

PELABELAN HARMONIS PADA BEBERAPA KELAS GRAF TAKHINGGA

Salsabilla Lovina

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: salsabilla.21057@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Pelabelan dalam teori graf merupakan metode pemberian label atau nilai pada titik atau sisi atau keduanya. Pelabelan harmonis adalah suatu pelabelan fungsi $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, yang memetakan setiap titik dalam graf ke bilangan bulat sedemikian rupa sehingga label setiap titik adalah rata-rata dari label titik tetangganya, yaitu $f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$. Pelabelan harmonis juga harus bersifat injektif, yaitu setiap titik diberi label yang unik, serta surjektif, yaitu setiap bilangan bulat yang dibutuhkan dapat digunakan, baik pada graf hingga maupun takhingga. Pada graf takhingga, aturan ini dapat dipastikan secara lokal di setiap lingkungan titik tanpa harus memperhitungkan seluruh struktur takhingga secara keseluruhan. Artikel ini membahas mengenai pelabelan harmonis pada graf takhingga. Keberadaan titik pendant merupakan syarat cukup bagi graf takhingga tidak memiliki pelabelan harmonis, namun bukan syarat perlu. Selain itu, graf G tetap memiliki pelabelan harmonis meskipun semua label digeser dengan konstanta atau diberi tanda negatif. Beberapa kelas graf yang dianalisis mencakup graf bintang $B(n)$, pohon takhingga beraturan- k , produk kartesius graf, serta pengkuadratan graf.

Kata Kunci: pelabelan harmonis, graf takhingga, pohon takhingga beraturan, graf bintang, dan produk kartesius.

Abstract

Labeling in graph theory is a method of assigning labels or values to nodes or edges or both. Harmonic labeling is a labeling function $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, which maps each vertex in the graph to an integer such that the label of each vertex is the average of the labels of its neighboring vertices, i.e. $f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$. Harmonic labeling must also be injective, i.e. each vertex is uniquely labeled, as well as surjective, i.e. any required integer can be used, both on finite and infinite graphs. On infinite graphs, this rule can be ensured locally in each node neighborhood without having to consider the entire infinite structure as a whole. This article discusses the harmonic labeling of infinite graphs. The existence of pendant nodes is a sufficient condition for an infinite graph not to have harmonic labeling, but not a necessary condition. Moreover, a graph G still has harmonic labeling even if all labels are shifted by a constant or given negative sign. Some of the graph classes analyzed include $B(n)$ star graphs, infinite k -regular tree, cartesian products of graphs, and quadratic graphs.

Keywords: harmonious labeling, infinite graphs, regular infinite trees, star graphs, and cartesian products.

PENDAHULUAN

Teori Graf sebagai salah satu cabang matematika, telah ada selama lebih dari 200 tahun. Jurnal pertama tentang teori graf diterbitkan pada tahun 1736 oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Leonhard Euler. Awalnya, teori graf dianggap "kurang" signifikan dalam konteks matematika karena lebih banyak digunakan untuk memecahkan teka-teki. Namun, teori ini telah mengalami kemajuan dalam beberapa dekade terakhir (Budayasa, 2007).

Suatu graf G terdiri dari dua himpunan yaitu, himpunan tak kosong $V(G)$ yang berisi elemen-elemen berhingga yang disebut titik, dan himpunan $E(G)$ yang berisi elemen-elemen yang juga berhingga dan mungkin kosong yang disebut sisi. Setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah pasang tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ dinamakan sebagai himpunan titik G , dan himpunan $E(G)$ dinamakan himpunan sisi G (Budayasa, 2007). Jika u dan v adalah dua titik di G , maka $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sisi G .

Salah satu topik yang dibahas dalam teori graf adalah pelabelan. Topik pelabelan pada graf diperkenalkan oleh Alexander Rosa pada tahun 1967. Konsep pelabelan graf merupakan metode memberi label pada titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf untuk tujuan tertentu. Tujuan pelabelan adalah untuk memenuhi kriteria yang sesuai dengan struktur dan karakteristik graf. Rosa mengemukakan berbagai jenis pelabelan, termasuk pelabelan harmonis, label yang diberikan pada titik-titik dalam graf harus memenuhi syarat tertentu agar label sisi yang dihasilkan berbeda.

Konsep pelabelan harmonis dapat diterapkan pada graf takhingga (*infinite graph*), di mana graf takhingga adalah graf dengan banyaknya titik dan sisi yang takhingga tetapi derajat setiap titik hingga. Tantangan utama dalam pelabelan harmonis adalah memastikan bahwa pelabelan tetap memenuhi kriteria harmonis sehingga label titik yang dihasilkan tetap unik. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan syarat cukup sebuah graf takhingga tidak memiliki pelabelan harmonis dan Menentukan beberapa kelas graf takhingga yang memiliki dan tidak memiliki pelabelan harmonis.

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini, akan diuraikan beberapa definisi dasar dan beberapa teorema yang berkaitan dengan pembahasan mengenai pelabelan harmonis pada graf takhingga di bab berikutnya.

TEORI DASAR GRAF

Graf G dilambangkan dengan $G = (V, E)$, di mana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Sisi yang terhubung dengan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Jika dalam suatu graf terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v , maka disebut sisi-rangkap/sisi-ganda (*multiple-edges*). Graf yang tidak mempunyai sisi-rangkap dan tidak mempunyai gelung disebut graf sederhana. Sedangkan graf yang mempunyai sisi-rangkap tetapi tidak memiliki gelung disebut graf rangkap (*multigraf*).

TITIK AWAL DAN TITIK AKHIR

Sinar terdiri dari dua komponen utama, yaitu titik awal (*initial vertex*) dan titik akhir (*terminal vertex*). Jika sebuah sinar dinyatakan sebagai (u, v) , maka u

disebut titik awal, sedangkan v disebut titik akhir. Titik awal merupakan titik tempat sinar dimulai, sedangkan titik akhir adalah titik tempat sinar berakhir.

LINTASAN

Lintasan (*path*) adalah suatu jalan W yang memiliki sifat khusus, yaitu semua titik v dalam jalan W berbeda. Dengan kata lain, lintasan tidak mengunjungi kembali titik yang sama setelah melewatinya. Lintasan takhingga merujuk pada lintasan yang panjangnya (banyak sisi) tak terhingga dan karenanya dapat berlanjut tanpa batas. Lintasan takhingga dapat didefinisikan sebagai sekumpulan titik yang tidak pernah kembali ke titik asalnya, membentuk lintasan yang terus berlanjut.

Contoh:



Gambar 1. Lintasan Takhingga

SIKEL

Sebuah sikel (*cycle*) adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut sikel- k , disimbolkan dengan C_k . Sikel merupakan lintasan yang dimulai dan berakhir pada titik yang sama, dengan semua titik lainnya dalam lintasan tersebut berbeda. Sebuah sikel yang memuat semua titik sebuah graf disebut sikel Hamilton. Graf yang memuat sikel hamilton disebut graf Hamilton.

GRAF TERHUBUNG

Sebuah graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya graf G disebut tidak terhubung (*disconnected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Dengan demikian, graf terhubung adalah graf yang mempunyai lintasan yang menghubungkan setiap pasang titik.

DERAJAT TITIK

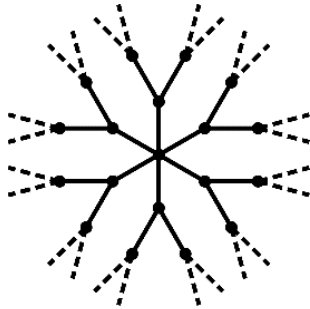
Derajat titik v , dilambangkan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali).

Graf G disebut beraturan- k jika setiap titik G berderajat k .

GRAF TAKHINGGA (INFINITE GRAPH)

Graf takhingga adalah graf yang mempunyai takhingga banyak titik dan sisi. Dalam graf takhingga, banyaknya lintasan yang menghubungkan dua titik tidak terbatas, sehingga mungkin ada lebih dari satu lintasan antara dua titik yang berbeda.

Contoh:



Gambar 2. Graf Takhingga

HIMPUNAN COUNTABLE

Suatu himpunan dikatakan *countable*, jika himpunan tersebut ekuivalen dengan subhimpunan bilangan asli. Dua himpunan dinyatakan ekuivalen jika dan hanya jika ada fungsi bijektif dari satu himpunan ke himpunan lain. Akan tetapi, himpunan yang tidak dapat dipetakan ke bilangan bulat non-negatif, seperti himpunan bilangan real, disebut himpunan uncountable.

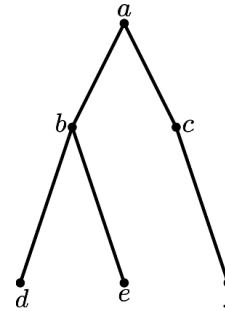
POHON

Graf terhubung dan tidak memuat siklus disebut pohon. Hutan (*forest*) adalah kumpulan dari satu atau lebih pohon yang tidak terhubung satu sama lain. Graf pohon takhingga memiliki sifat mirip dengan pohon, tetapi banyaknya titik dapat terus bertambah tanpa batas, sehingga setiap titik dapat memiliki sejumlah anak yang tidak terhingga.

POHON BERAKAR (ROOTED TREE)

Salah satu bentuk khusus pohon adalah pohon berakar (*rooted tree*), yang memiliki satu titik khusus yang disebut akar (*root*) (West, 2018). Dalam pohon berakar, setiap titik memiliki hubungan hierarkis, di mana titik lain dapat diklasifikasikan sebagai induk (*parent*), anak (*child*), daun (*leaf*), atau titik dalam (*internal node*) (Bondy & Murty, 2008). Pohon berakar sering direpresentasikan secara hierarkis, dengan

akar berada di tingkat paling atas (*level 0*), dan titik lain berada pada tingkat (*level*) yang lebih tinggi sesuai dengan jarak dari akar. Level dalam pohon dihitung dari akar, di mana akar berada pada level 0. Contoh:



Gambar 3. Pohon Berakar Biner

GRAF BINTANG

Graf bintang adalah graf khusus yang memiliki struktur unik. Graf ini dilambangkan $B(n)$ dan terdiri atas satu titik utama yang disebut titik pusat, yang terkait dengan n titik luar (titik yang terhubung ke titik pusat), tanpa hubungan antara titik-titik luar tersebut. Graf bintang hingga memiliki titik pusat yang berderajat n , sedangkan setiap titik luar berderajat 1. Graf bintang juga merupakan graf terhubung, di mana setiap titik luar dapat dijangkau melalui titik pusat.

PELABELAN

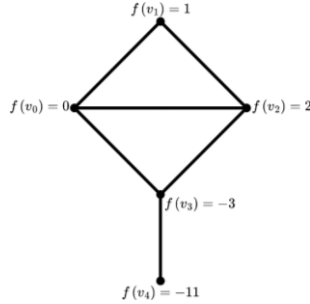
Pelabelan dalam teori graf merupakan metode pemberian label atau nilai pada titik atau sisi atau keduanya. Terdapat berbagai jenis pelabelan, seperti pelabelan titik, di mana setiap titik dalam graf diberikan label yang berbeda-beda, atau pelabelan sisi, di mana setiap sisi dalam graf diberi label untuk memberikan informasi tambahan tentang sisi tersebut (Gallian, 2014). Selain itu ada juga jenis pelabelan lain seperti, pelabelan harmonis.

PELABELAN HARMONIS

Pelabelan harmonis adalah suatu pelabelan fungsi $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, yang memetakan setiap titik dalam graf ke bilangan bulat sedemikian rupa sehingga label setiap titik adalah rata-rata dari label titik tetangganya, yaitu $f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$ (Sarasija & Binthiya, 2011). Dengan $d(v)$ adalah derajat titik v , dan $N(v)$ adalah himpunan tetangga dari v . Selain memenuhi aturan rata-rata, pelabelan harmonis juga harus bersifat injektif, yaitu setiap titik diberi label yang unik, serta surjektif, yaitu setiap bilangan bulat

yang dibutuhkan dapat digunakan, baik pada graf hingga maupun takhingga. Pada graf takhingga, aturan ini dapat dipastikan secara lokal di setiap lingkungan titik tanpa harus memperhitungkan seluruh struktur takhingga secara keseluruhan.

Contoh:



Gambar 4. Pelabelan Graf Hati

HASIL DAN PEMBAHASAN

DEFINISI

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf takhingga dengan derajat titik berhingga dan $v \in V(G)$. Persekitaran/pertetanggaan (*neighborhood*) titik v di G , dilambangkan $N_G(v)$ atau $N(v)$, didefinisikan sebagai berikut $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid v u \in E(G)\}$.

Definisi 3.1

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf takhingga dan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Pelabelan harmonis pada G adalah fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $\forall v \in V(G)$ berlaku

$$f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$$

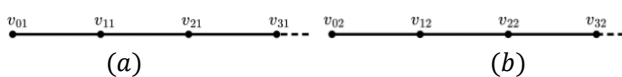
Definisi 3.2

Sinar berpangkal di titik v_0 , dilambangkan $S(v_0)$, adalah lintasan takhingga $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ di mana v_0 merupakan titik awal lintasan.

Definisi 3.3

Graf bintang $B(n)$ dibentuk dari n sinar pisah-titik dengan titik pangkal sama.

Contoh:



Gambar 5. (a) Sinar ke-1, (b) Sinar ke-2, dan (c) Graf Bintang $B(2)$

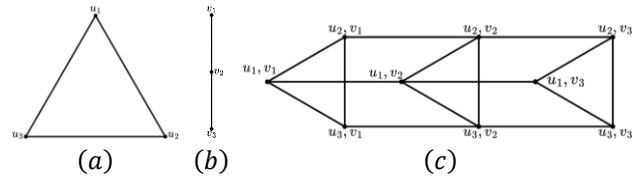
Definisi 3.4

Misalkan $S = \{a_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ barisan monoton naik bilangan bulat berbeda. Himpunan $\{-n, -(n-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (n-1), n\}$ dilambangkan dengan $[n]$. Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|[n] \cap S|}{2n+1}$ ada, maka bilangan tersebut dinamakan kepadatan (*density*) S .

Definisi 3.5

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$ dua graf. Produk Kartesius dari G dan H , dilambangkan dengan $G \times H$, adalah graf yang himpunan titiknya $V(G) \times V(H)$ dan dua titik (u, v) dan (u', v') berhubungan langsung jika dan hanya jika $u = u'$ dan $vv' \in E(H)$ atau $v = v'$ dan $uu' \in E(G)$.

Contoh:



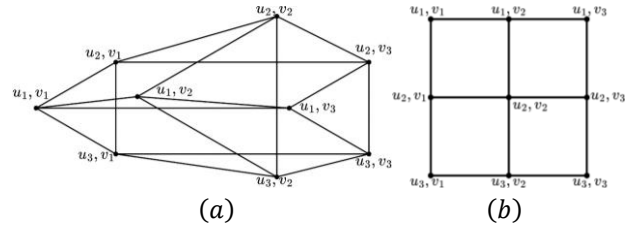
Gambar 6. (a) Graf G , (b) Graf H , dan (c) $G \times H$

Catatan: Jika $G = H$ maka $G \cdot H = G \cdot G$.

Selanjutnya $G \cdot G$ dilambangkan dengan G^2 .

Secara umum $G^d = \underbrace{G \cdot G \cdot \dots \cdot G}_{\text{sebanyak } d}$.

Contoh:



Gambar 7. (a) G^2 dan (b) H^2

TEOREMA-TEOREMA

Teorema 3.1

Misalkan $S(v_{01}) = (v_{01}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots)$ dan $S(v_{02}) = (v_{02}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots)$ dua sinar saling lepas. Jika $G = B(2) = (\dots, v_{22}, v_{12}, v_{01}, v_{11}, v_{21}, \dots)$, maka fungsi $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ sedemikian hingga,

$$f(v) = \begin{cases} 0, & v = v_0 \\ i, & v = v_{i1}, \quad \forall i, i \geq 1 \\ -i, & v = v_{i2}, \quad \forall i, i \geq 1 \end{cases}$$

adalah pelabelan harmonis pada G .

Bukti:

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa fungsi f bijektif. Untuk menunjukkan sifat tersebut, pertama-

tama akan dibuktikan bahwa fungsi f injektif, kemudian dilanjutkan dengan pembuktian bahwa fungsi f surjektif

Misalkan $x, y \in V(G)$ dan $x = y$.

Kemungkinan 1: $x, y \in V_1$

Misalkan $x = v_{i1}$ dan $y = v_{j1}$ dengan $i \neq j$.

Maka, $f(x) = f(v_{i1}) = i \neq j = f(v_{j1}) = f(y)$

Kemungkinan 2: $x, y \in V_2$

Misalkan $x = v_{i2}$ dan $y = v_{j2}$ dengan $i \neq j$.

Maka, $f(x) = f(v_{i2}) = -i \neq -j = f(v_{j2}) = f(y)$

Kemungkinan 3: $x = v_0$ dan $y \in V_1$

Misalkan $y = v_{i1}, i \geq 1$.

Maka, $f(x) = f(v_0) = 0 \neq i = f(v_{i1}) = f(y)$

Kemungkinan 4: $x = v_0$ dan $y \in V_2$

Misalkan $y = v_{i2}, i \geq 1$.

Maka, $f(x) = f(v_0) = 0 \neq -i = f(v_{i2}) = f(y)$

Kemungkinan 5: $x \in V_1$ dan $y \in V_2$

Misalkan $x = v_{i1}$ dan $y = v_{j2}$.

Maka, $f(x) = f(v_{i1}) = i \neq -j = f(v_{j2}) = f(y)$

Karena fungsi f memetakan setiap elemen domain ke elemen kodomain yang berbeda tanpa ada elemen domain yang memiliki nilai fungsi yang sama. Dengan demikian fungsi f injektif.

Karena $f(V(G)) = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}$ maka f surjektif. Dengan demikian fungsi f bijektif.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa untuk setiap titik v di G , label v sama dengan rata-rata label dari semua tetangganya. Untuk itu, misalkan $v \in V(G)$. Perhatikan bahwa $\forall v \in V(G), d(v) = 2$.

Jika $v = v_0$, maka $N(v) = \{v_{11}, v_{12}\}$ dan $f(v) = f(v_0) = 0$ sehingga

$$\sum_{u \in N(v)} f(u) = f(v_{11}) + f(v_{12}) = 1 - 1 = 0$$

Jadi

$$f(v_0) = 0 = \frac{1}{d(v)} \cdot \sum_{u \in V(G)} f(u)$$

Jika $v \in V_1$, dan tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $v = v_{i1}$, untuk $i \geq 1$. Maka $N(v_{i1}) = \{v_{i-1,1}, v_{i+1,1}\}$ dengan $f(v_{i-1,1}) = i - 1$ dan $f(v_{i+1,1}) = i + 1$ sehingga

$$\begin{aligned} \sum_{u \in N(v_{i1})} f(u) &= f(v_{i-1,1}) + f(v_{i+1,1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1) = 2i \end{aligned}$$

dan

$$\frac{1}{d(v_{i1})} \cdot \sum_{u \in N(v_{i1})} f(u) = \frac{1}{2} \cdot 2i = i = f(v_{i1})$$

Jika $v \in V_2$, tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $v = v_{j2}$ dengan $j \geq 1$, maka $N(v_{j2}) = \{v_{(j-1)2}, v_{(j+1)2}\}$ dengan $f(v_{(j-1)2}) = -(j - 1) = 1 - j$ dan $f(v_{(j+1)2}) = -(j + 1) = -1 - j$ sehingga,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in N(v_{j2})} f(u) &= f(v_{(j-1)2}) + f(v_{(j+1)2}) \\ &= (1 - j) + (-1 - j) = -2j \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{1}{d(v_{j2})} \cdot \sum_{u \in N(v_{j2})} f(u) = \frac{1}{2} \cdot (-2j) = -j = f(v_{j2})$$

Karena fungsi f bijektif dan memenuhi Definisi 3.1, maka f sebuah pelabelan harmonis pada graf G . Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Titik pada graf G yang berderajat 1 disebut titik "Pendant"

Lemma 3.2

Jika graf G memiliki titik pendant, maka G tidak memiliki pelabelan harmonis.

Bukti:

Andaikan G memiliki pelabelan harmonis. Misalkan f pelabelan harmonis pada G . Misalkan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = 1$. Maka $|N(v)| = d(v) = 1$. Misalkan $N(v) = \{x\}$. Karena f pelabelan harmonis, maka

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u) \\ &= \frac{1}{1} \cdot f(x) \\ f(v) &= f(x) \end{aligned}$$

sehingga fungsi f bukan fungsi injektif. Jadi f bukan fungsi bijektif. Kontradiksi, dengan f fungsi bijektif. Lemma terbukti ■

Lemma 3.3

Jika fungsi $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ merupakan pelabelan harmonis pada graf G dan $m \in \mathbb{Z}$, maka fungsi $g: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $g(v) = f(v) - m, \forall v \in V(G)$ merupakan pelabelan harmonis pada G .

Bukti:

Karena f pelabelan harmonis pada G , berdasarkan Definisi 3.1, f fungsi bijektif dan

$$f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$$

Sehingga

$$g(v) = \left(\frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u) \right) - m$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d(v)} \left[\sum_{u \in N(v)} f(u) - m \cdot d(v) \right] \\
 &= \frac{1}{d(v)} \left[\sum_{u \in N(v)} f(u) - m|N(v)| \right] \\
 &= \frac{1}{d(v)} \left[\sum_{u \in N(v)} (f(u) - m) \right] \\
 &= \frac{1}{d(v)} \left[\sum_{u \in N(v)} g(u) \right]
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi g merupakan pelabelan harmonis pada graf G . Terbukti ■

Lemma 3.4

Jika fungsi $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ merupakan pelabelan harmonis pada graf G , maka fungsi $g: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $g(v) = -f(v)$, $\forall v \in V(G)$ merupakan pelabelan harmonis pada graf G .

Bukti:

Karena f pelabelan harmonis pada G , berdasarkan Definisi 3.1, f fungsi bijektif dan

$$f(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 g(v) &= -\frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} f(u) \\
 &= \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} (-f(u)) \\
 &= \frac{1}{d(v)} \sum_{u \in N(v)} g(u)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi g merupakan pelabelan harmonis pada graf G . Terbukti ■

Teorema 3.5

Tidak ada pelabelan harmonis pada graf bintang $B(n)$, untuk $n \geq 3$.

Bukti:

Andaikan ada pelabelan harmonis f pada $B(n)$ untuk $n \geq 3$. Misalkan v_0 titik pusat $B(n)$.

Berdasarkan Lemma 3.3, ada pelabelan f_1 pada $B(n)$ dengan $f_1 = (v_0) = 0$.

Himpunan titik persekitaran v_0 pada $B(n)$ adalah $N(v_0) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}\}$.

Karena $n \geq 3$ dan Lemma 3.4, ada pelabelan harmonis, katakan f_2 , sedemikian hingga ada 2 titik di $N(v_0)$ berlabel positif terhadap f_2 . Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $f_2(v_{1i}) = a >$

0 dan $f_2(v_{1j}) = b > 0$ dengan $i \neq j, 1 \leq j \leq n, a < b$.

Perhatikan bahwa $\forall v \in V(B(n)) - \{v_0\}, d(v) = 2$. Karena f_2 pelabelan harmonis, dan $f_2(v_0) = 0, f_2(v_{1i}) = a, d(v_{1i}) = 2$, maka

$$\begin{aligned}
 f_2(v_{1i}) &= \frac{1}{d(v_{1i})} \sum_{u \in N(v_{1i})} f_2(u) \\
 a &= \frac{1}{2} (f_2(v_0) + f_2(v_{2i})) \\
 &= \frac{1}{2} (0 + f_2(v_{2i}))
 \end{aligned}$$

Sehingga $f_2(v_{2i}) = 2a$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
 f_2(v_{2i}) &= \frac{1}{d(v_{2i})} \sum_{u \in N(v_{2i})} f_2(u) \\
 2a &= \frac{1}{2} (f_2(v_{1i}) + f_2(v_{3i})) \\
 &= \frac{1}{2} (a + f_2(v_{3i}))
 \end{aligned}$$

Sehingga $f_2(v_{3i}) = 3a$

Proses dilanjutkan sehingga diperoleh barisan label titik-titik pada sinar ke- i di bintang $B(n)$ adalah $f_2(v_0), f_2(v_{1i}), f_2(v_{2i}), \dots$ yaitu: $0, a, 2a, \dots$

Dengan argumen serupa, diperoleh barisan label titik-titik pada sinar ke- j pada $B(n)$ adalah $f_2(v_0), f_2(v_{1j}), f_2(v_{2j}), f_2(v_{3j}), \dots$ yaitu: $0, b, 2b, 3b, \dots$

Karena $a, b \in \mathbb{Z}^+$, jika KPK $(a, b) = X$, maka $ka = lb = x$ dengan $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

Sehingga $f_2(v_{ki}) = f_2(v_{li})$. Akibatnya, fungsi f_2 tidak injektif dan f_2 bukan fungsi bijektif. Kontradiksi, bahwa f_2 pelabelan harmonis pada $B(n)$. Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Lemma 3.6

Jika G pohon takhingga beraturan -3 , maka G memiliki sebuah pelabelan harmonis.

Bukti:

Konstruksi pelabelan $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ secara rekursif, sedemikian hingga f merupakan pelabelan harmonis pada G .

Pilih sebuah titik v_0 dari G sebagai titik pusat (titik akar), kemudian label titik v_0 dengan 0 atau $f(v_0) = 0$ dan label titik-titik tetangga v_0 dengan $\{1, 2, -3\}$ atau $f(N(v_0)) = \{1, 2, -3\}$.

Perhatikan bahwa

$$f(v_0) = \frac{1}{3} \left(\sum_{v \in N(v_0)} f(v) \right)$$

dan semua titik yang telah diberi label memiliki label yang berbeda satu sama lain.

Pilih bilangan bulat m dengan nilai terkecil yang belum digunakan dalam pelabelan, yaitu $m = \min\{|z| \mid z \notin f(V')\}$, $z \in \mathbb{Z}$, dan jika ternyata m sudah ada dalam himpunan nilai $f(V')$, maka pilih nilai kebalikannya, yaitu $-m'$ sebagai gantinya.

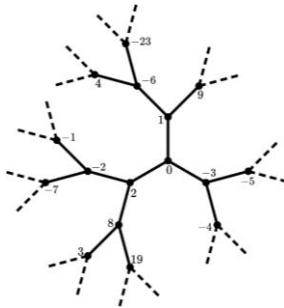
Misalkan $x \in V'$ dan $y \in V(G) - V'$, $\exists xy \in E(G)$

Misalkan $N(y) = \{x, y_1, y_2\}$ dengan $f(y_1) = m$ dan $f(y) = \frac{1}{3}(f(y_2) + f(x) + m) \ni f(y) \neq f(y_2)$ berbeda dengan label-label yang sudah dipakai sebelumnya.

Perhatikan bahwa jika nilai $f(y_2)$ jauh lebih besar dari pada semua nilai $f(V')$, maka $f(y)$ akan lebih kecil dari setiap nilai dalam $f(V')$. Yang berarti dapat menentukan dua derajat kebebasan nilai $f(y_2)$ dan $f(y)$ agar fungsi f tetap injektif & harmonis.

Proses ini diulangi ke titik pada level-level berikutnya. Dengan cara tersebut, pelabelan yang diperoleh adalah sebuah pelabelan harmonis pada G . ■

Contoh:



Gambar 8. Pohon Beraturan-3

Teorema 3.7

Jika G pohon takhingga beraturan- k , maka G memiliki pelabelan harmonis.

Bukti:

Untuk $k = 2$, dijamin oleh Teorema 3.1

Untuk $k = 3$, dijamin oleh Lemma 3.6

Untuk $k \geq 4$, dikonstruksikan pelabelan $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ secara rekursif, sedemikian hingga f merupakan pelabelan harmonis pada G .

Pilih sebuah titik v_0 pada G sebagai titik pusat (titik akar), kemudian label v_0 dengan 0, atau $f(v_0) = 0$.

Urutan melabelnya terurut dari titik pusat ke titik-titik yang terletak pada level-level berikutnya.

Label $N(v_0)$ dengan $\{1, -1, 2, -2\}$ atau $f(N(v_0)) = \{1, -1, 2, -2\}$. Sehingga

$$f(v_0) = \frac{1}{4} \left(\sum_{u \in N(v_0)} f(u) \right)$$

Perhatikan semua titik di $N[v_0]$ berlabel berbeda. Pilih bilangan bulat m dengan nilai terkecil yang belum digunakan dalam pelabelan, yaitu $m = \min\{|z| \mid z \notin f(V')\}$, $z \in \mathbb{Z}$, dan jika m ternyata sudah ada dalam himpunan nilai $f(V')$, maka pilih nilai kebalikannya, yaitu $-m'$ sebagai gantinya.

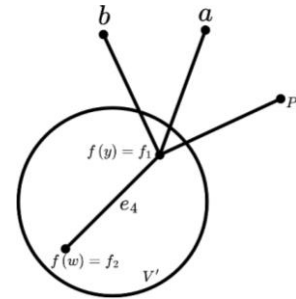
Misalkan x sebuah titik yang belum dilabel yang terdekat dengan titik pusat, label x dengan $f(x) = m$. Induk x , namakan y , memiliki dua anak lain, selain x . Misalkan w induk y , perhatikan bahwa y dan w sudah terlabel $f(y) = f_1$ dan $f(w) = f_2$.

Labeli salah satu anak dari y , dengan bilangan a (bilangan yang jauh lebih besar dari $\max\{|f(v)|\}, v \in V'\}$.

Selanjutnya melabel titik anak yang lain dari y dengan bilangan b yang berbeda dengan bilangan-bilangan sebelumnya, sedemikian hingga

$$f_1 = \frac{1}{4}(b + a + m + f_2)$$

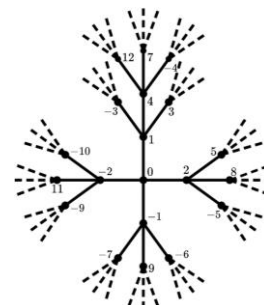
atau $b = 4f_1 - m - a - f_2$



Gambar 9. Lingkaran V'

Perhatikan bahwa pelabelan f yang dikonstruksi injektif, surjektif, dan harmonis. Injektif terpenuhi karena setiap sisi diberikan label yang unik, surjektif karena seluruh label yang diperlukan dapat digunakan, dan harmonis karena jumlah label yang terkait dengan titik-titik memenuhi aturan pelabelan harmonis sesuai definisi. ■

Contoh:



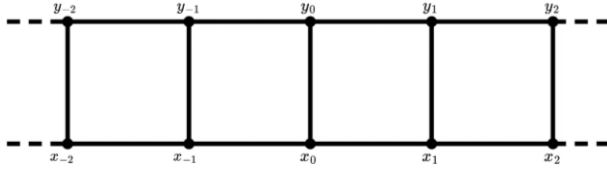
Gambar 10. Pohon Beraturan-4

Teorema 3.8

Graf $G = B(2) \times K_2$ tidak memiliki pelabelan harmonis.

Bukti:

Graf $G = B(2) \times K_2$ dapat dilihat seperti Gambar 11. berikut,



Gambar 11. $B(2) \times K_2$

Andaikan G memiliki pelabelan harmonis $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, sedemikian hingga, $f(x_0) = a_0; f(y_0) = b_0; f(x_1) = a_1; f(y_1) = b_1$.

Karena fungsi f injektif, maka a_0, b_0, a_1, b_1 berbeda.

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $a_1 = \max\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$.

Maka b_1 dan a_0 kurang dari a_1 dengan paling kecil 1 atau 2. Karena f harmonis, maka

$$f(x_1) = \frac{1}{3}(f(x_0) + f(y_1) + f(x_2))$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(a_0 + b_1 + a_2)$$

Ekuivalen dengan, $a_2 = 3a_1 - b_1 - a_0$

Karena $b_1 \leq a_1 - 1$ dan $a_0 \leq a_1 - 2$, maka $a_2 \geq 3a_1 - (a_1 - 1) - (a_1 - 2) = a_1 + 3$.

Ini berarti, a_2 atau b_2 adalah $\max\{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2\} = \max\{a_i, b_i\}_{i=0}^2$ dan nilainya lebih dari atau sama dengan $a_1 + 3$.

Selanjutnya, tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $a_2 = \max\{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2\}$.

