

BILANGAN KROMATIK GRACEFUL GANJIL PADA HASIL OPERASI COMB GRAF TANGGA DAN LINTASAN

Ni Nyoman Trisya Inne Krsthina

Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia

e-mail: trisya.inne@undiksha.ac.id

I Gusti Nyoman Yudi Hartawan

Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia

e-mail: yudi.hartawan@undiksha.ac.id

Raphita Yanisari Silalahi

Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia

* e-mail: rsilalahi@undiksha.ac.id

Abstrak

Pada suatu graf G yang terhubung dan sederhana, pewarnaan graceful ganjil didefinisikan sebagai pewarnaan titik $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ untuk beberapa bilangan bulat positif k , yang menginduksi pewarnaan sisi $|c(u) - c(v)|$ menjadi bilangan ganjil. Bilangan terkecil k yang mempertahankan c sebagai pewarnaan graceful ganjil disebut bilangan kromatik graceful ganjil untuk G , dilambangkan dengan $\chi_{og}(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan bilangan kromatik graceful ganjil pada graf hasil operasi *comb* graf tangga dengan graf lintasan yaitu graf $L_n \triangleright P_m$, dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

Kata Kunci: bilangan kromatik graceful ganjil, operasi *comb*, graf tangga, graf lintasan

Abstract

In a simple and connected graph G , a graceful coloring is defined as a vertex coloring $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, for some positive integer k , which induces edge coloring $|c(u) - c(v)|$, be an odd number. The smallest number k which maintains c as an odd-graceful coloring, is called odd-graceful chromatic number for G , denoted by $\chi_{og}(G)$. This research aims to find the odd-graceful chromatic numbers of comb product of ladder and path graphs, denoted by $(L_n \triangleright P_m)$ with $n \geq 1$ and $m \geq 2$.

Keywords: odd-graceful chromatic number, comb product, ladder graph, path graph

PENDAHULUAN

Beberapa tahun terakhir, teknologi informasi telah berkembang pesat (Firdausy dkk., 2024). Perkembangan ini tidak dapat dipisahkan dari berbagai tantangan yang dihadapi manusia sehari-hari. teori graf merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang dapat membantu memecahkan masalah dalam kehidupan (Firdausy dkk., 2024; Rahayuningsih, 2018).

Secara umum, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, di mana V adalah himpunan titik atau simpul yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik (Fitriani & Saputro, 2024; Matsumoto dkk., 2024). Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik,

pewarnaan sisi, dan pewarnaan daerah (Chartrand & Zhang, 2009; Sania dkk., 2020; Zhang, 2016). Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik pada suatu graf sedemikian rupa sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan dua titik yang berwarna sama (Aisyiah dkk., 2018; Rosen, 2019; Umamaheswari & Umavathi, 2019). Pewarnaan sisi adalah mewarnai semua sisi pada suatu graf dengan jumlah warna seminimal mungkin sehingga tidak ada dua sisi yang bersebelahan diberi warna yang sama (Akbari dkk., 2015; Beseri, 2004). Pewarnaan daerah adalah proses pemberian warna pada suatu daerah sedemikian rupa sehingga tidak ada daerah yang bersebelahan yang berwarna sama (Afriantini dkk., 2019; Jofie Zalfa dkk., 2020; Rosen, 2019). Dari semua pewarnaan ini, pewarnaan grafik yang paling

banyak dipelajari dan paling populer adalah pewarnaan titik (Rosen, 2019; Sania dkk., 2020).

Di antara berbagai jenis pewarnaan graf, pewarnaan graceful ganjil merupakan topik baru dan menarik untuk dikaji. Pewarnaan graceful adalah pewarnaan titik di mana setiap pasangan titik memiliki warna yang berbeda (Byers, 2018). Pewarnaan graceful untuk graf G adalah pewarnaan titik $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, di mana k adalah suatu bilangan bulat positif, yang menginduksi pewarnaan sisi $|c(u) - c(v)|$, untuk setiap sisi $uv \in E(G)$. Bilangan k terkecil yang membuat c menjadi pewarnaan graceful untuk G disebut sebagai bilangan kromatik graceful graf G dan dilambangkan dengan $\chi_g(G)$ (Laavanya & Devi, 2023; Nengah Suparta dkk., 2023). Apabila c juga memenuhi sifat tambahan bahwa setiap warna sisi yang diinduksi adalah ganjil, maka pewarnaan c disebut pewarnaan graceful ganjil. Jika pewarnaan graceful ganjil c ada untuk G , maka bilangan k terkecil yang mempertahankan c sebagai pewarnaan graceful ganjil untuk G , disebut sebagai bilangan kromatik graceful ganjil dan dilambangkan dengan $\chi_{og}(G)$ (Nengah Suparta dkk., 2023).

Penelitian terdahulu (Nengah Suparta dkk., 2023) telah mengemukakan hasil bilangan kromatik graceful ganjil dari beberapa graf, seperti graf lintasan, graf lingkaran, dan graf lainnya. Bilangan kromatik graceful ganjil dari lintasan $\chi_{og}(P_2) = 2$, $\chi_{og}(P_3) = 4$, $\chi_{og}(P_5) = 5$.

Meskipun berbagai jenis graf telah dipelajari, masih ada beberapa graf yang bilangan kromatik graceful ganjilnya belum dipelajari, salah satunya adalah hasil operasi *comb* graf tangga dan graf lintasan, yang dinotasikan dengan $L_n \triangleright P_m$. Operasi *comb* $L_n \triangleright P_m$ merupakan graf yang didapatkan dengan mengambil satu duplikasi graf tangga L_n , kemudian buat salinan graf lintasan P_m sebanyak jumlah simpul dari L_n . Selanjutnya, setiap simpul u pada salinan graf P_m ke- i dihubungkan dengan simpul ke- i pada graf L_n .

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik graceful ganjil $\chi_{og}(L_n \triangleright P_m)$ dan mengidentifikasi pola dalam strukturnya. Untuk mencapainya, kami akan menggunakan pendekatan kombinatorial dengan memanfaatkan teorema, lema, dan akibat yang terkait dengan pewarnaan ganjil-graceful. Kami akan menganalisis kasus-kasus dari

$L_n \triangleright P_m$ dan menggeneralisasi pola yang diamati untuk memprediksi bilangan kromatik graceful ganjilnya untuk nilai n dan m .

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan teori graf, khususnya dalam pewarnaan graf. Pemahaman mengenai bilangan kromatik graceful ganjil suatu graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang seperti penjadwalan, jaringan komputer, dan masalah optimasi. Selain itu, penelitian ini dapat membuka jalan baru untuk eksplorasi lebih lanjut dalam graf operasi lainnya yaitu *corona product*, *cartesian product*, dan lainnya.

KAJIAN TEORI

Operasi Comb

Diberikan dua graf terhubung G_1 dan G_2 , serta titik u pada G_2 . Operasi *comb* antara G_1 dan G_2 adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G_1 dan $|G_2|$ kopian dari G_2 , kemudian meletakkan titik u dari setiap salinan G_2 ke- i pada titik ke- i dari G_1 .

(Khoirunnisa dkk., 2021)

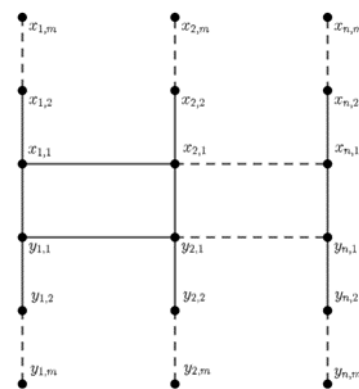
Graf $L_n \triangleright P_m$

Merupakan graf hasil operasi *comb* dari graf tangga L_n dengan graf lintasan P_m . Berikut merupakan titik dan sisi dari graf $L_n \triangleright P_m$, yaitu

$$V(L_n \triangleright P_m) = \{x_{i,j}, y_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$$E(L_n \triangleright P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j}, y_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Bentuk umum dari graf $L_n \triangleright P_m$ terdapat pada Gambar 2.1



Gambar 2. 1. Graf $L_n \triangleright P_m$

Lemma 3.

Jika G adalah graf dengan $\deg(G) = \Delta$, maka $\chi_{og}(G) \geq 2\Delta$.

(Nengah Suparta dkk., 2023)

Corollary 1.

Jika G adalah graf dengan $\deg(G) = \Delta$ dan c merupakan pewarnaan graceful ganjil pada G dengan $\chi_{og}(G) = 2\Delta$. Jika $\deg(u) = \Delta$ untuk beberapa $u \in V$, maka $c(u) = 1$ atau $c(u) = 2\Delta$.

(Nengah Suparta dkk., 2023)

Teorema 2.

P_n adalah lintasan pada n titik dengan $n \geq 2$. Maka, $\chi_{og}(P_n) = 2$ untuk $n = 2$, $\chi_{og}(P_n) = 4$ untuk $n = 3, 4$, dan $\chi_{og}(P_n) = 5$ untuk $n \geq 5$.

(Nengah Suparta dkk., 2023)

METODE

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode kepustakaan, metode deduktif aksiomatik, dan metode pendeteksi pola. Metode kepustakaan, yaitu diawali dengan proses melakukan kajian sumber-sumber sub graf tentang penelitian yang terkait. Mencari referensi dari buku-buku dan jurnal yang berkaitan, menelaah, menganalisis, dan mengidentifikasi agar menemukan ide untuk memecahkan suatu masalah. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada yang dapat diterapkan dalam pewarnaan graceful ganjil pada graf hasil operasi *comb* graf tangga (Rudi dkk., 2023). Metode pendeteksi pola (*pattern recognition*) merupakan metode untuk mencari serta menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik, sehingga diperoleh bilangan kromatik graceful pada graf hasil operasi *comb* graf tangga (Rudi dkk., 2023).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Akan dicari bilangan kromatik graceful ganjil untuk graf $L_n \triangleright P_m$ dengan $m \geq 2$ menggunakan lemma, corollary dan teorema yang sebelumnya telah diteliti.

Teorema 4.1.

Bilangan kromatik graceful ganjil pada graf $L_n \triangleright P_m$, dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ adalah

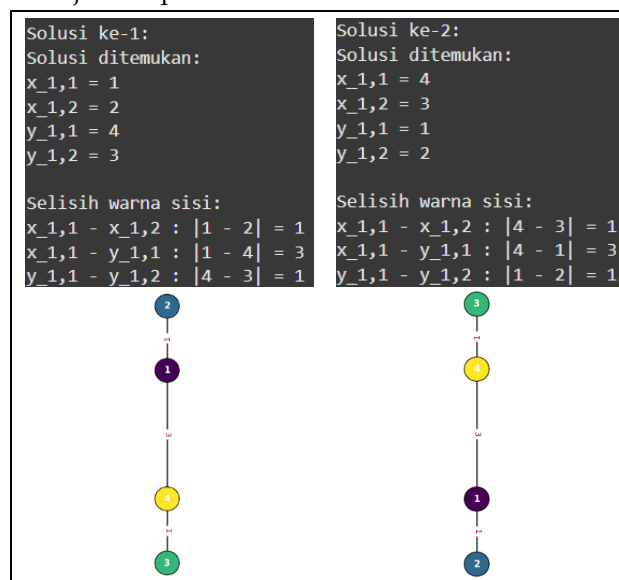
$$\chi_{og}(L_n \triangleright P_m) = \begin{cases} 4, & n = 1, m = 2 \\ 5, & n = 1, m \geq 3 \\ 7, & n = 2, m \geq 2 \\ 8, & n = 3, m \geq 2 \\ 9, & n = 4, m \geq 2 \\ 10, & n = 5, m \geq 2 \\ 11, & n \geq 6, m \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1 ($n = 1, m = 2$)

Untuk $L_1 \triangleright P_2$, jika menggunakan Teorema 2 (Nengah Suparta dkk., 2023), didapatkan graf $L_1 \triangleright P_2$ merupakan bentuk lintasan P_4 , maka $\chi_{og}(P_4) = 4$ dan dengan menggunakan Lemma 3 (Nengah Suparta dkk., 2023), diketahui bahwa $\deg(L_1 \triangleright P_2) = \Delta = 2$, maka bilangan kromatik graceful ganjil $\chi_{og}(L_1 \triangleright P_2) = 4$.

Selain menggunakan pendekatan analitik secara manual seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, pewarnaan graf L_1 juga dapat dilakukan melalui implementasi program komputer. Dengan menggunakan algoritma yang diimplementasikan dengan pemrograman, diperoleh solusi pewarnaan simpul dan visualisasi hasil pewarnaan graf yang ditunjukkan pada Gambar 4.1



Gambar 4. 1 Visualisasi Hasil Pewarnaan $L_1 \triangleright P_2$

Kasus 2 ($n = 1, m \geq 3$)

Untuk $L_1 \triangleright P_3$, jika menggunakan Teorema 2 (Nengah Suparta dkk., 2023), didapatkan graf $L_1 \triangleright P_3$ merupakan bentuk lintasan P_6 , untuk $\chi_{og}(P_n)$ dengan $n \geq 5$ adalah 5. Untuk $L_1 \triangleright P_4$, jika menggunakan Teorema 2 (Nengah Suparta dkk., 2023), didapatkan graf $L_1 \triangleright P_4$ merupakan bentuk lintasan P_8 , untuk $\chi_{og}(P_n)$ dengan $n \geq 5$ adalah 5.

Dari kedua contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa $L_1 \triangleright P_m$ dengan $m \geq 3$ akan membentuk graf lintasan P_{2m} , dan diketahui bahwa menurut Teorema 2 (Nengah Suparta dkk., 2023) $\chi_{og}(P_n)$ dengan $n \geq 5$ adalah 5. Selain itu akan dibuktikan bahwa $\chi_{og}(L_1 \triangleright P_m) \leq 5$. Berikut ini merupakan salah satu pola pewarnaan yang didapatkan, yaitu pewarnaan titik yang *proper* $c: V(L_1 \triangleright P_m) \rightarrow [1,5]$ sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \\ 2, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 3(mod 4)\} \\ 4, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 1(mod 4)\} \\ 5, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 2(mod 4)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$, $y_{i,j} \neq y_{i,j+1}$, dan $x_{i,1} \neq y_{i,1}$. Yang menginduksi pewarnaan sisi $c': E(L_1 \triangleright P_m) \rightarrow [1,3]$ sebagai berikut

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{1,j}x_{1,j+1}, y_{1,j}y_{1,j+1}, j \equiv 1(mod 2)\}, \\ & e \in \{x_{1,1}y_{1,1}\} \\ 3, & e \in \{x_{1,j}x_{1,j+1}, y_{1,j}y_{1,j+1}, j \equiv 0(mod 2)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,j}x_{i,j+1}$ dan $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,j}y_{i,j+1}$. Akibatnya $L_1 \triangleright P_m$, $m \geq 3$ yaitu $\chi_{og}(L_1 \triangleright P_m) = 5$.

Kasus 3 ($n = 2, m \geq 2$):

Akan dibuktikan bahwa $L_2 \triangleright P_m$ dengan $m \geq 2$ memiliki $\chi_{og}(L_2 \triangleright P_m) \neq 6$. Perhatikan bahwa titik $x_{1,1}, x_{2,1}, y_{1,1}$, dan $y_{2,1}$ memiliki derajat maksimum $\Delta = 3$. Misalkan $\chi_{og}(L_2 \triangleright P_m) = 2\Delta = 6$. Berdasarkan Corollary 1 (Nengah Suparta dkk., 2023), harus ada di antara $c(x_{1,1}) = 1 = c(y_{2,1})$ dan $c(y_{1,1}) = 6 = c(x_{2,1})$ atau $c(x_{1,1}) = 6 = c(y_{2,1})$ dan $c(y_{1,1}) = 1 = c(x_{2,1})$. Jika itu terjadi, maka

$$c(x_{1,1}y_{1,1}) = |1 - 6| = 5$$

$$c(x_{1,1}x_{2,1}) = |6 - 1| = 5$$

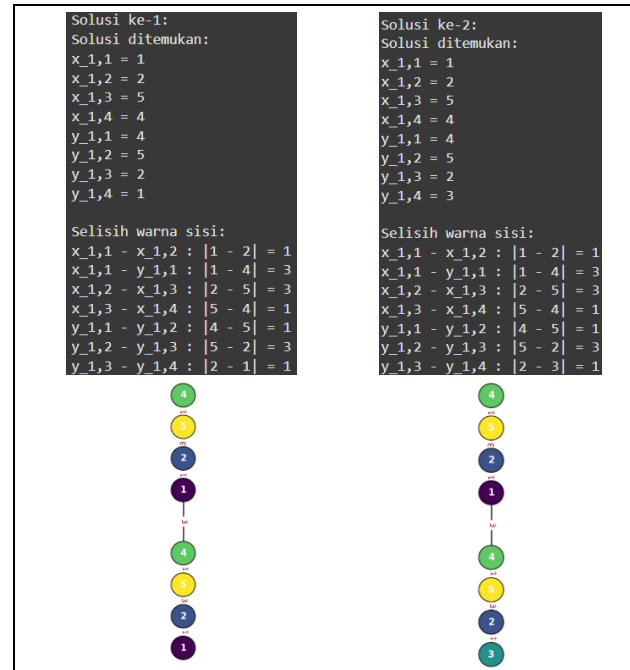
Itu tidak dapat dilakukan karena kedua sisi bertetangga memiliki pewarnaan yang sama. Jika digunakan himpunan warna $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, di mana pasangan warna $[1,7]$ mewakili pewarnaan titik yang menginduksi pewarnaan sisi, maka hasil pewarnaan tersebut dapat disajikan dalam bentuk Tabel 4.1.

Tabel 4. 1. Tabel Hasil Pewarnaan Sisi dengan Himpunan $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Himpunan titik	Titik yang bertetangga						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	-	3	-	5	-
2	1	-	1	-	3	-	5
3	-	1	-	1	-	3	-
4	3	-	1	-	1	-	3
5	-	3	-	1	-	1	-
6	5	-	3	-	1	-	1
7	-	5	-	3	-	1	-

Berdasarkan Tabel 4.1 terdapat warna 1, 2, 6, dan 7 memiliki sisi-sisi yang terinduksi yaitu $\{1,3,5\}$. Dengan demikian, keempat warna ini dapat digunakan untuk mewarnai titik yang memiliki derajat 3. Jika dalam Tabel 4.1 terdapat elemen dengan warna yang sama muncul lebih dari sekali, maka hanya satu kemunculan yang dipilih sebagai pewarnaan sisi.

Selain menggunakan pendekatan analitik secara manual seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, pewarnaan graf L_3 juga dapat dilakukan melalui implementasi program komputer. Dengan menggunakan algoritma yang diimplementasikan dengan pemrograman, diperoleh solusi pewarnaan simpul dan visualisasi hasil pewarnaan graf yang ditunjukkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4. 2 Visualisasi Hasil Pewarnaan $L_2 \triangleright P_2$

Akibatnya $L_2 \triangleright P_m$, $m \geq 2$ yaitu $\chi_{og}(L_2 \triangleright P_m) = 7$.

Kasus 4 ($n = 3, m \geq 2$)

Akan dibuktikan bahwa $L_3 \triangleright P_m$ dengan $m \geq 2$ memiliki $\chi_{og}(L_3 \triangleright P_m) = 8$. Dengan menggunakan Lemma 3 (Nengah Suparta dkk., 2023), diketahui bahwa $\deg(L_3 \triangleright P_m) = \Delta = 4$, maka $\chi_{og}(L_3 \triangleright P_m) = 2\Delta = 8$. Selain itu akan dibuktikan bahwa $\chi_{og}(L_3 \triangleright P_m) \leq 8$. Berikut ini merupakan salah satu pola pewarnaan yang didapatkan, yaitu pewarnaan titik yang *proper* $c: V(L_3 \triangleright P_m) \rightarrow [1, 8]$ didefinisikan sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 0(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{2,j}, \\ & j \equiv 1(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 0(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 0(\text{mod } 4)\} \\ 2, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{2,j}, \\ & j \equiv 0(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{3,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\} \\ 3, & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{3,j}, \\ & j \equiv 1(\text{mod } 4)\} \\ 4, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{2,j}, \\ & j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{1,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 0 \\ & (\text{mod } 4)\} \\ 5, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{2,j}, \\ & j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 3 \\ & (\text{mod } 4)\} \\ 6, & v \in \{x_{3,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{1,j}, \\ & j \equiv 0(\text{mod } 4)\} \\ 7, & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\} \\ 8, & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\} \end{cases}$$

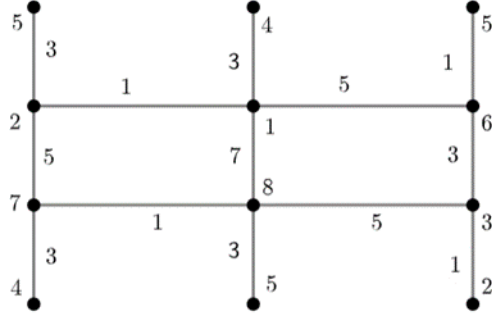
Jadi, warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1} \neq x_{i+1,1}$, $x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$, $y_{i,1} \neq y_{i+1,1}$, $y_{i,j} \neq y_{i,j+1}$, dan $x_{i,1} \neq y_{i,1}$

Yang menginduksi pewarnaan sisi $c': E(L_3 \triangleright P_m) \rightarrow [1, 7]$ sebagai berikut

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{3,j}x_{3,1+j}, y_{3,j}y_{3,1+j}, j \equiv 1 \\ & (\text{mod } 2)\}, e \in \{x_{1,j}x_{1,j+1}, x_{2,j}x_{2,j+1}, \\ & y_{1,j}y_{1,j+1}, y_{2,j}y_{2,j+1}, j \equiv 0(\text{mod } 2)\} \\ & e \in \{x_{1,1}x_{2,1}, y_{1,1}y_{2,1}\} \\ 3, & e \in \{x_{3,j}x_{3,1+j}, y_{3,j}y_{3,1+j}, j \equiv 0 \\ & (\text{mod } 2)\}, e \in \{x_{1,j}x_{1,j+1}, x_{2,j}x_{2,j+1}, \\ & y_{1,j}y_{1,j+1}, y_{2,j}y_{2,j+1}, j \equiv 1(\text{mod } 2)\} \\ & e \in \{x_{3,1}y_{3,1}\} \\ 5, & e \in \{x_{1,1}y_{1,1}, x_{2,1}x_{3,1}, y_{2,1}y_{3,1}\} \\ 7, & e \in \{x_{2,1}y_{2,1}\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,j}x_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,j}y_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,1}x_{i+1,1}$, dan $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,1}y_{i+1,1}$. Akibatnya

$L_3 \triangleright P_m$, $m \geq 2$ yaitu $\chi_{og}(L_3 \triangleright P_m) = 8$. Contoh pewarnaan graceful ganjil dari $L_3 \triangleright P_2$ ditunjukkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4. 3 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_3 \triangleright P_2$

Kasus 5 ($n = 4, m \geq 2$)

Akan dibuktikan bahwa $L_4 \triangleright P_m$ dengan $m \geq 2$ memiliki $\chi_{og}(L_4 \triangleright P_m) \neq 8$. Perhatikan bahwa titik $x_{2,1}, x_{3,1}, y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$ memiliki derajat maksimum $\Delta = 4$. Misalkan $\chi_{og}(L_4 \triangleright P_m) = 2\Delta = 8$. Berdasarkan Corollary 1 (Nengah Suparta dkk., 2023), harus ada di antara $c(x_{2,1}) = 8 = c(y_{3,1})$ dan $c(y_{2,1}) = 1 = c(x_{3,1})$ atau $c(x_{2,1}) = 1 = c(y_{3,1})$ dan $c(y_{2,1}) = 8 = c(x_{3,1})$. Jika itu terjadi, maka

$$c(x_{2,1}y_{2,1}) = |8 - 1| = 7$$

$$c(x_{2,1}x_{3,1}) = |1 - 8| = 7$$

itu tidak dapat dilakukan karena kedua sisi bertetangga memiliki pewarnaan yang sama. Berikut ini merupakan salah satu pola pewarnaan yang didapatkan, yaitu pewarnaan titik yang *proper* $c: V(L_4 \triangleright P_m) \rightarrow [1, 9]$ didefinisikan sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 0(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{2,j}, \\ & j \equiv 1(\text{mod } 4)\} \\ 2, & v \in \{x_{3,j}, j \equiv 0(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{1,j}, j \equiv 3 \\ & (\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\} \\ 3, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{1,j}, j \equiv 0 \\ & (\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 3(\text{mod } 4)\} \\ 4, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{2,j}, j \equiv 3 \\ & (\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 1(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{4,j}, \\ & j \equiv (\text{mod } 4)\} \\ 5, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 3 \\ & (\text{mod } 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 2(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{2,j}, \\ & j \equiv 3(\text{mod } 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 2 \\ & (\text{mod } 4)\} \end{cases}$$

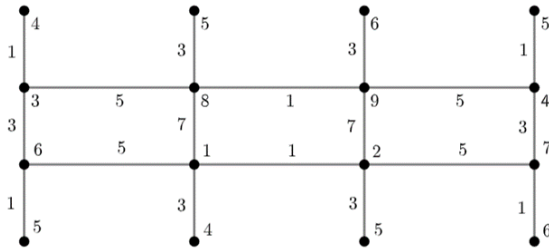
$$c(v) = \begin{cases} 6, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{y_{1,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{3,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 2(mod 4)\} \\ 7, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 1(mod 4)\} \\ 8, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{y_{2,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \\ 9, & v \in \{x_{3,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1} \neq x_{i+1,1}$, $x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$, $y_{i,1} \neq y_{i+1,1}$, $y_{i,j} \neq y_{i,j+1}$, dan $x_{i,1} \neq y_{i,1}$

Yang menginduksi pewarnaan sisi $c': E(L_4 \triangleright P_m) \rightarrow [1,7]$ sebagai berikut

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{i,1}y_{i,1}, 1 \leq i \leq 4\}, e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq 4, j \equiv 0(mod 2)\} \\ 3, & e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq 4, j \equiv 1(mod 2)\} \\ 5, & e \in \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, i = 1,3\} \\ 7, & e \in \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, i = 2\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,j}x_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,j}y_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i+1,1}$, dan $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i+1,1}$. Akibatnya $L_4 \triangleright P_m$, $m \geq 2$ yaitu $\chi_{og}(L_4 \triangleright P_m) = 9$. Contoh pewarnaan graceful ganjil dari $L_4 \triangleright P_2$ ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4. 4 Pewarnaan Graceful Ganjil Graf $L_4 \triangleright P_2$

Kasus 6 ($n = 5, m \geq 2$)

Akan dibuktikan bahwa $L_5 \triangleright P_m$ dengan $m \geq 2$ memiliki $\chi_{og}(L_5 \triangleright P_m) \neq 9$. Perhatikan bahwa titik $x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}, y_{2,1}, y_{3,1}$ dan $y_{4,1}$ memiliki derajat maksimum $\Delta = 4$. Misalkan $\chi_{og}(L_5 \triangleright P_m) = 2\Delta = 8$. Berdasarkan Corollary 1 (Nengah Suparta dkk., 2023), harus ada di antara $c(x_{2,1}) = c(y_{3,1}) = c(x_{4,1}) = 1$ dan $c(y_{2,1}) = c(x_{3,1}) = c(y_{4,1}) = 8$ atau $c(x_{2,1}) = c(y_{3,1}) = c(x_{4,1}) = 8$ dan $c(y_{2,1}) = c(x_{3,1}) = c(y_{4,1}) = 1$. Jika itu terjadi, maka

$$c(x_{2,1}y_{2,1}) = |8 - 1| = 7$$

$$c(x_{2,1}x_{3,1}) = |1 - 8| = 7$$

itu tidak dapat dilakukan karena kedua sisi bertetangga memiliki pewarnaan yang sama. Berikut ini merupakan salah satu pola pewarnaan yang didapatkan, yaitu pewarnaan titik yang *proper* $c: V(L_5 \triangleright P_m) \rightarrow [1,10]$ didefinisikan sebagai berikut.

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{y_{3,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{5,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{x_{1,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \\ 2, & v \in \{x_{4,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{y_{5,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 2(mod 4)\} \\ 3, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{y_{2,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \\ 4, & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{x_{5,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{3,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 3(mod 4)\} \\ 5, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{y_{1,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{y_{2,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{3,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{y_{5,j}, j \equiv 1(mod 4)\} \\ 6, & v \in \{x_{2,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{x_{5,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{2,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, v \in \{x_{1,j}, j \equiv 3(mod 4)\} \\ 7, & v \in \{y_{1,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{3,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{x_{4,j}, j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{4,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{y_{5,j}, j \equiv 3(mod 4)\} \\ 8, & v \in \{y_{4,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{y_{2,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{y_{3,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \\ 9, & v \in \{x_{4,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{x_{5,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{1,j}, j \equiv 2(mod 4)\} \\ 10, & v \in \{x_{3,j}, j \equiv 1(mod 4)\}, v \in \{y_{5,j}, j \equiv 2(mod 4)\}, v \in \{y_{4,j}, j \equiv 0(mod 4)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1} \neq x_{i+1,1}$, $x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$, $y_{i,1} \neq y_{i+1,1}$, $y_{i,j} \neq y_{i,j+1}$, dan $x_{i,1} \neq y_{i,1}$.

Yang menginduksi pewarnaan sisi $c': E(L_5 \triangleright P_m) \rightarrow [1,9]$ sebagai berikut

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{1,1}x_{2,1}, x_{3,1}x_{4,1}, y_{1,1}y_{2,1}, y_{3,1}y_{4,1}, \\ & x_{5,1}y_{5,1}\}, e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, \\ & 2 \leq i \leq 3, j \equiv 0(mod 2)\} \\ 3, & e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq 3, \\ & j \equiv 1(mod 2)\}, e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, \\ & y_{i,j}y_{i,j+1}, i = 1,4,5, j \equiv 0(mod 2)\}, \\ & e \in \{x_{4,1}x_{5,1}, y_{4,1}y_{5,1}\} \\ 5, & e \in \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, i = 1,4,5, \\ & j \equiv 1(mod 2)\}, e \in \{x_{1,1}y_{1,1}, \\ & x_{2,1}y_{2,1}\} \\ 7, & e \in \{x_{2,1}x_{3,1}, y_{2,1}y_{3,1}, x_{4,1}y_{4,1}\} \\ 9, & e \in \{x_{3,1}y_{3,1}\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,j}x_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,j}y_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,1}x_{i+1,1}$, dan $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,1}y_{i+1,1}$. Akibatnya $L_5 \triangleright P_m, m \geq 2$ yaitu $\chi_{og}(L_5 \triangleright P_m) = 10$.

Kasus 7 ($n \geq 6, m \geq 2$)

Akan dibuktikan bahwa $L_n \triangleright P_m$ dengan $n \geq 6$ dan $m \geq 2$ memiliki $\chi_{og}(L_n \triangleright P_m) \neq 10$. Perhatikan bahwa titik $x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,1}, y_{2,1}, y_{3,1}, y_{4,1}, y_{5,1}$, dan $y_{6,1}$ memiliki derajat maksimum $\Delta = 4$. Misalkan $\chi_{og}(L_n \triangleright P_m) = 2\Delta = 8$. Berdasarkan *Corollary 1* (Nengah Suparta dkk., 2023), harus ada di antara $c(x_{2,1}) = c(y_{3,1}) = c(x_{4,1}) = c(y_{5,1}) = 1$ dan $c(y_{2,1}) = c(x_{3,1}) = c(y_{4,1}) = c(x_{5,1}) = 8$ atau $c(x_{2,1}) = c(y_{3,1}) = c(x_{4,1}) = c(y_{5,1}) = 8$ dan $c(y_{2,1}) = c(y_{2,1}) = c(x_{3,1}) = c(y_{4,1}) = c(x_{5,1}) = 1$. Jika itu terjadi, maka

$$c(x_{2,1}y_{2,1}) = |8 - 1| = 7$$

$$c(x_{2,1}x_{3,1}) = |1 - 8| = 7$$

Itu tidak dapat dilakukan karena kedua sisi bertetangga memiliki pewarnaan yang sama. Selain itu akan dibuktikan bahwa $\chi_{og}(L_n \triangleright P_m) \leq 11$. Berikut ini merupakan salah satu pola pewarnaan yang didapatkan, yaitu pewarnaan titik yang *proper* $c: V(L_n \triangleright P_m) \rightarrow [1,11]$ sebagai berikut

$$c(v) = \begin{cases} 1, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\} \\ 2, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ 3, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\} \\ 4, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\} \\ 5, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 0(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ 6, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\} \\ 7, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 2(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\} \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\} \\ 8, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 3(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 2(mod 4)\} \\ 9, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 1(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ 10, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\} \\ 11, & v \in \{x_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 0(mod 4)\}, \\ & v \in \{y_{i,j}, i \equiv 3(mod 4), j \equiv 1(mod 4)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap titik adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1} \neq x_{i+1,1}$, $x_{i,j} \neq x_{i,j+1}$, $y_{i,1} \neq y_{i+1,1}$, $y_{i,j} \neq y_{i,j+1}$, dan $x_{i,1} \neq y_{i,1}$.

Yang menginduksi pewarnaan sisi $c': E(L_n \triangleright P_m) \rightarrow [1,9]$ sebagai berikut

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & e \in \{x_{i,1}y_{i,1}, 1 \leq i \leq n\}, e \in \{x_{i,1}x_{i,j+1}, \\ & y_{i,1}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n, j \equiv 0(mod 2)\} \\ 3, & e \in \{x_{i,1}x_{i,j+1}, y_{i,1}y_{i,j+1}, 1 \leq i \leq n, j \equiv 1 \\ & (mod 2)\} \\ 5, & e \in \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, i \equiv 1(mod 4)\} \\ 7, & e \in \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, i \equiv 2(mod 4)\} \\ 9, & e \in \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, i \equiv 3(mod 4)\} \end{cases}$$

Jadi, warna setiap sisi adalah *proper*, hal ini dapat dilihat pada $x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,j}x_{i,j+1}$, $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,j}y_{i,j+1}$,

$x_{i,1}y_{i,1} \neq x_{i,1}x_{i+1,1}$, dan $x_{i,1}y_{i,1} \neq y_{i,1}y_{i+1,1}$. Akibatnya $L_n \supset P_m$, $n \geq 6, m \geq 2$ yaitu $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 11$.

