MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 13 *No* 02
Tahun 2025

PENYELESAIAN PERSOALAN NILAI BATAS PADA PERSAMAAN PEGAS-MASSA TEREDAM MENGGUNAKAN METODE NUMERIK: SHOOTING, FDM DAN FEM

Josua Sianturi
Program Studi Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan
e-mail: josuasianturi560@gmail.com

Risna Tutiarna Simorangkir*
Program Studi Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan
e-mail: risnasimorangkir1904@gmail.com

Mufida Azza Iskandar Lubis
Program Studi Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan
e-mail: mufidaazza80@gmail.com

Yulita Molliq Rangkuti
Program Studi Ilmu Komputer, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan
e-mail: molliq22rangkuti@gmail.com

Abstrak

Persamaan pegas-massa teredam merupakan model matematis yang penting dalam analisis dinamika sistem fisis, khususnya melibatkan getaran dan gaya luar. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persoalan nilai batas dari persamaan diferensial orde dua yang menggambarkan sistem pegas-massa teredam dengan menggunakan tiga pendekatan numerik, yaitu metode shooting dengan RK2, metode beda hingga (FDM) dan metode elemen hingga (FEM). Model yang digunakan melibatkan gaya luar berupa fungsi sinus dengan kondisi batas yang diketahui di kedua ujung interval. Setiap metode numerik diimplementasikan menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica dan hasil numeriknya dibandingkan dengan solusi referensi yang diperoleh dari fungsi NDSolve. Evaluasi dilakukan dengan menghitung galat absolut dan galat maksimum serta menampilkan grafik perbandingan antar metode. Hasil menunjukkan bahwa ketiga metode mampu menghasilkan solusi yang mendekati solusi eksak, dimana metode FEM memberikan akurasi paling tinggi, metode FDM menawarkan kesederhanaan dalam implementasi dan metode shooting memberikan solusi yang cukup baik dengan pendekatan iteratif. Penelitian ini menunjukkan bahwa pemilihan metode numerik yang tepat sangat bergantung pada kebutuhan akurasi, kompleksitas masalah dan efisiensi komputasi yang diinginkan.
Kata Kunci: Pegas-massa Teredam, Nilai Batas, Shooting Method, FDM, FEM.

Abstract

The damped spring-mass equation is an important mathematical model in analyzing the dynamics of physical systems, especially involving vibrations and external forces. This study aims to solve the boundary value problem of the second-order differential equation describing the damped spring-mass system using three numerical approaches, namely the shooting method with RK2, the finite difference method (FDM) and the finite element method (FEM). The model used involves an external force in the form of a sine function with known boundary conditions at both ends of the interval. Each numerical method is implemented using Wolfram Mathematica software and the numerical results are compared with the reference solution obtained from the NDSolve function. The evaluation is done by calculating the absolute error and maximum error and displaying a comparison graph between the methods. The results show that the three methods are able to produce solutions that are close to the exact solution, where the FEM method provides the highest accuracy, the FDM method offers simplicity in implementation and the shooting method provides a fairly good solution with an iterative approach. This study shows that the selection of an appropriate numerical method is highly dependent on the accuracy requirement, the complexity of the problem and the desired computational efficiency.
Keywords: Damped Spring-mass, Boundary Value Problem, Shooting Method, FDM, FEM

PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial adalah ilmu matematika yang dapat menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari, misalnya sistem kerja pada pegas, permodelan penyakit, perambatan panas pada batang logam dan permodelan gelombang air laut (Brika Enkekes & Mardianto, 2022). Persamaan diferensial (diferentian equetion) yang digunakan dapat berupa persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial, orde satu atau orde dua, linear atau non-linear (Mahmudah et al., 2017).

Sistem pegas-massa teredam adalah salah satu model fundamental dalam mekanika dan rekayasa yang digunakan untuk merepresentasikan fenomena getaran dan gerak osilasi teredam paada berbagai sistem fisik. Menurut Halliday dalam bukunya Fisika Dasar (2010), gerak osilasi merupakan gerak secara bolak-balik suatu benda pada lintasan yang sama dalam selang waktu tertentu (Rahmatullah et al., 2020).