Karena f injektif, maka b_2 dan a_1 kurang dari a_2 dengan paling sedikit 1 dan 2. Sehingga

$$a_3 = 3a_2 - b_2 - a_1$$

$$\geq 3a_2 - (a_2 - 1) - (a_2 - 2)$$

$$= a_2 + 3$$

Secara induktif, dapat dibuktikan bahwa $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, salah satu dari a_k atau b_k adalah $\max\{a_i, b_i\}_{i=0}^k$ dan lebih besar dari $\max\{a_i, b_i\}_{i=0}^k + 3$... ①

Misalkan $f(x_{-i}) = a_{-i}$ dan $f(y_{-i}) = b_{-i}, \forall i, i \geq 1$.

Karena fungsi f injektif, maka a_{-1}, b_{-1}, a_0, b_0 berbeda.

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $a_{-1} = \min\{a_{-1}, b_{-1}, a_0, b_0\} = \min\{a_i, b_i\}_{i=-1}^0$

Maka b_{-1} dan a_0 lebih dari a_{-1} dengan paling sedikit 1 atau 2. Karena f harmonis, maka

$$a_{-2} = 3a_{-1} - b_{-1} - a_0$$

$$\leq 3a_{-1} - (a_{-1} + 1) - (a_{-1} + 2)$$

$$= a_{-1} - 3$$

Ini berarti, a_{-2} atau b_{-2} adalah $\min\{a_i, b_i\}_{i=-2}^0$ dan kurang dari $a_{-1} - 3$.

Secara umum, diperoleh, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, a_{-k} atau b_{-k} adalah $\min\{a_i, b_i\}_{i=-k}^0$ dan lebih kurang dari $\min\{a_i, b_i\}_{i=-k}^0 - 3$... ②

Dari ① dan ②, barisan label titik-titik G adalah $S = \{a_i, b_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ dengan kepadatan $\lim_{m \rightarrow n} \frac{|[m] \cap S|}{2m+1} \leq$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2(2k+1)}{2(3k)+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Karena kepadatan label kurang dari 1, ini berarti bahwa tidak semua bilangan bulat digunakan sebagai label dalam pelabelan f . Dengan kata lain, terdapat bilangan bulat yang tidak pernah muncul dalam himpunan label S . Namun agar f menjadi fungsi surjektif, setiap bilangan bulat seharusnya muncul sebagai label setidaknya satu kali. Karena f gagal mencakup semua bilangan bulat, maka f tidak surjektif, yang bertentangan dengan asumsi bahwa f adalah pelabelan harmonis dari graf G . Kontradiksi. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

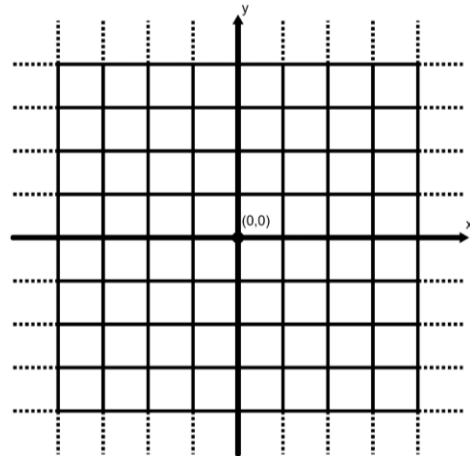
Teorema 3.9

Graf $G = (B(2))^2$ memiliki pelabelan harmonis.

Bukti:

Untuk mempermudah pemahaman terhadap pelabelan harmonis pada graf $G = B(2) \times B(2)$, diperlukan beberapa notasi berikut.

Perhatikan bahwa graf $G = B(2) \times B(2)$ secara visual berupa kisi-kisi persegi tak hingga, seperti tampak pada Gambar 12.



Gambar 12. $(B(2))^2$

Misalkan $A = \{(x, -1) | x \in \mathbb{Z}\}$ dan $B = \{(x, 0) | x \in \mathbb{Z}\}$.

Perhatikan bahwa

$$A = \{\dots, (-1, -1), (0, -1), (1, -1), \dots\}$$

dan

$$B = \{\dots, (-1, 0), (0, 0), (1, 0), \dots\}$$

Untuk $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ dan $0 \leq i \leq n$, misalkan

$$UL_n^i = \{(-n + i, i)\} \quad \text{"Upper-Left"}$$

$$UR_n^i = \{(n + 1 - i, i)\} \quad \text{"Upper-Right"}$$

$$LL_n^i = \{(-n + i, -i - 1)\} \quad \text{"Lower-Left"}$$

$$LR_n^i = \{(n - i + 1, -i - 1)\} \quad \text{"Lower-Right"}$$

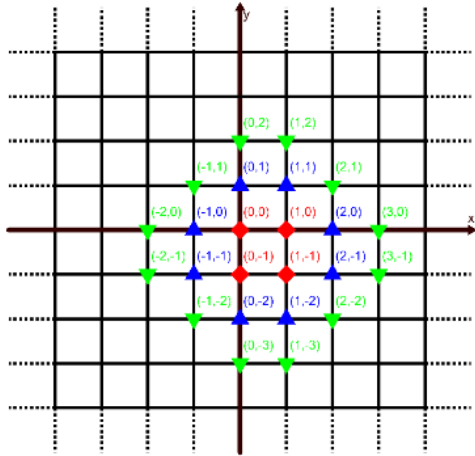
Selanjutnya,

$$UL(n) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} UL_n^i \quad ; \quad UR(n) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} UR_n^i$$

$$LL(n) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} LL_n^i \quad ; \quad LR(n) = \bigcup_{0 \leq i \leq n} LR_n^i$$

dan

$$S_n = \left[\bigcup_{0 \leq k \leq n} UL(k) \right] \cup \left[\bigcup_{0 \leq k \leq n} UR(k) \right] \cup \left[\bigcup_{0 \leq k \leq n} LL(k) \right] \cup \left[\bigcup_{0 \leq k \leq n} LR(k) \right]$$



Gambar 13. Titik-titik di S_2

Perhatikan Gambar 3.9 yang merupakan koordinat titik dari S_2 , di mana S_2 merupakan himpunan titik dari UL, UR, LL , dan LR untuk $n = 0, 1, 2$.

Untuk $n = 2$ dan $0 \leq i \leq 2$, diperoleh

$$UL(2) = \{UL_2^0 \cup UL_2^1 \cup UL_2^2\} \\ = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$$

$$UR(2) = \{UR_2^0 \cup UR_2^1 \cup UR_2^2\} \\ = \{(3, 0), (2, 1), (1, 2)\}$$

$$LL(2) = \{LL_2^0 \cup LL_2^1 \cup LL_2^2\} \\ = \{(-2, -1), (-1, -2), (0, -3)\}$$

$$LR(2) = \{LR_2^0 \cup LR_2^1 \cup LR_2^2\} \\ = \{(3, -1), (2, -2), (1, -3)\}$$

Untuk $n = 1$ dan $0 \leq i \leq 1$, diperoleh

$$UL(1) = \{UL_1^0 \cup UL_1^1\} = \{(-1, 0), (0, 1)\}$$

$$UR(1) = \{UR_1^0 \cup UR_1^1\} = \{(2, 0), (1, 1)\}$$

$$LL(1) = \{LL_1^0 \cup LL_1^1\} = \{(-1, -1), (0, -2)\}$$

$$LR(1) = \{LR_1^0 \cup LR_1^1\} = \{(2, -1), (1, -2)\}$$

Untuk $n = 0$ dan $i = 0$, diperoleh

$$UL(0) = UL_0^0 = \{(0, 0)\}$$

$$UR(0) = UR_0^0 = \{(1, 0)\}$$

$$LL(0) = LL_0^0 = \{(0, -1)\}$$

$$LR(0) = LR_0^0 = \{(1, -1)\}$$

Sehingga,

$$S_0 = UL(0) \cup UR(0) \cup LL(0) \cup LR(0)$$

$$= \{(0, 0)\} \cup \{(1, 0)\} \cup \{(0, -1)\} \cup \{(1, -1)\}$$

$$= \{(0, 0), (1, 0), (0, -1), (1, -1)\}$$

$$S_1 = [UL(0) \cup UL(1)] \cup [UR(0) \cup UR(1)]$$

$$\cup [LL(0) \cup LL(1)] \cup [LR(0) \cup LR(1)]$$

$$= \{(0, 0), (-1, 0), (0, 1)\} \cup \{(1, 0), (2, 0), (1, 1)\}$$

$$\cup \{(0, -1), (-1, -1), (0, -2)\}$$

$$\cup \{(1, -1), (2, -1), (1, -2)\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0), (1, 1); \\ (0, -1), (-1, -1), (0, -2), (1, -1); \\ (2, -1), (1, -2) \end{array} \right\}$$

dan

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (-1, 0), (0, 1), (-2, 0), (-1, 1); \\ (0, 2), (1, 0), (2, 0), (1, 1), (3, 0), (2, 1); \\ (1, 2), (0, -1), (-1, -1), (0, -2); \\ (-2, -1), (-1, -2), (0, -3), (1, -1); \\ (2, -1), (1, -2), (3, -1), (2, -2); \\ (1, -3) \end{array} \right\}$$

Perhatikan bahwa, $|S_n| = 2(n + 1)(n + 2), n \geq 0$

Sebelum pembuktian teorema berikut, ekspresi $a = b \pm c$, melambangkan $b - c \leq a \leq b + c$.

Pelabelan harmonis $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ dikonstruksi secara induktif sebagai berikut.

LANGKAH 1: (Basis Induksi)

Diawali dengan pelabelan berikut,

$$\hat{f}_1(LL_0^0) = 0 \quad ; \quad \hat{f}_1(LL_1^0) = -1$$

$$\hat{f}_1(LR_0^0) = 1 \quad ; \quad \hat{f}_1(LR_1^0) = 2$$

$$\hat{f}_1(UL_0^0) = a \quad ; \quad \hat{f}_1(UL_1^0) = b$$

$$\hat{f}_1(UR_0^0) = c \quad ; \quad \hat{f}_1(UR_1^0) = d$$

dengan a, b, c, d berbeda dan tidak sama dengan $-1, 0, 1$, dan 2 , sedemikian hingga,

$$f_1(UL_1^1) = 4a - b - c ;$$

$$f_1(UR_1^1) = 4c - a - d - 1 ;$$

$$f_1(LL_1^1) = -a ;$$

$$f_1(LR_1^1) = 4 - c - 2$$

LANGKAH 2: (Langkah Induksi)

Misalkan telah terkonstruksi fungsi

$$\hat{f}_n : \{A \mid -n \leq x \leq n + 1\} \cup \{B \mid -n \leq x \leq n + 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Sedemikian hingga perluasan harmonisnya

$f_n : S_n \rightarrow \mathbb{Z}$ memenuhi enam kondisi berikut:

- (1) Peta f_n mencakup setiap bilangan bulat dalam interval $[-n, n + 1]$

- (2) Untuk $0 < i < n$, estimasi nilai $f_n(UL_n^i)$ adalah

$$f_n(UL_n^i) = (-1)^i \{f_n(UL_n^0) - 4i f_n(UL_{n-1}^0)\} \\ \pm \frac{i}{i+1} f_n(UL_{n-1}^0)$$

dan

$$f_n(UL_n^n) = (-1)^n \left\{ \begin{array}{l} f_n(UL_n^0) - 4n f_n(UL_{n-1}^0) \\ + f_n(UR_{n-1}^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{n}{n+1} f_n(UL_{n-1}^0)$$

- (3) Untuk $0 < i < n$, estimasi nilai $f_n(UR_n^i)$ adalah

$$f_n(UR_n^i) = (-1)^i \{f_n(UR_n^0) - 4i f_n(UR_{n-1}^0)\} \\ \pm \frac{i}{i+1} f_n(UR_{n-1}^0)$$

dan

$$f_n(UR_n^n) = (-1)^n \left\{ \begin{array}{l} f_n(UR_n^0) - 4n f_n(UR_{n-1}^0) \\ + f_n(UL_n^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{n}{n+1} f_n(UR_{n-1}^0)$$

- (4) Untuk $0 < i < n$, estimasi nilai $f_n(LL_n^i)$ adalah

$$f_n(LL_n^i) = (-1)^{i+1} \left\{ \begin{array}{l} f_n(UL_{n-1}^0) \\ - 4i f_n(UL_{n-2}^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{i}{i+1} f_n(UL_{n-2}^0)$$

dan

$$f_n(LL_n^n) = (-1)^n \cdot \left\{ \begin{array}{l} f_n(UL_{n-1}^0) - 4n f_n(UL_{n-2}^0) \\ + f_n(UR_{n-1}^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{n}{n+1} f_n(UL_{n-2}^0)$$

- (5) Untuk $1 < i < n$, nilai $f_n(LR_n^i)$ diestimasi dengan

$$f_n(LR_n^i) = (-1)^{i+1} \left\{ \begin{array}{l} f_n(UR_{n-1}^0) \\ - 4i f_n(UR_{n-2}^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{i}{i+1} f_n(UR_{n-2}^0)$$

dan untuk $n > 1$,

$$f_n(LR_n^n) = (-1)^n \cdot \left\{ \begin{array}{l} f_n(UR_{n-1}^0) - 4n f_n(UR_{n-2}^0) \\ + f_n(UL_{n-1}^0) \end{array} \right\} \\ \pm \frac{n}{n+1} f_n(UL_{n-2}^0)$$

- (6) f_n injektif

Selanjutnya dikonstruksi fungsi $\hat{f}_{n+1}$, perluasan $\hat{f}_n$, sedemikian hingga fungsi perluasan harmoniknya yaitu f_{n+1} juga semua kondisi di atas. Proses ini dilakukan dalam 4 tahap yaitu pada sisi-sisi UL, UR, LL , dan LR dalam domain S_{n+1} .

Misalkan

N_1 = bilangan bulat negatif terbesar yang tidak digunakan dalam pelabelan f_n .

N_2 = bilangan bulat positif terkecil yang tidak digunakan dalam pelabelan f_n .

Definisikan

$$\hat{f}_{n+1}(LL_{n+1}^0) = N_1 ; \hat{f}_{n+1}(LR_{n+1}^0) = N_2$$

$$\hat{f}_{n+1}(UL_{n+1}^0) = p ; \hat{f}_{n+1}(UR_{n+1}^0) = q$$

Dan $\hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n$ untuk semua titik dimana $\hat{f}_n$ telah terdefinisi. Ini berarti $f_{n+1} = f_n$ pada S_n .

Nilai N_1 dan N_2 memastikan bahwa kondisi

(1) dipenuhi oleh f_{n+1} .

Selanjutnya, agar sifat harmonis dari f_{n+1} dipenuhi, maka f_{n+1} didefinisikan sebagai berikut,

LANGKAH 2.1: (sisi $U - L$)

- $f_{n+1}(UL_{n+1}^i) = 4f_{n+1}(UL_n^1) - f_{n+1}(UL_{n+1}^0) - f_{n+1}(UL_{n-1}^0) - f_{n+1}(LL_{n-1}^0)$

- Untuk $1 \leq i \leq n$

$$f_{n+1}(UL_{n+1}^{i+1}) = 4f_{n+1}(UL_n^i) - f_{n+1}(UL_{n+1}^i) - f_{n+1}(UL_{n-1}^i) - f_{n+1}(LL_{n-1}^{i-1})$$

LANGKAH 2.2: (sisi $U - R$)

Pada sisi $U - R$, fungsi f_{n+1} didefinisikan serupa dengan pada STEP 2.1, hanya saja mengganti " UL_{n+1}^i " dengan " UR_{n+1}^i ".

LANGKAH 2.3: (sisi $L - L$)

- Untuk $n > 1$,

$$f_{n+1}(LL_n^i) = 4f_{n+1}(LL_{n-1}^0) - f_{n+1}(LL_n^0) - f_{n+1}(LL_{n-2}^0) - f_{n+1}(UL_{n-1}^0)$$

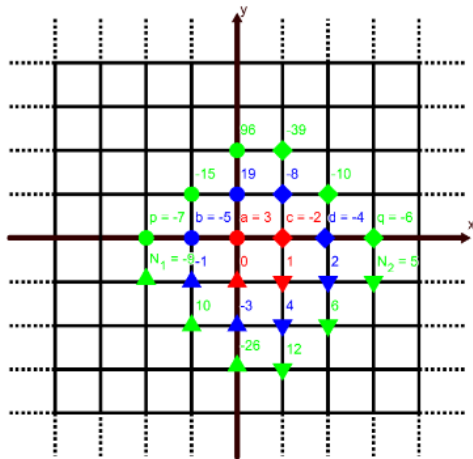
- Untuk titik-titik lain pada sisi $L - L$, f_{n+1} didefinisi sama dengan seperti pada step sebelumnya.

LANGKAH 2.4: (sisi $L - R$)

Pada sisi ini, f_{n+1} didefinisikan serupa dengan argumen pada step sebelumnya.

Perhatikan, karena fungsi f_n injektif pada S_n dan semua titik dalam S_{n+1} diluar S_n berlabel berbeda dan juga berbeda dengan label-label dalam S_n , maka fungsi f_{n+1} injektif. Dengan demikian, ada pelabelan harmonis pada $G = (B(2))^2$. Terbukti ■

Perhatikan gambar 3.14. yang menunjukkan hasil pelabelan harmonis pada graf $(B(2))^2$.



Gambar 14. Label di graf $(B(2))^2$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pemaparan yang disampaikan pada bagian sebelumnya mengenai pelabelan harmonis pada graf takhingga dapat disimpulkan bahwa graf takhingga dengan titik pendant tidak memiliki pelabelan harmonis, namun keberadaan titik pendant merupakan syarat cukup, bukan syarat perlu. Graf G tetap memiliki pelabelan harmonis meskipun label digeser dengan konstanta atau diberi tanda negative. Graf bintang $B(n)$ dengan $n \geq 3$ dan produk kartesius $B(2) \times K_2$ tidak memiliki pelabelan harmonis. Pohon takhingga beraturan- k , $k \geq 2$ dan pengkuadratan $B(2)$ memiliki pelabelan harmonis.

SARAN

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengeksplorasi pelabelan harmonis lemah pada beberapa kelas graf takhingga lainnya. Dengan mengeksplorasi berbagai operasi pada graf, seperti translasi graf, produk kartesian, dan perpangkatan graf, diharapkan dapat ditemukan pola atau karakteristik yang konsisten dalam pelabelan harmonis lemah.

DAFTAR PUSTAKA

- Benjamini, I., Cyr, V., Procaccia, E. B., & Tessler, R. J. (2013). Harmonic labeling of graphs. *Discrete Mathematics*, 313(17), 1726-1745.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). Graph theory, volume 244 of Grad. Texts in Math. Springer, New York, 7, 79-80.

- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Cantor, G. (1891). Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.
- Cormen, T.H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms* (3rd ed.). MIT Press.
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer.
- Gallian, J. A. (2014). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*.
- Rosa, A. (1967). On Certain Valuation of Vertices of a Graph. Dalam *Theory of Graph* (hal. 345-355). Gordon and Breach, N. Y. and Denod, Paris.
- Sarasija, P. B., & Binthiya, R. (2011). Even harmonious graphs with applications. *International journal of computer science and information security*, 9(7), 161.
- Tikasari, A. (2013). Pelabelan Sisi Ajaib dan Sisi Ajaib Super pada Grafkipas, Graf Tangga, Graf Prisma, Graf Lintasan, Grafsikel, dan Graf Buku. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 1(5).
- Taqiyah, D., & Rahadjeng, B. (2022). Pelabelan Harmonis Genap Sejati dari Beberapa Graf Terhubung. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10(3), 361-367.
- West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory* (2nd ed.). Prentice Hall.