PENUTUP

SIMPULAN

Dalam penelitian ini, kami telah menyelidiki pewarnaan graceful ganjil dari hasil operasi *comb* graf tangga dan graf lintasan. Dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik graceful ganjil untuk graf $L_n \supset P_m$ dengan $m \geq 2$, yaitu $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 4$ untuk $n = 1, m = 2$, $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 5$ untuk $n = 1, m \geq 3$, $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 7$ untuk $n = 2, m \geq 2$, $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 8$ untuk $n = 3, m \geq 2$, $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 9$ untuk $n = 4, m \geq 2$, $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 10$ untuk $n = 5, m \geq 2$, dan $\chi_{og}(L_n \supset P_m) = 11$ untuk $n \geq 6, m \geq 2$.

SARAN

Penelitian ini terbatas pada kasus-kasus graf hasil operasi $L_n \supset P_m$. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya dapat diarahkan untuk mengeksplorasi operasi graf yang lebih umum, serta mengembangkan pendekatan pemrograman yang lebih efektif dalam menghitung bilangan kromatik graceful ganjil. Studi lanjutan juga disarankan untuk pewarnaan graceful ganjil pada operasi graf lainnya, seperti *corona product*, *cartesian product*, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Afriantini, Helmi, & Fran, F. (2019). *Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah pada Graf dan Penerapannya*. Bimaster Ilmiah. Stat. dan Terapannya (Bimaster), 8(4), 773-782.
- Aisyiah, P. W., Narwen, & Zulakamal. (2018). *Menentukan Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Berlapis $C_n, 2n, 2n$* . Jurnal Matematika UNAND, 7(3), 136-143.
- Akbari, S., Iradmusa, M. N., & Jamaali, M. (2015). *A Note on Edge Coloring of Graphs*. Ars Combinatoria, 119, 289-292.
- Beseri, T. (2004). *Edge Coloring of a Graph*. Izmir Institute of Technology.
- Byers, A. D. (2018). *Graceful Colorings and Connection in Graphs*. Western Michigan University.
- Chartrand, G., & Zhang, P. (2009). *Chromatic Graph Theory*. CRC Press.
- Firdausy, A. N., Dewi, P. K., Putu, S. I. G., & Silalahi, R. Y. (2024). *Bilangan Kromatik Graceful untuk Graf $(D_m, 2 \times P_n)$* . Jurnal Ilmiah Matematika, 12(3), 437-446.
- Fitriani, D., & Saputro, S. W. (2024). *The Local Metric Dimension of Amalgamation of Graphs*. Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 12(1), 125-146. <https://doi.org/10.5614/ejgta.2024.12.1.11>
- Jofie Zalfa, M., Bahri, S., & Iqbal Baqi, A. (2020). *Aplikasi Algoritma Greedy untuk Pewarnaan Wilayah pada Peta Kota Padang Berbasis Teorema Empat Warna*. Jurnal Matematika UNAND, 9(4), 294-301.
- Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., & Albirri, E. R. (2021). *On Graceful Chromatic Number of Comb Product of Ladder Graph*. Journal of Physics: Conference Series, 1836, 1-8. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1836/1/012027>
- Laavanya, D., & Devi, Y. s. (2023). *A Structural Approach To The Graceful Coloring of a Subclass of Trees*. Heliyon, 9(9). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e19563>
- Matsumoto, N., Noguchi, K., & Yashima, T. (2024). *Cubic Graphs Having Only K-Cycles in Each 2-Factor*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 44(1), 281. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2447>
- Nengah Suparta, I., Lin, Y., Hasni, R., & Nyoman Budayana, I. (2023). *On Odd-Graceful Coloring of Graphs*. Commun. Comb. Optim. c 2023 Azarbaijan Shahid Madani University Communications in Combinatorics and Optimization, 1-20. <https://doi.org/10.22049/cco.2023.28736.1692>
- Rahayuningsih, S. (2018). *Teori Graph dan Penerapannya*. Universitas Wisnuwardhana Press Malang (Unidha Press).
- Rosen, K. H. . (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8 ed.). McGraw-Hill Education.
- Rudi, M., Wahab, A. A., & Waluyo, E. (2023). *Pewarnaan Graceful pada Graf Hasil Operasi Comb Graf Siklus dan Graf Star*. Kadikma, 14(1), 9-19. <https://doi.org/10.19184/kdma.v14i1.38552>
- Sania, N. A., Dafik, D., & Fatahillah, A. (2020). *Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Unicyclic*. Cgant Journal of Mathematics and Applications, 1(2), 27-38. <https://doi.org/10.25037/cgantjma.v1i2.39>
- Umamaheswari, K., & Umavathi, R. (2019). *Vertex Coloring in Graph Theory*. International Journal of Scientific Research and Reviews, 8(1), 1053-1058.
- Zhang, P. (2016). *A Kaleidoscopic View of Graph Colorings*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-30518-9>