MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

PEMBUKTIAN TEOREMA THALES DENGAN MENGGUNAKAN BILANGAN KOMPLEKS

Zulfatra Lamuda*
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo
e-mail : zulfatra_s1matematika@mahasiswa.ung.ac.id

Asriadi
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo
e-mail: asriadi@ung.ac.id

Abstrak

Teorema Thales merupakan salah satu teorema yang cukup terkenal dalam geometri. Teorema ini menyatakan jika sebuah segitiga dibentuk di dalam sebuah setengah lingkaran dimana diameternya adalah salah satu sisi segitiga maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku. Tulisan ini akan menyajikan pembuktian teorema Thales dengan menggunakan pendekatan bilangan kompleks.
Kata Kunci: Segitiga, Lingkaran, Teorema Thales, Bilangan Kompleks.

Abstract

Thales' theorem is one of the most well-known theorems in geometry. This theorem states that if a triangle is formed within a semicircle where the diameter is one of the sides of the triangle, then the triangle is a right triangle. This paper will present a proof of Thales' theorem using a complex number approach.
Keywords: *Triangle, Circle, Thales' theorem, Complex number.*

1. PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang secara khusus mengkaji struktur dan sifat dari suatu bangun datar ataupun bangun ruang. Penyelesaian permasalahan geometri umumnya diselesaikan menggunakan Definisi, aksioma ataupun teorema yang telah ada. Kemudian, dari sudut pandang geometri analitik permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan koordinat Cartesian yang di repesentasikan secara aljabar sehingga akan lebih dalam memahaminya.

Pendekatan geometri analitik tidak begitu efektif dalam permasalahan tertentu. Beberapa permasalahan tersebut diantaranya; 1) untuk menentukan titik di bidang membutuhkan dua variabel, 2) persamaan yang terbentuk pada permasalahan geometri tranformasi geometri di bidang pada umumnya rumit sehingga sulit diselesaikan (Tristianto et al., 2018). .Untuk mengatasi hal tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep bilangan kompleks.

Bilangan kompleks merupakan pasangan terurut dari dua bilangan rill. Suatu bilangan kompleks dapat dinyatakan $z = (x, y) = x + iy$ pada suatu bidang kompleks (*Argand*). Melalui bilangan kompleks , titik koordinat cartesian dapat di representasikan menjadi sebuah bilangan kompleks. Kemudian, beberapa kajian literatur yang membahas penerapan bilangan kompleks dalam geometri bidang antara lain, (Ronshu, 2013) membahas tentang teorema-teorema indah dalam geometri seperti teorema Van Aubel serta menyajikan pembuktiannya menggunakan pendekatan bilangan kompleks, vektor, serta geometri elementer, sementara (Choirunisa et al., 2024) membahas tentang penerapan bilangan kompleks dalam mengeksplorasi bentuk datar segi empat. Di sisi lain, (Sangindykov, 2020) membahas tentang pembuktian teorema Stewart dengan menggunakan bilangan kompleks

Selanjutnya, segitiga sebagai salah satu objek yang ikut dikaji dalam geometri memiliki berbagai fakta yang banyak dipelajari. Sebagai contoh teorema Phytagoras, teorema Ceva, Teorema Menelaus.

Lebih lanjut, terdapat teorema Thales yang menyatakan jika sebuah segitiga dibentuk di dalam sebuah setengah lingkaran dimana diameternya adalah salah satu sisi segitiga maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku

Artikel ini akan menyajikan pembuktian dari teorema Heron dengan menggunakan pendekatan bilangan kompleks.

2. KAJIAN TEORI

Berikut dituliskan beberapa definisi dan teorema yang direkonstruksi kembali dari (Sagindykov & Bimurat, 2024);(Chen, 2015) dan(Lund et al., 2020).

Definisi 2.1 Diberikan $a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$. Persamaan lingkaran dinyatakan oleh himpunan

$$L: \{z \in \mathbb{C} : az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0\} \quad (1)$$

Dari persamaan (1) berikut adalah bentuk standar persamaan lingkaran

Teorema 2.2 Jika $a = 0$ maka persamaan(1) merupakan sebuah garis lurus pada bidang kompleks.