Masalah nilai batas sering dijumpai dalam fisika teknik dan sistem dinamik seperti sistem pegas-massa teredam. Persamaan pegas massa teredam dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial biasa (Huzaimah, 2016). Persamaan diferensial biasa (PBD) berperan penting dalam pemodelan berbagai fenomena fisis, teknik dan ilmu terapan lainnya. Namun tidak semua persamaan diferensial bisa memiliki solusi analitik yang dapat diperoleh secara eksplisit. Dalam beberapa kasus, solusi eksak sulit atau bahkan tidak mungkin didapatkan, sehingga pendekatan numerik menjadi pilihan utama untuk memperoleh solusi berupa nilai aproksimasi atau taksiran.

Permasalahan sadalam penelitian ini tereletak pada bagaimana mendapatkan solusi numerik yang mendekati solusi eksak dengan tingkaat akurasi yang tinggi, menggunakan berbagai metode pendekatan yang berbeda. Ada beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah syarat batas atau Boundary Value Problems (BVP) pada persamaan diferensial biasa. Metode yang sering digunakan adalah Shooting Method, Finite Difference Method (FDM) atau metode beda hingga dan Finite Elemen Method (FEM) atau metode elemen hingga. Ketiga metode numerik ini sangat populer dan banyak digunakan dalam menyelesaikan PDB.

Penelitain ini bertujuan untuk mengevaluasi keakuratan dari ketiga metode numerik yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan sistem pegas-massa teredam menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica. Perangkat lunak ini memanfaatkan bahasa pemrograman yang mudah dipahami untuk memberikan kemudahan dalam mempelajarai matematika mulai dari grafik, suara, tampilan 3D hingga menyelesaikan soal kalkulus (Kustiawati et al., 2022).

KAJIAN TEORI

SISTEM PEGAS-MASSA REDAM

Getaran adalah gerakan osilasi suatu benda yang mempunyai massa dan kekakuan terhadap posisi keseimbangannya. Terdapat dua jenis getaran yaitu getaran paksa dan getaran bebas serta getaran teredam dan getaran tak teredam. Untuk meredam getaran tersebut serta mengatasi dampak buruk akibat getaran dapat dilakukan dengan menambahkan peredam getaran, salah satunya peredam dinamik atau dynamic vibration absorber (Pasmadi et al., 2020).

Sistem pegas-massa teredam adalah model fisis yang menggambarkan gerak osilasi suatu massa yang terhubung dengan pegas peredam. Persamaan diferensial orde dua yang menggambarkan sistem ini melibatkan parameter massa, konstanta pegas, dan koefisien redaman disertai dengan gaya eksternal sebagai pemicu gerak. Persamaan yang digunakan merupakan model fisika dari sistem pegas-massa teredam dan gerak dari sistem ini diperoleh berdasarkan hukum kedua Newton, dapat ditulis sebagai berikut:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F(t)$$

Dengan,

$m = massa\ (kg)$

$c = koefisien\ redaman (Ns/m)$

$k = konstanta\ pegas\ (N/m)$

$y(t) = perpindahan\ terhadap\ waktu\ (m)$

$F(t) = gaya\ eksternal\ yang\ bekerja\ pada\ sistem$

Redaman mempengaruhi perilaku pada sistem, apakah osilasi berlangsung terus, berkurang secara bertahap, atau berhenti cepat. Dalam konteks nilai batas, solusi dari $y(t)$ dicari dengan kondisi diketahui pada dua titik waktu, misal $y(0)$ dan $y(1)$.

SHOOTING METHOD

Metode ini berkerja dengan merubah PDB orde dua menjadi suatu PDB orde satu dengan nilai awal yang dapat diselesaikan dengan metode penyelesaian masalah ni lai awal. Langkah selanjutnya menentukan nilai awal untuk dua persamaan diferensial tersebut dengan menebak/shooting suatu nilai. Menggunakan nilai tebakan tersebut diharapkan nilai batas baru yang menedekati nilai batas sebenarnya. Untuk mendapatkan nilai batas baru dpata digunakan metode Runge-Kutta (Mahmudah et al., 2017). Proses iteratif dilakukan hingga hasil pada titik akhir mendekati nilai batas yang diinginkan. Metode ini cocok untuk persoalan nilai batas orde dua tetapi dapat menjadi tidak stabil untuk kasus nonlinear atau panjang domain yang besar.

FINITE DIFFERENCE METHOD

Finite Difference Method (FDM) atau metode beda hingga menggunakan pendekatan diskrit untuk menggantikan turunan-turunan dalam bentuk selisih antara nilai-nilai fungsi di titik-titik diskrit (grid). Metode beda hingga dipakai untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik ordinary differential equations (ODE) maupun Partial Differential Equations (PDE) dengan cara mendiskritisasi variabel kontinu(Tsuwaibatul Aslamiyah Lubis, 2025). Metode ini sederhana dan cukup mudah diimplementasikan serta cepat dan efisien untuk masalah satu dimensi. Namun FDM tidak cocok untuk masalah dimensi tinggi atau dengan kondisi batas kompleks.

FINITE ELEMENT METHOD

Metode ini disebut juga metode elemen hingga. Metode ini dikenalkan sebagai pendekatan empiris yang diterapkan untuk mendekati kondisi nyata atau aktual. Keunggulan metode ini terletak pada fleksibilitasnya dalam menangani geometri yang kompleks dan cocok untuk masalah multidimensi serta variasi kondisi batas sehingga menjadikannya fondasi utama untuk inovasi dalam desain produk dan pengembangan material di berbagai industri teknologi modren (Hoyali et al., 2024). Metode elemen hingga menyelesaikan persoalan nilai batas dengan cara membagi domainnya menjadi elemen-elemen kecil dan membentuk sistem persamaan berdasarkan fungsi basis dan prinsip variasional. Prinsip metode ini dimulai dari formulasi lemah dari persamaan diferensial.

GALAT

Galat atau biasa disebut error atau dalam bahasa keseharian adalah kesalahan dapat didefenisikan sebagai selisih dari nilai atau hasil yang kita harapkan terjadi di lapangan. Galat berfungsi untuk menunjukkan efisiensi dari satu jenis percobaan atau penelitian ke penelitian yang lain. Semakin kecil nilai galatnya, maka semakin teliti solusi numerik yang diperoleh(Pandia & Sitepu, 2021).

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan persoalan nilai batas (Boundary Value Problem) pada persamaan pegas-massa teredam. Dalam penyelesaiannya digunakan beberapa metode numerik antara lain, metode shooting dengan Runge-Kutta Orde Dua Termodifikasi, metode beda hingga (FDM) dan metode elemen hingga (FEM). Analisis dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak Wolfram Mathematica dengan menggunakan kode pemrograman untuk menghasilkan perhitungan dan visualisasinya.

Dalam penelitian ini diperoleh persamaan sistem pegas-massa teredam:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F(t) \quad (1)$$

Dengan,

$m = 1\ kg$

$c = 0,4\ Ns/m$

$k = 4\ N/m$

$F(t) = sin\ (\pi t)$

Dengan nilai diatas diperoleh model matematis:

$$y''(t) + 0,4y'(t) + 4y(t) = sin(\pi t) \quad (2)$$

Dengan batas nilai, $t \in [0,1]$ $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

Pada metode shooting, masalah nilai batas diubah menjadi masalah nilai awal. Nilai awal turunan pertama $y'(0)$ ditebak dan disesuaikan secara iteratif dengan menggunakan metode secant agar solusi memenuhi kondisi batas di $t = 1$. Untuk menyelesaikan sistem nilai awal, digunakan metode Runge-Kutta orde 2 (RK2) yang kemudian dibandingkan dengan solusi referensi yang diperoleh dari fungsi NDSolve pada perangkat lunak Wolfrom Mathematica dan dihitung juga galat absolutnya.

Metode beda hingga (FDM), domain [0,1] dibagi menjadi 100 titik dengan langkah $h = 0.01$. Turunan pertama dan kedua didekati menggunakan skema beda hingga pusat. Persamaan diferensial yang sudah didiskretisasi menghasilkan sistem persamaan linear berbentuk matriks tridiagonal dan persamaan ini diselesaikan dengan metode LinearSolve. Hasilnya kemudian dibandingkan dengan solusi NDSolve untuk memperoleh nilai galat absolut pada setiap titik.

Sementara itu, cara kerja metode elemen hingga (FEM) dengan membagi domain kedalam elemen-elemen linier. Formulasi weak form dari persamaan diferensial disusun dan digunakan untuk menghitung matriks kekakuan dan redaman dari masing-masing elemen. Setelah sistem global dibentuk, kondisi batas diterapkan dan sistem linear diselesaikan guna memperoleh solusi numeriknya. Solusi FEM juga dibandingkan dengan solusi NDSolve dan galat absolut dihitung.

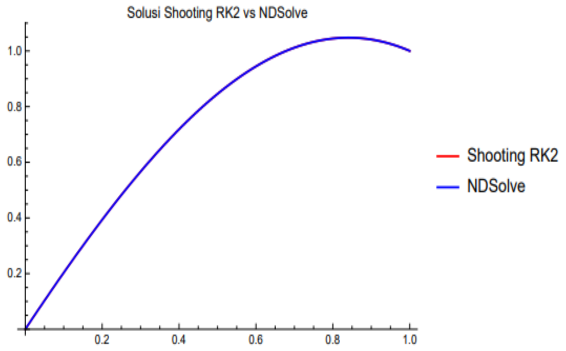
Setiap metode dianalisis berdasarkan akurasi, stabilitas numerik serta efisiensi komputasi. Hasil solusi ditampilkan dalam bentuk visualisasi gambar berbentuk grafik dan tabel yang menunjukkan perbandingan antara hasil pendekatan numerik dan solusi referensi, serta tingkat galat dari masing-masing metode. Evaluasi ini bertujuan untuk menentukan metode yang paling sesuai dalam menyelesaikan persoalan nilai batas untuk sistem pegas-massa teredam.

HASIL DAN PEMBAHASAN

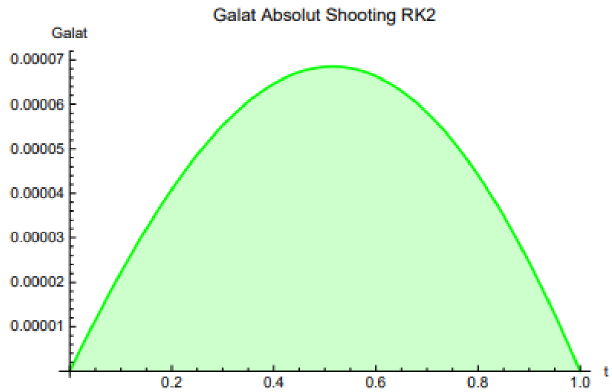
Penelitian ini mengimplementasikan tiga metode numerik yakni, Metode Shooting, Finite Difference Method dan Finite Element Method untuk menyelesaikan persoalan nilai batas pada sistem pegas-massa teredam. Evaluasi hasil dilakukan dengan membandingkan solusi numerik dari masing-masing metode terhadap solusi referensi dari NDSolve di Wolfram Mathematica. Fokus utama evaluasi ini meliputi keseuaian bentuk grafik solusi, glat absolut serta galat maksimum yang terjadi antara interval waktu $t \in [0,1]$.

METODE SHOOTING

Metode shooting mengubah masalah nilai batas menjadi masalah nilai awal. Metode shooting dengan integrasi Runge-Kutta orde 2 menghasilkan solusi yang cukup dekat dengan referensi. Nilai galat maksimum tercatat sebesar $6{,}848 \times 10^{-5}$. Secara visual, grafik solusi menunjukkan kesesuaian yang baik dengan solusi yang diberikan oleh fungsi NDSolve. Meskipun ditemukan sedikit deviasi disekitar pertengahan interval waktu. Hal ini dapat disebabkan oleh sensivitas metode terhadap tebakan awal nilai turunan dengan ketergantungan terhadap iterasi.



Gambar 1. Grafik Perbandingan solusi Shooting RK2 dan NDSolve

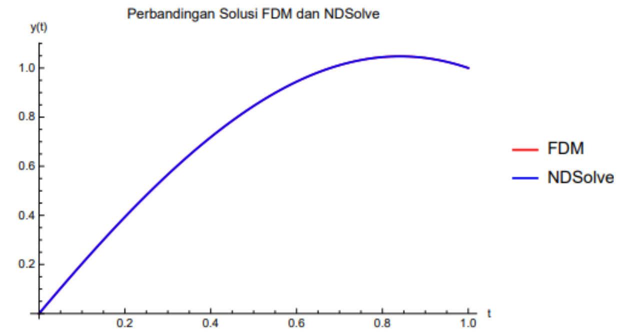


Gambar 2. Grafik galat absolut metode Shooting sepanjang interval

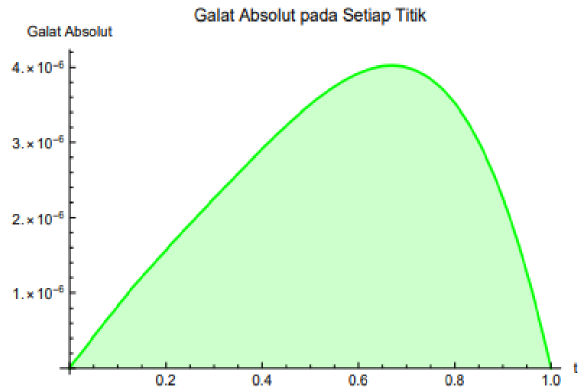
Dari grafik dapat terlihat galat maksimum metode Shooting RK2 = 0.0000684845.

FINITE DIFFERENCE METHOD

Metode ini menunjukkan hasil yang sangat presisi, dengan galat maksimum sebesar $4{,}02 \times 10^{-6}$, lebih kecil dibandingkan metode sebelumnya yaitu metode shooting. Ini berarti pendekatan diskret melalui skema beda hingga mampu menangkap dinamika sistem secara lebih stabil. Grafik solusi numerik hampir identik dengan solusi referensi dan galat tersebar merata di sepanjang domain.



Gambar 3. Grafik Perbandingan solusi FDM dan NDSolve

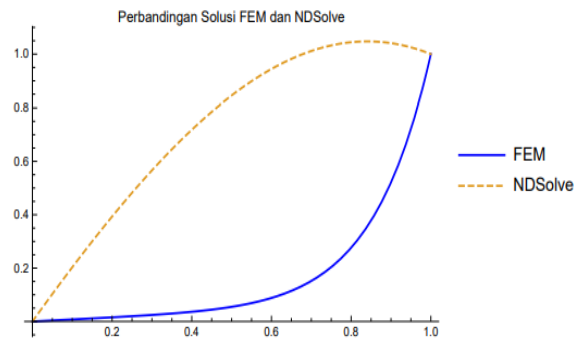


Gambar 3. Grafik galat absolut pada semua titik

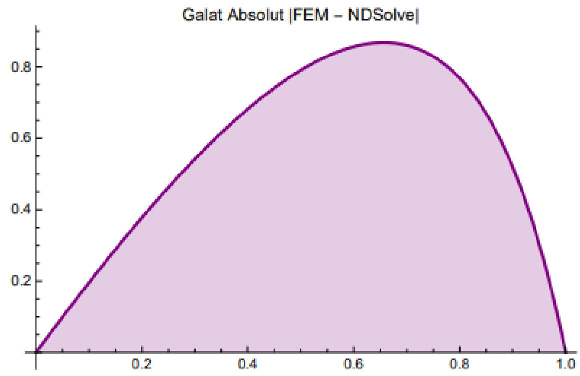
Diperoleh galat maksimum metode FDM adalah 4.02331×10^{-6}

FINITE ELEMENT METHOD

Metode FEM menghasilkan solusi yang memiliki bentuk fungsi mendekati eksak, namun nilai galat maksimumnya justru cukup besar, yaitu 0.86756. Hal ini disebabkan oleh kurangnya jumlah elemen atau penggunaan fungsi basis linear sederhana yang kurang mampu merepresentasikan perubahan nilai fungsi secara akurat. Dari segi kestabilan dan fleksibilitas formulasi, metode ini tetap unggul untuk kasus geometri dan konsisi batas yang lebih kompleks



Gambar 5. Grafik Perbandingan solusi FEM dan NDSolve



Gambar 6. Grafik galat absolut FDM terhadap waktu

Diperoleh galat maksimum metode FDM adalah 0.86756.

