n dengan *n* Genap. Semantik

Inayah, N., Salman, A. N. M., & Simanjuntak, R. (2009). *On (a, d)-H-antimagic coverings of graphs*. *Journal of combinatorial mathematics and combinatorial computing*, *71*(273), 273-281.

Laurence, S. D., & Kathiresan, K. M. (2015). *On super (a,d)-P_h-antimagic total labeling of Stars*. AKCE *International Journal of Graphs and Combinatorics*.

Masyitoh, Soffi N. (2019). Dekomposisi $(a,\ d) - P_4 -$ Antiajaib Pada Graph *Generelized Peterson* $GP(n,$ 3). UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Jakarta.

Mahfudiyah, L. (2008). Pelabelan *graceful* pada graf kipas F_n dan graph kipas ganda dF_n, *n* bilangan asli dan $n \geq 2$ (Doctoral dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. Ed. ke-7. McGraw-Hill., New York.

Wardhani, Devy Anggun & Budayasa, I Ketut. (2019). Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super pada Graph Petersen yang Diperumum. Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 7(2), 15.