Teorema 2.3 Diberikan titik z_1 dan z_2 pada bidang kompleks dengan $z_1 \neq z_2$. Persamaan garis yang melalui titik z_1 dan z_2 dinyatakan sebagai berikut.

$$(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z - (z_2 - z_1)\bar{z} + \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 = 0 \quad (2)$$

Teorema 2.4 Suatu persamaan standar lingkaran dapat dituliskan sebagai $|z - z_0| = R$ dimana $z_0 = -\frac{b}{a}$ dan $R = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{a}$.

Definisi 2.5 Diberikan tiga buah titik A, B, C pada bidang kompleks. Luas segitiga dinyatakan sebagai berikut.

$$L_{\Delta(A,B,C)} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} A & \bar{A} & 1 \\ B & \bar{B} & 1 \\ C & \bar{C} & 1 \end{vmatrix}$$

Teorema 2.6 Diberikan titik $z_0 \in \mathbb{C}$. Jarak titik z_0 ke garis $l: \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ di definisikan $d(z_0, l) = \frac{|\bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b|}{2|a|}$.

3. METODE PENELITIAN

Metode Penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode studi literatur dengan menelusuri sejumlah buku,jurnal serta referensi yang relevan dengan pembuktian teorema Thales pada bidang kompleks.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum masuk pada pembuktian teorema Thales dengan menggunakan bilangan kompleks, akan dibahas beberapa teorema pengantar.

Teorema 4.1 Diberikan titik A,B pada bidang kompleks dengan A$\neq B$. Jika g adalah suatu garis yang melaui titik A dan B maka $g: \{T \in \mathbb{C} : (A - B)(\overline{T - B}) - \overline{(A - B)(\overline{T - B})} = 0$.

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} g : (A-B)(\overline{T-B}) - \overline{(A-B)(\overline{T-B})} &= 0 \\ \Rightarrow A\bar{T} - A\bar{B} - B\bar{T} - \bar{A}T + \bar{A}B + \bar{B}T &= 0 \\ \Rightarrow (\bar{B} - \bar{A})T + (B - A)\bar{T} + \bar{A}B - A\bar{B} &= 0 \end{aligned}$$

Menurut teorema 2.3, terbukti persamaan terakhir adalah sebuah garis .

■

Teorema 4.2 Diberikan titik W dan garis $g: \{T \in \mathbb{C} : (A - B)(\overline{T - B}) - \overline{(A - B)(\overline{T - B})} = 0$ pada bidang kompleks. Jarak titik W ke garis g ditulis $d(W, g)$ yaitu

$$d(W, g) = \left|\frac{(A-B)\overline{(B-W)} - \overline{(A-B)\overline{(B-W)}}}{2(A-B)}\right| \quad (3)$$

Bukti. Misalkan garis g adalah suatu persamaan garis yang melalui titik A dan B. Menurut teorema 4.1 berlaku

$$g: \{T \in \mathbb{C} : (A - B)(\overline{T - B}) - \overline{(A - B)(\overline{T - B})} = 0.$$

Berdasarkan teorema 2.6, maka jarak titik W ke garis g adalah

$$d(W, g) = \left|\frac{(A-B)\overline{(B-W)} - \overline{(A-B)\overline{(B-W)}}}{2(A-B)}\right|.$$

■

Teorema 4.3 Diberikan Δ(A,B,C) pada bidang kompleks dengan $A \neq B$.Jika g adalah garis yang melalui titik A dan B. Maka,

Luas Δ(A,B,C) = $\frac{1}{2}|A - B| \cdot d(C, g)$ (4)

Bukti. Berdasarkan teorema 4.2 diperolah

$$d(C, g) = \left|\frac{(A-B)\overline{(B-C)} - \overline{(A-B)\overline{(B-C)}}}{2(A-B)}\right|$$