Hasil menunjukkan bahwa metode FDM adalah metode yang paling optimal dalam hal akurasi dan efisiensi komputasi untuk kasus persamaan pegas-massa teredam. rangnya jumlah elemen atau penggunaan fungsi basis linear sederhana yang kurang mampu merepresentasikan perubahan nilai fungsi secara akurat. Metode Shooting relatif sederhana dan memberikan hasil yang cukup baik jika tebakan awal mendekati benar. Sedangkan, metode FEM sangat kuat dalam masalah geometri dan kondisi batas kompleks, penerapan FEM di kasus ini (dengan fungsi basis linear dan jumlah elemen terbatas) menghasilkan galat yang besar. Oleh karena itu, pemilihan metode sebaiknya mempertimbangkan kompleksitas masalah, keperluan akurasi, dan ketersediaan sumber daya komputasi.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan analisis terhadap penerapan tiga metode numerik dalam menyelesaikan persoalan nilai batas pada sistem pegas-massa teredam, dapat disimpulkan bahwa ketiga metode, yaitu Shooting Method, Finite Difference Method (FDM) dan Finite Element Method (FEM) mampu memberikan solusi numerik yang cukup akurat jika dibandingkan dengan solusi ferefensi dari NDSolve. Metode Shooting menghasilkan solusi yang baik dengan pendekatan iteratif dan cocok digunakan untuk kasus yang relatif sederhana, meskipun ketergantungannya pada tebakan awal dapat mempengaruhi konvergensi. Metode FDM memiliki keunggulan dalam implementasi dan kestabilan perhitungan untuk pembagian grid yang cukup halus. Sementara itu, metode FEM menunjukkan tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan dua metode lainnya, terutama dalam menangani struktur matriks dan pendekatan berbasis fungsi basis, meskipun implementasinya lebih kompleks secara komputasi. Dalam konteks persoalan nilai batas dengan model sistem pegas-massa teredam, metode FEM direkomendasikan jika akurasi menjadi prioritas utama, sedangkan FDM dan Shooting tetap relevan digunakan tergantung pada kebutuhan efisiensi dan kompleksitas masalah.

SARAN

Penelitian selanjutnya dapat diarahkan pada penerapan metode-metode ini untuk sistem nonlinier, atau pada domain dengan kondisi batas yang lebih kompleks

DAFTAR PUSTAKA

Brika Enkekes, Y., & Mardianto, L. (2022). Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet. *Original Article Indonesian Journal of Applied Mathematics*, *2*(1), 1–8. https://journal.itera.ac.id/index.php/indojam/

Hoyali, L., Mashup, Abdillah, & Syaharuddin. (2024). *Aplikasi Metode Elemen Hingga untuk Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dalam Rekayasa Struktur dan Material*.

Huzaimah. (2016). *METODE ANALITIK DAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4 DALAM PENYELESAIAN PERSAMAAN GETARAN PEGAS TEREDAM*.

Kustiawati, D., Nurul Annisa, M., Fitriyah, N., Fadila, Y., & Arthaningrum, R. (2022). PENGGUNAAN APLIKASI WOLFRAM MATHEMATICA UNTUK MENENTUKAN PERSAMAAN FUNGSI BIAYA TOTAL DAN FUNGSI UTILITAS. *Jurnal Pembelajaran Dan Pengembangan Diri*. https://doi.org/10.47353/bj.v2i4.185

Mahmudah, D. E., Christyanti, R. D., Huda, Moh. K., & Amijay, F. D. T. (2017). *Penyelesaian Masalah Syarat Batas dalam Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua dengan Menggunakan Algoritma Shooting Neural Networks*.

Pasmadi, D. A., Lubis, A., Tanti, N., & Hasymi, Z. (2020). Kaji Eksperimental Peredam Dinamik dan Energy Harvesting pada Sistem Pegas Massa dengan DVA Tipe Dual Strip. *MECHANICAL*, *11*(1), 13. https://doi.org/10.23960/mech.v11.i1.202003

Rahmatullah, S., Arman, Y., Prodi Fisika FMIPA Universitas Tanjungpura, A., Hadari Nawawi Pontianak Prodi Ilmu Kelautan FMIPA Universitas Tanjungpura, J., & Hadari Nawawi Pontianak, J. (2020). *Simulasi Gerak Osilasi Model Pegas Bergandeng Menggunakan Metode Runge-Kutta*. *8*(3), 180–184.

Pandia, W., & Sitepu, I. (2021). Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia PENENTUAN GALAT PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE 1 DENGAN METODE NUMERIK. *Jurnal Mutiara Pendidikan Indonesia*, *6*(1), 31–37. https://doi.org/10.51544/mutiara%20pendidik.v6i1.1907

Tsuwaibatul Aslamiyah Lubis. (2025). Penerapan Metode Numerik dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial. *Pentagon : Jurnal Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, *3*(1), 131–137. https://doi.org/10.62383/pentagon.v3i1.421