Perhatikan bahwa

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|A-B| \cdot d(C,g) = \frac{1}{2}|A-B| \left|\frac{(A-B)\overline{(B-C)} - \overline{(A-B)\overline{(B-C)}}}{2(A-B)}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|A-B| \cdot d(C,g) = \frac{1}{4}\left|(A-B)\overline{(B-C)} - \overline{(A-B)\overline{(B-C)}}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|A-B| \cdot d(C,g) = \frac{1}{4}|A\bar{B} - A\bar{C} - |B|^2 + B\bar{C} - A\bar{B} + \bar{A}C + |B|^2 - \bar{B}C|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|A-B| \cdot d(C,g) = \frac{1}{4}|A\bar{B} - A\bar{B} + \bar{A}C - A\bar{C} + B\bar{C} - \bar{B}C|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|A-B| \cdot d(C,g) = \frac{1}{4}\left|det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ A & B & C\\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C}\end{pmatrix}\right|$$

■

Teorema 4.4 Diberikan sebuah lingkaran L beradius r serta titik A dan B pada bidang kompleks. Rg(A,B) disebut diameter dari lingkaran L jika dan hanya jika $d(A,B) = 2r$.

Bukti.

Misalkan titik pusat lingkaran L adalah C. maka berlaku

$\Leftrightarrow C \epsilon rg(A,B)$

$\Leftrightarrow d(A,B) = d(A,C) + d(B,C)$

$\Leftrightarrow d(A,B) = r + r$

$\Leftrightarrow d(A,B) = 2r$.

■

Teorema 4.5 Diberikan tiga buah titik A, B dan C yang tak segaris pada bidang kompleks. Jika L meuat titik A, B dan C maka radius lingkaran L adalah

$$r = \frac{|A-B|\cdot|B-C|\cdot|A-C|}{4\cdot L_{ABC}}$$

Bukti.

Misalkan Z_0 adalah pusat lingkaran L dan beradius r.Maka

$L: |Z - Z_0| = r \Leftrightarrow (Z - Z_0)\overline{(Z - Z_0)} = r^2$.

Perhatikan bahwa

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}|A\bar{B} - \bar{A}B - A\bar{C} + \bar{A}C + B\bar{C} - \bar{B}C|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}|A\overline{(B-C)} + B\overline{(C-A)} + C\overline{(A-B)}|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}|A\overline{(B - Z_0 + Z_0 - C)} + B\overline{(C - Z_0 + Z_0 - A)} + C\overline{(A - Z_0 + Z_0 - B)}|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}\left|A\left(\frac{r^2}{B-Z_0} - \frac{r^2}{C-Z_0}\right) + B\left(\frac{r^2}{C-Z_0} - \frac{r^2}{A-Z_0}\right) + C\left(\frac{r^2}{A-Z_0} - \frac{r^2}{B-Z_0}\right)\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\left|\frac{A(C-B)}{(B-Z_0)(C-Z_0)} + \frac{B(A-C)}{(A-Z_0)(C-Z_0)} + \frac{C(B-A)}{(B-Z_0)(A-Z_0)}\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\left|\frac{A(C-B)(A-Z_0) + B(A-C)(B-Z_0) + C(B-A)(C-Z_0)}{(A-Z_0)(B-Z_0)(C-Z_0)}\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\left|\frac{A^2C - A^2B + AB^2 - B^2C + BC^2 - AC^2}{(A-Z_0)(B-Z_0)(C-Z_0)}\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\left|\frac{A^2C - A^2B + AB^2 - B^2C + BC^2 - AC^2 + ABC - ABC}{(A-Z_0)(B-Z_0)(C-Z_0)}\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\left|\frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{(A-Z_0)(B-Z_0)(C-Z_0)}\right|^2$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{1}{16}r^4\frac{|A-B|^2\cdot|B-C|^2\cdot|A-C|^2}{|A-Z_0|^2\cdot|B-Z_0|^2\cdot|C-Z_0|^2}$$

$$|L_{ABC}|^2 = \frac{\frac{1}{16}r^4(|A-B|^2\cdot|B-C|^2\cdot|A-C|^2)}{r^6}$$

$$L_{ABC} = \frac{|A-B|\cdot|B-C|\cdot|A-C|}{4r}$$

$$r = \frac{|A-B|\cdot|B-C|\cdot|A-C|}{4\cdot L_{ABC}}.$$

■

Berikut adalah pembuktian teorema Thales dengan menggunakan bilangan kompleks.

Teorema 4.5 (Thales) Diberikan sebuah lingkaran L serta titik P, Q, R terletak di L pada bidang kompleks. $\Delta(P, Q, R)$ siku-siku di R jika dan hanya jika $\mathrm{rg}(P, Q)$ adalah sebuah diameter lingkaran L.

Bukti.

Pertama, Andaikan $\Delta(P, Q, R)$ siku siku di titik R. Misalkan pula garis g melalui titik $P\ dan\ R$. Sehingga R merupakan proyeksi titik Q terhadap garis g dengan demikan $d(Q, g) = |Q - R|$. Menurut teorema 4.3 berlaku

$L_{\Delta(P,Q,R)} = \frac{1}{2} \cdot |P - R| \cdot |Q - R|$.

Kemudia berdasarkan teorema 4.5 diperoleh

$$r = \frac{|P - R| \cdot |Q - R| \cdot |P - Q|}{4 \cdot L_{\Delta(P,Q,R)}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{|P-R|\cdot|Q-R|\cdot|P-Q|}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot|P-R|\cdot|Q-R|}$$

$\Rightarrow |P - Q| = 2r$

Jadi, jelas $rg(P, Q)$ adalah diameter lingkaran L.

Kedua, andaikan $rg(P, Q)$ adalah sebuah diameter lingkaran L. Menurut teorema 4.5 dan teorema 4.4 berlaku

$$r = \frac{|P - R| \cdot |Q - R| \cdot |P - Q|}{4 \cdot L_{\Delta(P,Q,R)}}$$

$$\Rightarrow 2r = \frac{|P - R| \cdot |Q - R| \cdot |P - Q|}{2 \cdot L_{\Delta(P,Q,R)}}$$

$$\Rightarrow |P - Q| = \frac{|P - R| \cdot |Q - R| \cdot |P - Q|}{2 \cdot L_{\Delta(P,Q,R)}}$$

$\Rightarrow L_{\Delta(P,Q,R)} = \frac{1}{2} \cdot |P - R| \cdot |Q - R|$.

Menurut teorema 4.3 $\Delta(P, Q, R)$ siku siku di titik R.

■

SIMPULAN

Pada bagian sebelumnya telah ditunjukkan pembuktian teorema Thales dengan menggunakan bilangan kompleks yang merupakan tujuan dari penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Chen, E. (2015). *Bashing Geometry with Complex Numbers*.

Choirunisa, L., Firdos, T. A., Puspita, V. I., Mahmudah, U., Abdurrahman, U. K., & Pekalongan, W. (2024). *APPLICATION OF COMPLEX NUMBERS TO THE EXPLORATION OF QUADRILATERAL FLAT SHAPES*.

Lund, P., Bryland, E., Engström, D., Gustafsson, L., Mårtensson, R., Borgarskola, M., Sandén, N., & Sjövall, G. (2020). *Applications of Complex Numbers in Geometry*.

Ronshu, O. K. (2013). . *From a certain geometry problem Yutaka Nishiyama* (Vol. 63, Issue 6).

Sagindykov, B. Zh., & Bimurat, Z. (2024). Application of complex number algebra in plane geometry. *Bulletin of Kazakh National Women's Teacher Training University*, *1*, 60–74. https://doi.org/10.52512/2306-5079-2024-97-1-60-74

Sangindykov, Z. , A. B. (2020). MK-685-1. *International Scientific and Practical Conference on Current Issues of Modern Science and Education*, 16–19.

Tristianto, D., Linawati, L., & Susanto, B. (2018). *Penerapan Bilangan Kompleks untuk Menyelesaikan Soal-Soal Geometri Datar*. https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian