

**ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN ADANYA
FAKTOR MUSIM PADA NYAMUK****Avi Shahada Rafli**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : avishahada.21046@mhs.unesa.ac.id

Budi Priyo Prawoto

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : budiprawoto@unesa.ac.id*

Abstrak

Malaria adalah penyakit menular akibat infeksi *Plasmodium*, salah satunya *Plasmodium falciparum* yang paling mematikan dan dapat memengaruhi kekebalan melalui kekebalan klinis, di mana individu terpapar tetapi dapat menularkan tanpa gejala. Penularannya dapat dipengaruhi oleh musim karena nyamuk sebagai vektornya bergantung pada suhu dan kondisi lingkungan. Artikel ini akan membahas model matematika SEIRS-SEI dalam penyebaran malaria dengan mempertimbangkan pengaruh musim dan tingkat kekebalan manusia (*herd immunity*). Model ini membagi populasi manusia menjadi dua jenis utama : non-imun (belum pernah terpapar, paling rentan) serta semi-imun (pernah terpapar, memiliki kekebalan parsial). Hasil konstruksi model menghasilkan dua titik kesetimbangan, yaitu kondisi bebas penyakit, di mana seluruh populasi terpapar, terinfeksi, dan sembuh dengan kekebalan parsial bernilai nol, serta kondisi endemik, saat populasi tersebut bernilai tidak nol. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan setiap titik kesetimbangan dengan bantuan R_0 . Analisa dilakukan melalui syarat nilai parameter dari tingkat gigitan nyamuk (β). Pada simulasi numerik dengan mempertimbangkan faktor musim yang digambarkan dengan fungsi cosinus dengan variasi amplitudo musiman (α), untuk melihat pengaruh musim terhadap dinamika penyebaran malaria. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pada kondisi bebas penyakit, faktor musim memperlambat penurunan kasus dan meningkatkan puncak infeksi. Sementara pada kondisi endemik, musim memperkuat fluktuasi dan memperbesar siklus infeksi berulang, terutama pada populasi manusia non-imun dan vektor.

Kata kunci: Analisis kestabilan, Malaria, *Plasmodium falciparum*, *herd immunity*, Faktor musim pada nyamuk.

Abstract

Malaria is an infectious disease caused by Plasmodium infection, with Plasmodium falciparum being the most lethal species. It can influence immunity through clinical immunity, in which exposed individuals may remain asymptomatic but still capable of transmitting the disease. Its transmission is influenced by seasonal factors, as mosquitoes, the disease vectors, depend on temperature and environmental conditions. This article discusses an SEIRS-SEI mathematical model for malaria transmission, incorporating the effects of seasonality and human immunity levels (herd immunity). The model divides the human population into two main groups: non-immune individuals (never exposed and most vulnerable) and semi-immune individuals (previously exposed with partial immunity). The model yields two equilibrium points: a disease-free equilibrium, where all compartments for exposed, infected, and recovered individuals with partial immunity are zero, and an endemic equilibrium, where those compartments are non-zero. This study aims to analyze the stability of each equilibrium point using the basic reproduction number R_0 . The analysis includes parameter conditions related to mosquito biting rate (β). Numerical simulations are conducted by incorporating seasonal effects represented by a cosine function with varying seasonal amplitude (α), to assess the impact of seasonality on malaria dynamics. The simulation results show that under disease-free conditions, seasonality delays the decline in cases and increases the peak of infection. In endemic conditions, seasonal factors amplify fluctuations and enlarge recurring infection cycles, particularly among the non-immune human population and mosquito vectors.

Keywords: Stability analysis, Malaria, *Plasmodium falciparum*, *herd immunity*, Seasonal factor in mosquitoes.

PENDAHULUAN

Malaria adalah penyakit infeksi yang umum dan mengancam jiwa di banyak daerah tropis dan subtropis. Penyakit ini disebabkan oleh parasit *Plasmodium* yang ditularkan oleh nyamuk *Anopheles*

betina saat menggigit manusia untuk menghisap darah guna perkembangan telurnya. Malaria masih menjadi masalah kesehatan utama di dunia, terutama di wilayah tropis seperti Asia Tenggara. Indonesia menempati peringkat kedua kasus tertinggi di kawasan ini dengan lebih dari 800.000

kasus positif pada tahun 2023 (WHO, 2024). Di wilayah endemik, kelompok paling berisiko terhadap kematian akibat malaria adalah anak-anak balita, wanita hamil, dan orang dewasa tanpa kekebalan alami (Kemenkes.RI, 2022).

Meskipun telah dilakukan berbagai upaya, malaria akibat *P. falciparum* tetap menjadi masalah utama (Bakary et al., 2018). Salah satu tantangan pengendaliannya adalah *herd immunity*, di mana individu yang sering terpapar dapat mengembangkan kekebalan parsial dan menjadi pembawa tanpa gejala. Namun, mereka tetap bisa menularkan parasit ke nyamuk, sementara individu yang belum memiliki kekebalan berisiko mengalami infeksi berat (Armiyati & Prasetyo, 2022). Saat ini, malaria tergolong *re-emerging infectious disease* yang penularannya sangat dipengaruhi oleh faktor musim dan cuaca, seperti curah hujan dan suhu (Zhang et al., 2012). Di Indonesia, yang beriklim tropis dengan dua musim utama, perubahan iklim berdampak besar pada populasi dan aktivitas nyamuk sebagai vektor. Peningkatan suhu, bahkan setengah derajat Celcius, dapat meningkatkan populasi nyamuk hingga dua kali lipat (Barrett et al., 2016).

Karena tingginya kasus dan cepatnya penularan, diperlukan strategi pengendalian yang efektif. Salah satunya melalui pendekatan matematika. Model matematika epidemi digunakan untuk memahami dan memprediksi penyebaran penyakit, mengevaluasi efektivitas intervensi, serta memberikan dasar dalam perumusan kebijakan kesehatan masyarakat (Ferguson, 2009). Model ini umumnya berbentuk sistem persamaan diferensial yang dianalisis untuk menentukan titik keseimbangan dan kestabilannya.

Berbagai penelitian telah mengembangkan model matematika untuk menganalisis penyebaran malaria. Bakary et al., (2018) meneliti model *SEIRS – LSEI* yang membagi populasi manusia berdasarkan tingkat kekebalan menjadi dua yaitu non-imun (belum pernah terpapar, paling rentan), terdiri dari S_e, E_e, I_e dan semi-imun (pernah terpapar, memiliki kekebalan parsial), terdiri dari S_a, E_a, I_a, R_a . Individu non-imun yang terinfeksi (I_a) dapat sembuh dan berpindah ke kelompok semi-imun (R_a) karena telah memperoleh kekebalan parsial akibat infeksi sebelumnya. Serta populasi vektor ke dalam tahap akuatik (L) dan dewasa (S_v, E_v, I_v). Hasilnya bilangan reproduksi dasar (R_0) dipengaruhi oleh

kekebalan populasi serta menjadi penentu keberlangsungan atau punahnya infeksi. Model ini menegaskan pentingnya mempertimbangkan kekebalan parsial dan infeksi ulang dalam strategi pengendalian malaria di daerah endemis.

Selanjutnya, penelitian oleh Fatmawati et al., (2021) dengan mengembangkan model matematika penyebaran malaria yang mempertimbangkan variasi musiman pada laju kelahiran nyamuk. Faktor musim dimasukkan dalam model melalui fungsi periodik kosinus yang merepresentasikan fluktuasi populasi nyamuk sepanjang tahun. Hal ini menunjukkan bahwa mempertimbangkan musim penting untuk memprediksi dinamika malaria secara lebih akurat, khususnya di wilayah tropis seperti Indonesia.

Berdasarkan studi penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dikontruksi kembali model dari penelitian Bakary et al., (2018) yang membagi populasi manusia berdasarkan tingkat kekebalannya menjadi dua kelompok, yaitu non-imun (S_e, E_e, I_e) dan semi-imun (S_a, E_a, I_a, R_a) dan vektor dengan 3 kompartemen yaitu S_v, E_v, I_v , serta menambahkan faktor musim pada laju pertumbuhan vektor mengikuti pendekatan pada penelitian oleh Fatmawati et al., (2021), yang mana untuk mengetahui dampak faktor musim pada populasi nyamuk dalam penyebaran penyakit malaria.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial yang saling berhubungan, dengan n fungsi yang belum diketahui, di mana $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$. Setiap persamaan diferensial dalam sistem saling terhubung dan memiliki hubungan yang konsisten satu sama lain (Goode & Annin, 2017). Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang memuat n persamaan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel tak bebas yang bergantung pada variabel bebas t (Fitria, 2011).

PEMODELAN PENYEBARAN PENYAKIT

Penyebaran penyakit dapat dimodelkan dengan pendekatan kompartemen, seperti model dasar SIR yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick yang membagi populasi menjadi tiga kompartemen: *Susceptible* (S), individu yang rentan terinfeksi; *Infected* (I), individu yang sedang menularkan penyakit; dan *Recovered* (R), individu yang telah sembuh atau memiliki kekebalan pada waktu t masing-masing dinyatakan sebagai $S(t)$, $I(t)$ dan $R(t)$. Sistem persamaan model SIR dinyatakan dengan $\frac{ds}{dt} = -\beta SI$, $\frac{di}{dt} = \beta SI - \alpha I$ dan $\frac{dr}{dt} = \alpha I$, dimana tingkat penyebaran virus sebesar $\beta > 0$ dan tingkat kesembuhan sebesar $\alpha > 0$. $\frac{ds}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{dr}{dt}$ merupakan laju perubahan individu rentan, terinfeksi dan sembuh pada waktu t . Totala populasi dimisalkan N , sehingga $N = S(t) + I(t) + R(t)$. (Castellini & Romanelli, 2007)

Model *SIR* kemudian dikembangkan menjadi model *SEIR* dengan menambahkan kompartemen *Exposed* (E), yaitu individu yang telah terpapar penyakit namun belum menular atau menunjukkan gejala. Kompartemen ini merepresentasikan fase laten sebelum seseorang menjadi infektif (Putra, 2016).

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan adalah titik dimana sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Dengan suatu sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, dikatakan titik equilibrium (kesetimbangan) dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jika memenuhi $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. (Wiggins, 2003).

LINEARISASI

Linearisasi dilakukan untuk menyederhanakan sistem non-linear menjadi bentuk linear di sekitar titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobi, yang terdiri dari turunan parsial fungsi.

Dengan menerapkan deret Taylor pada sistem $\frac{dx}{dt} = F(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = G(x, y)$, di sekitar titik (x_0, y_0) , diperoleh sistem linear :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dengan $u_1 = x - x_0$ dan $u_2 = y - y_0$,

Dapat dituliskan menjadi $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{Ju}$, dengan \mathbf{J} sebagai matriks Jacobian yang dievaluasi di titik (x_0, y_0) . (Boyce et al., 2012)

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Pemodelan epidemi dapat dilakukan salah satunya melalui analisis bilangan reproduksi dasar (R_0), yang menunjukkan rata-rata jumlah kasus baru yang ditularkan satu individu terinfeksi dalam populasi yang sepenuhnya rentan (Omondi et al., 2018).

Salah satu metode yang banyak digunakan untuk menghitung R_0 adalah pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM) (Baguelin et al., 2013). NGM menggunakan kompartemen model yang hanya bergantung pada populasi terinfeksi dan mengabaikan populasi rentan. Dengan demikian, \mathcal{F}_i merepresentasikan laju infeksi baru di kompartemen i , sedangkan \mathcal{V}_i merepresentasikan laju pergerakan individu masuk dan keluar dari kompartemen i . Di mana \mathbf{F} dan \mathbf{V} adalah matriks $n \times n$, dengan :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i}(x_0), \mathbf{V} = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i}(x_0),$$

Maka NGM yang biasa disebut matriks K , diperoleh melalui persamaan $K = \mathbf{F}\mathbf{V}^{-1}$. Nilai eigen dominan yang mengacu pada nilai eigen terbesar dari matriks K didefinisikan sebagai R_0 (Diekmann et al., 2010).

SYARAT KESTABILAN

Syarat kestabilan suatu titik kesetimbangan dilihat dengan mengidentifikasi nilai R_0 . Jika $R_0 < 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil, infeksi tidak menyebar dan penyakit akan punah. Jika $R_0 = 1$, setiap kasus menularkan tepat satu kasus baru, sehingga jumlah kasus tetap konstan. Jika $R_0 > 1$, titik bebas penyakit tidak stabil, dan infeksi akan menyebar dan berpotensi menjadi wabah. (Kasbawati, 2009)

METODE

Jenis penelitian ini adalah studi literatur yang membahas penyebaran penyakit malaria dengan model epidemi *SEIRS – SEI*. Studi literatur dilakukan untuk menyelesaikan masalah dengan cara mencari informasi atau data dari beberapa buku dan referensi lainnya baik secara langsung maupun tidak langsung (online). Nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini bersumber dari artikel penelitian sebelumnya yang dikerjakan oleh (Bakary et al., 2018) dan (Fatmawati et al., 2021). Tahapan penelitian yang dilakukan pada penelitian ini yaitu melakukan studi literatur mengenai masalah yang berkaitan dengan penyakit malaria dan model matematika penyebaran penyakit malaria. Selanjutnya menyusun asumsi yang digunakan dalam membentuk model. Setelah itu, membentuk diagram kompartemen dan mengkonstruksi model matematika penyebaran penyakit malaria berdasarkan tingkat kekebalan manusia berupa sistem persamaan diferensial. Tahap terakhir yaitu menentukan bilangan reproduksi dasar R_0 menggunakan *Next Generation Matrix* (NGM).

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONTRUKSI MODEL

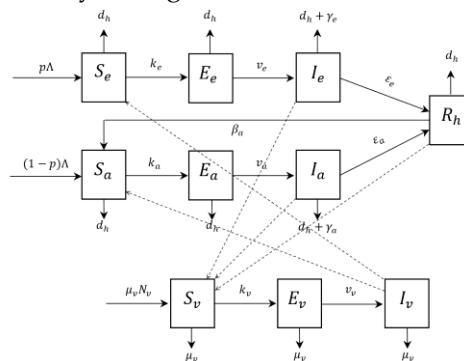
Model yang digunakan dalam penyebaran penyakit malaria pada penelitian ini adalah model *SEIRS – SEI* yang melibatkan dua populasi yaitu populasi manusia dan populasi nyamuk *Anopheles* betina sebagai vektor utama. Dimana populasi manusia dalam model ini terbagi menjadi dua jenis utama berdasarkan tingkat kekebalan yang dimilikinya, yaitu non-imun (S_e, E_e, I_e) dan semi-imun (S_a, E_a, I_a, R_a). Populasi vektor, terbagi menjadi S_v, E_v , dan I_v .

Berikut diberikan beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model penyebaran penyakit malaria dengan faktor musim pada nyamuk:

- 1) Semua ukuran populasi vektor mengacu pada kepadatan nyamuk *Anopheles* betina.
- 2) Penelitian hanya akan meneliti penyakit malaria yang disebabkan oleh *Plasmodium falciparum*, tanpa melibatkan jenis malaria lain.
- 3) Tidak ada penularan langsung antar manusia. Penularan terjadi secara tidak langsung melalui perantara nyamuk *Anopheles* betina.

- 4) Penelitian difokuskan pada daerah endemis tinggi.
- 5) Semua anggota individu baru rentan. Tidak ada imigrasi manusia yang menular.
- 6) Penelitian ini tidak membahas aspek treatment atau pengobatan, karena intervensi terapeutik diasumsikan hanya diberikan kepada individu yang telah terinfeksi
- 7) Penelitian mengabaikan penggunaan obat kina pada pendatang baru di wilayah endemik malaria.
- 8) Semua vektor yang lahir dianggap rentan dengan laju kelahiran sebesar μ_v , yang mengikuti pola musiman melalui fungsi kosinus untuk mencerminkan fluktiasi populasi.
- 9) Individu manusia yang sembuh akan memperoleh kekebalan sementara terhadap malaria dan dapat kembali menjadi rentan dengan laju sebesar β_a .
- 10) Setiap gigitan nyamuk *Anopheles* betina terhadap manusia rentan diasumsikan langsung menyebabkan infeksi.
- 11) Setiap subpopulasi mengalami kematian alami dengan tingkat d_h pada manusia dan μ_v pada nyamuk.
- 12) Angka kelahiran dan angka kematian populasi nyamuk sama.

Berdasarkan asumsi-asumsi dan penjelasan penyebaran penyakit malaria di atas maka dapat dibentuk diagram kompartemen model penyebarannya sebagai berikut :



Gambar 1. Digram Kompartemen dengan :

$$\begin{aligned}
 k_e &= c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h} \\
 k_a &= c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h} \\
 k_v &= c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + c_{av}\beta \frac{I_a}{N_h} + c_{av}\beta \frac{R_a}{N_h}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Berdasarkan diagram kompartemen dapat dibentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\frac{dS_e}{dt} = p\Lambda - \left(c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h}\right)S_e - d_h S_e, \quad (2)$$

$$\frac{dE_e}{dt} = c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h}S_e - v_e E_e - d_h E_e, \quad (3)$$

$$\frac{dI_e}{dt} = v_e E_e - \varepsilon_e I_e - d_h I_e - \gamma_e I_e, \quad (4)$$

$$\frac{dS_a}{dt} = (1-p)\Lambda + \beta_a R_a - \left(c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h}\right)S_a - d_h S_a, \quad (5)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h}S_a - d_h E_a - v_a E_a, \quad (6)$$

$$\frac{dI_a}{dt} = v_a E_a - d_h I_a - \varepsilon_a I_a - \gamma_a I_a, \quad (7)$$

$$\frac{dR_a}{dt} = \varepsilon_e I_e + \varepsilon_a I_a - d_h R_a - \beta_a R_a, \quad (8)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v \left(1 - \alpha \cos\left(\frac{2\pi t}{365} + \varphi\right)\right) N_v - \left(c_{av}\beta \frac{I_a}{N_h} + c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + \tilde{c}_{av}\beta \frac{R_a}{N_h}\right) S_v - \mu_v S_v, \quad (9)$$

$$\frac{dE_v}{dt} = \left(c_{av}\beta \frac{I_a}{N_h} + c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + \tilde{c}_{av}\beta \frac{R_a}{N_h}\right) S_v - \mu_v E_v - v_v E_v, \quad (10)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = v_v E_v - \mu_v I_v. \quad (11)$$

Masing-masing kompartemen dan parameter dalam model dijelaskan dalam tabel di bawah ini:

Tabel 1. Variabel Pada Model Penyebaran Penyakit Malaria

Variabel	Definisi
S_e	Individu non-imun rentan
E_e	Individu non-imun terpapar
I_e	Individu non-imun terinfeksi
S_a	Individu semi-imun rentan
E_a	Individu semi-imun terpapar
I_a	Individu semi-imun terinfeksi
R_a	Individu sembuh dengan kekebalan parsial
S_v	Nyamuk <i>Anopheles</i> betina rentan
E_v	Nyamuk <i>Anopheles</i> betina terpapar
I_v	Nyamuk <i>Anopheles</i> betina terinfeksi

Tabel 2. Parameter Pada Model Penyebaran Penyakit Malaria

Parameter	Definisi
Λ	Tingkat perekruitman populasi manusia.
d_h	Tingkat kematian alami manusia.
ε_e	Tingkat perpindahan manusia dari keadaan terinfeksi (non- imun) ke keadaan sembuh dengan kekebalan.
ε_a	Tingkat perpindahan manusia dari keadaan terpapar (semi-imun) ke keadaan sembuh dengan kekebalan.
γ_e	Laju kematian karena penyakit pada manusia non-imun
γ_a	Laju kematian karena penyakit pada manusia semi-imun.
β_a	Tingkat kehilangan kekebalan pada manusia.
c_{ev}	Probabilitas infeksi penularan dari manusia non-imun terinfeksi ke nyamuk.
c_{av}	Probabilitas infeksi penularan dari manusia semi-imun terinfeksi ke nyamuk.
\tilde{c}_{av}	Probabilitas infeksi ditularkan dari manusia yang sembuh dengan kekebalan ke nyamuk.
p	Probabilitas rekrutmen populasi manusia.
c_{ve}	Probabilitas transmisi infeksi dari nyamuk terinfeksi ke individu non-imun.

Parameter	Definisi
c_{va}	Probabilitas transmisi infeksi dari nyamuk terinfeksi ke individu semi-imun.
v_v	Tingkat perpindahan nyamuk dari keadaan terpapar menjadi terinfeksi.
β	Tingkat gigitan nyamuk.
μ_v	Tingkat kelahiran/kematian alami nyamuk
α	Amplitudo musiman
φ	Fase musim

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan dicari dengan menyamakan ruas kanan setiap persamaan dengan nol. Untuk perhitungan awal dasar, pengaruh musiman berupa fungsi kosinus sementara diabaikan dan akan digunakan kembali pada analisis dan simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika musim agar lebih realistik.

Berdasarkan persamaan 2-11, didapatkan dua titik kesetimbangan $(S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_v, E_v, I_v)$ dengan membuat semua sistem sama dengan nol. Titik kesetimbangan bebas penyakit (X_0) dengan $\left(\frac{p\Lambda}{d_h}, 0, 0, \frac{(1-p)\Lambda}{d_h}, 0, 0, N_v, 0, 0\right)$, titik kesetimbangan endemik (X_1) dengan $(S_e^*, E_e^*, I_e^*, S_a^*, E_a^*, I_a^*, R_a^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Pada model penyebaran penyakit malaria berdasarkan tingkat imunitas manusia, infeksi berada pada populasi *Exposed* (E) dan *Infected* (I). Populasi *Recovered* (R) juga diperhitungkan karena meskipun telah sembuh, individu dapat kehilangan kekebalan atau kembali rentan, sehingga tetap mempengaruhi dinamika penularan dalam jangka panjang. Sehingga persamaan diferensial yang digunakan adalah persamaan 3,4,6,7,8,10 dan 11.

$$\text{Maka dinyatakan } \mathcal{F} = \begin{pmatrix} c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h}S_e \\ v_v E_v \\ c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h}S_a \\ v_v E_a \\ \varepsilon_e I_e + \varepsilon_a I_a \\ (c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + c_{av}\beta \frac{I_a}{N_h} + \tilde{c}_{av}\beta \frac{R_a}{N_h})S_v \\ v_v I_v \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (v_e + d_h)E_e \\ (\varepsilon_e + d_h + \gamma_e)I_e \\ (v_a + d_h)E_a \\ (\varepsilon_a + d_a + \gamma_a)I_a \\ (d_h + \beta_a)R_a \\ (\mu_v + v_v)E_v \\ \mu_v I_v \end{pmatrix}$$

Dilakukan linearisasi, maka matrik \mathcal{F} dan \mathcal{V} menjadi

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{ve}\beta S_e}{N_h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{va}\beta S_a}{N_h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{va}\beta S_a}{N_h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{ev}\beta S_v}{N_h} & 0 & \frac{c_{av}\beta S_v}{N_h} & \tilde{c}_{av}\beta S_v & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_e & M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_e & 0 & -\varepsilon_a & M_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_7 \end{pmatrix}$$

dengan :

$$\begin{aligned} M_1 &= v_e + d_h, & M_2 &= \varepsilon_e + d_h + \gamma_e, & M_3 &= v_a + d_h, \\ M_4 &= \varepsilon_a + d_a + \gamma_a, & M_5 &= d_h + \beta_a, & M_6 &= \mu_v + v_v, \\ M_7 &= \mu_v \end{aligned} \quad (12)$$

Maka dengan metode *Next Generation Matrix* (NGM) dapat dinotasikan dengan K , diperoleh

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_e \beta c_{ev} v_e}{N_h M_1 M_2} & \frac{S_e \beta c_{vv}}{N_h M_1 M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{S_e \beta v_e}{N_h M_1 M_2} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) & \frac{S_e \beta}{N_h M_1} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{M_5} \right) & \frac{S_e \beta v_e}{N_h M_1 M_2} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) & \frac{S_e \beta}{N_h M_1} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{M_5} \right) & \frac{S_e \beta v_e}{N_h M_1 M_2} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Untuk memperoleh R_0 , dicari nilai eigen dari NGM. Berdasarkan NGM yang ada, didapat dua nilai eigen,

yaitu $\lambda_1 = \beta \sqrt{S_v v_v \left(\left(\frac{S_a c_{va} v_a v_v}{N_h^2 M_3 M_4 M_6 M_7} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) \right) + \left(\frac{S_e S_p c_{pe} v_e}{N_h^2 M_1 M_2 M_6 M_7} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{M_5} \right) \right) \right)}$ dan $\lambda_2 = -\beta \sqrt{S_v v_v \left(\left(\frac{S_a c_{va} v_a v_v}{N_h^2 M_3 M_4 M_6 M_7} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) \right) + \left(\frac{S_e S_p c_{pe} v_e}{N_h^2 M_1 M_2 M_6 M_7} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{M_5} \right) \right) \right)}$

Maka, nilai R_0 yang mengacu pada nilai eigen dominan, didapatkan

$$R_0 = \beta \sqrt{S_v v_v \left(\left(\frac{S_a c_{va} v_a v_v}{N_h^2 M_3 M_4 M_6 M_7} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{M_5} \right) \right) + \left(\frac{S_e S_p c_{pe} v_e}{N_h^2 M_1 M_2 M_6 M_7} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{M_5} \right) \right) \right)}$$

Subtitusi persamaan 12 dan titik kesetimbangan bebas penyakit $(X_0) = \left(\frac{p_A}{d_h}, 0, 0, \frac{(1-p)A}{d_h}, 0, 0, N_v, 0, 0 \right)$, ke dalam R_0 , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$R_0(X_0) = \beta \sqrt{N_v v_v \left(\left(\frac{(1-p)c_{va} v_a}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{d_n + \beta_a} \right) \right) + \left(\frac{pc_{pe} v_e}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{d_n + \beta_e} \right) \right) \right)}$$

ANALISA KESTABILAN

Analisa kestabilan dilakukan melalui nilai R_0 . Analisis dilakukan dengan mengontrol parameter β atau tingkat gigitan nyamuk pada R_0 . Dilakukan analisa dengan dua kondisi berdasarkan titik kesetimbangan yang ada. Dua kondisi tersebut adalah:

1. Kondisi bebas penyakit

Kondisi bebas dari penyakit dinyatakan ketika jumlah individu yang terinfeksi tidak mengalami kenaikan dan mendekati angka nol pada waktu tertentu.

Syarat yang harus dipenuhi adalah $R_0 < 1$
Maka diperoleh :

$$R_0 < 1$$

$$\beta < \sqrt{N_v v_v \left(\left(\frac{(1-p)c_{va} v_a}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{d_n + \beta_a} \right) \right) + \left(\frac{pc_{pe} v_e}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{d_n + \beta_e} \right) \right) \right)} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{p N_v v_v c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)}} + \frac{(1-p) N_v v_p c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (v_a + d_h)(\varepsilon_a + d_n + \gamma_a)(\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{p N_v v_v c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)}} + \frac{(1-p) N_v v_p c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (v_a + d_h)(\varepsilon_a + d_n + \gamma_a)(\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

Maka syarat untuk kondisi bebas penyakit adalah

$$\beta < \sqrt{\frac{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}{(p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e))}}. \quad (13)$$

2. Kondisi endemik

Kondisi endemik dinyatakan ketika jumlah individu yang terinfeksi tetap ada dalam sebuah populasi dan konstan pada waktu tertentu. Syarat yang harus dipenuhi adalah $R_0 > 1$
Maka diperoleh

$$R_0 > 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{N_v v_v \left(\left(\frac{(1-p)c_{va} v_a}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{av} + \frac{\tilde{c}_{av} \varepsilon_a}{d_n + \beta_a} \right) \right) + \left(\frac{pc_{pe} v_e}{\frac{A}{d_h}(v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_e + v_v)\mu_v} \left(c_{ev} + \frac{\tilde{c}_{ev} \varepsilon_e}{d_n + \beta_e} \right) \right) \right)}{A \mu_v (\mu_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)(\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)}} > 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{p N_v v_v c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (\varepsilon_e + d_h)(\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)}} + \frac{(1-p) N_v v_p c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (\varepsilon_a + d_h)(\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)} > 1,$$

$$\beta > \sqrt{\frac{p N_v v_v c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (\varepsilon_e + d_h)(\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)}} + \frac{(1-p) N_v v_p c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (\varepsilon_a + d_h)(\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)} < 1$$

$$\beta > \sqrt{\frac{N_v v_v \left(p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e) + (1-p) N_v v_p c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a) \right)}{\frac{A}{d_h} \mu_v (\mu_v + v_v)(d_h + \beta_a)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{d_h N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

$$\beta < \sqrt{\frac{d_h N_v v_v \left((p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) \right)}{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}} < 1$$

Maka syarat untuk kondisi endemik adalah

$$\beta < \sqrt{\frac{A \mu_v (\mu_e + v_v)(d_h + \beta_a)(v_e + d_n + \gamma_e)(v_a + d_n + \gamma_a)(v_e + d_n + \gamma_e)}{(p c_{pe} v_e (c_{ev} d_h + c_{ev} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_e))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e)) + ((1-p) c_{va} v_a (c_{av} d_h + c_{av} \beta_a + c_{vv} \varepsilon_a))((v_e + d_h)(\varepsilon_e + d_n + \gamma_e))}}. \quad (14)$$

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan menggunakan *Matlab* untuk menganalisis dinamika subpopulasi pada model penyebaran malaria serta menguji kesesuaian antara hasil perhitungan analitik dan numerik. Dalam tahap ini, faktor musim yang sebelumnya belum dimasukkan dalam perhitungan dasar kini diintegrasikan ke dalam model melalui variasi musiman pada populasi nyamuk, guna mengevaluasi pengaruh fluktus terhadap laju penularan dan distribusi subpopulasi secara menyeluruh.

Fungsi musim yang digunakan dalam populasi nyamuk rentan adalah:

$$\mu_v \left(1 - \alpha \cos \left(\frac{2\pi t}{365} + \varphi \right) \right) N_v$$

dimana :

N_v : Total populasi nyamuk

μ_v : Laju kelahiran/kematian alami nyamuk

α : Amplitudo variasi musiman $0 \leq \alpha \leq 1$

φ : Fase musim

Dalam simulasi ini, akan dilakukan 3 variasi amplitudo faktor musim pada nyamuk. Nilai amplitudo (α) yang digunakan adalah:

- $\alpha = 0.3$ (variasi musiman lemah)
- $\alpha = 0.5$ (variasi musiman sedang)
- $\alpha = 0.8$ (variasi musiman kuat)

(Fatmawati et al., 2021)

Fase musim diatur $\varphi = 0$, sebagai referensi awal, menyederhanakan analisis dan menandai awal siklus musiman.

Simulasi numerik dilakukan terhadap kondisi populasi bebas penyakit sampai kondisi endemik. Parameter yang digunakan bersumber dari jurnal rujukan yang disajikan sebagai berikut:

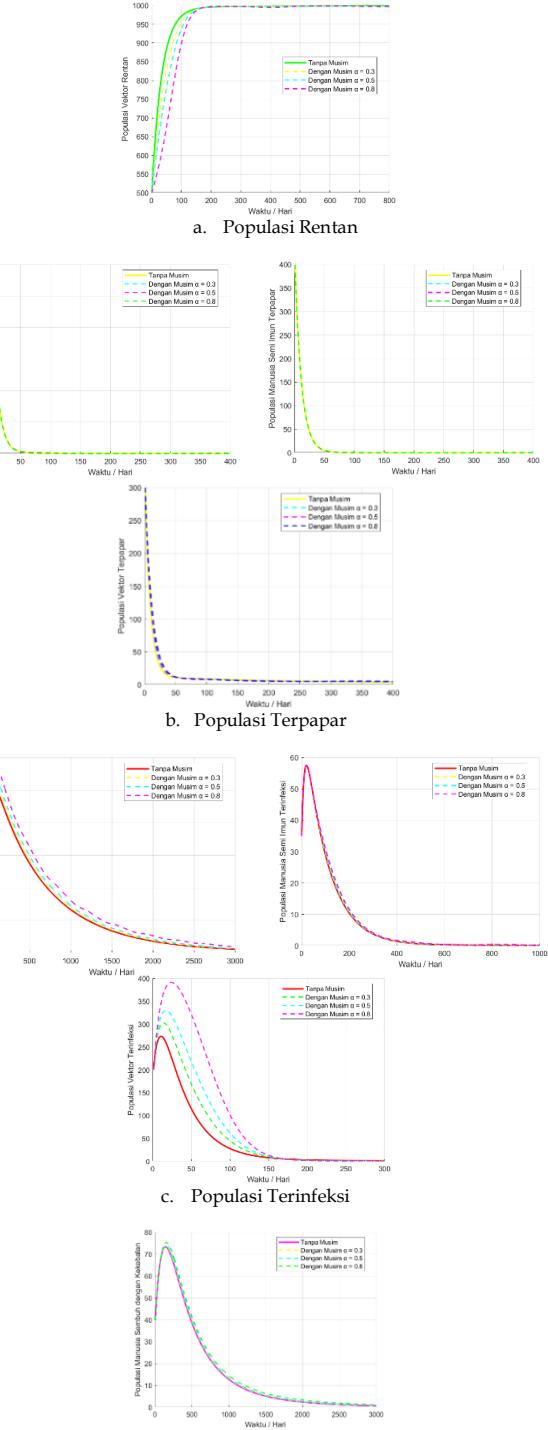
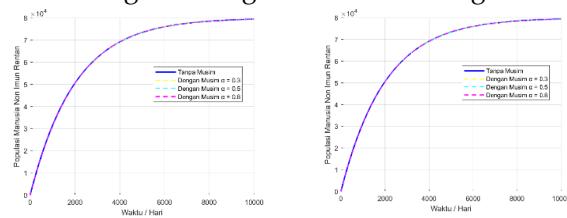
Tabel 3. Nilai Parameter

Parameter	Nilai Parameter	Keterangan	Dimensi
Λ	100	Asumsi	/hari
d_h	0.0005	Bakary et al., 2018	/hari
ε_e	0.001	Bakary et al., 2018	/hari
ε_a	0.01	Bakary et al., 2018	/hari
γ_e	0.00018	Bakary et al., 2018	/hari
γ_a	0.00009	Bakary et al., 2018	/hari
v_e	0.1	Bakary et al., 2018	/hari
v_a	0.09	Bakary et al., 2018	/hari
β_a	0.0027	Bakary et al., 2018	/hari
c_{ev}	0.015	Bakary et al., 2018	/hari
c_{av}	0.01167	Bakary et al., 2018	/hari
\tilde{c}_{av}	0.0000667	Bakary et al., 2018	/hari
p	0.4	Bakary et al., 2018	/hari
μ_v	0.03	Fatmawati et al., 2021	/hari
c_{ve}	0.0023	Bakary et al., 2018	/hari
c_{va}	0.00073	Bakary et al., 2018	/hari
v_v	0.083	Bakary et al., 2018	/hari

Dengan mengambil nilai awal populasi $(S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_v, E_v, I_v) = (40, 30, 25, 60, 40, 35, 40, 500, 300, 200)$

1. Simulasi kondisi bebas penyakit

Kondisi bebas penyakit malaria terjadi jika memenuhi syarat pada persamaan 13. Maka dengan mensubtitusikan nilai parameter pada tabel 3, diperoleh syarat nilai $\beta < 30.689$. Simulasi numerik dilakukan dengan mengambil nilai $\beta = 20$, yang memenuhi syarat tersebut. Selain itu, faktor musiman dimasukkan melalui amplitudo (α) untuk melihat pengaruh fluktuasi musiman terhadap dinamika sistem. Menghasilkan garfik simulasi sebagai berikut:



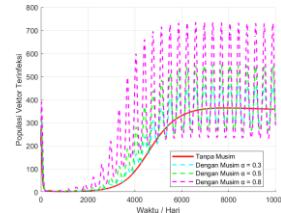
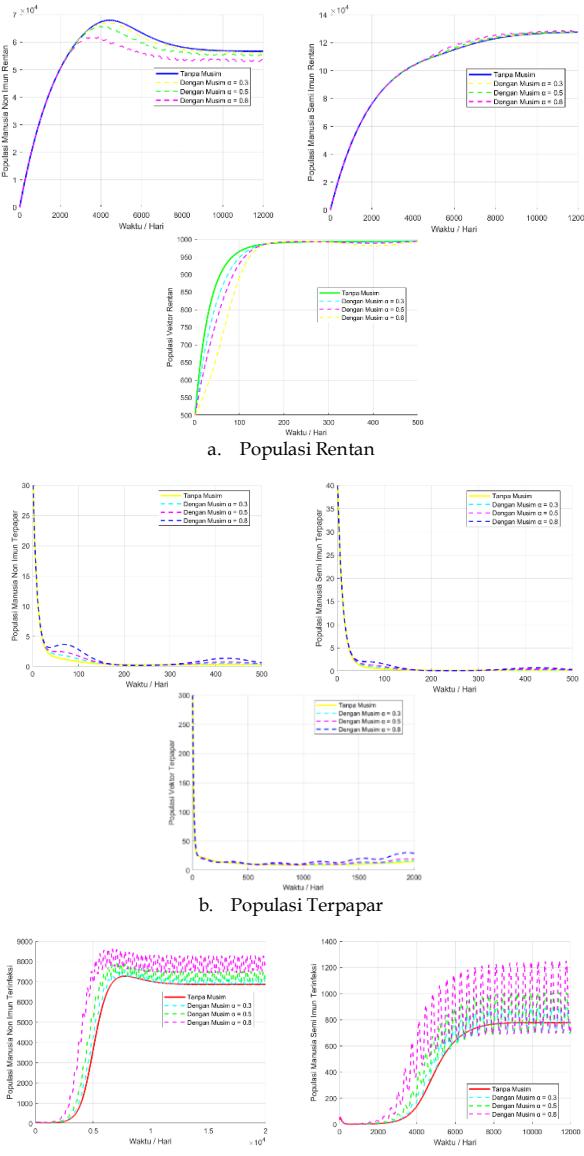
Gambar 1. Grafik Simulasi bebas penyakit dengan $\beta = 20$ dan variasi amplitudo (α)

Dengan mengambil nilai parameter untuk titik bebas penyakit, nilai R_0 yang diperoleh adalah $R_0 = 0.652$. Karena $R_0 = 0.652 < 1$, maka pada kondisi tanpa faktor musim pada nyamuk sistem stabil asimtotik. Pada kondisi bebas penyakit seluruh populasi terinfeksi baik manusia maupun vektor cenderung menuju nol. Namun, kehadiran faktor musiman menyebabkan penurunan yang lebih

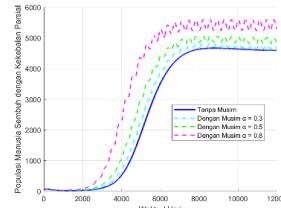
lambat dan memperbesar jumlah kasus di awal infeksi, terutama pada populasi non-imun dan vektor. Tidak terjadi osilasi, tetapi musim memperpanjang fase transien dan memperkuat dinamika infeksi sebelum akhirnya menghilang.

2. Simulasi kondisi bebas penyakit

Kondisi endemik malaria terjadi jika memenuhi syarat pada persamaan 14. Maka dengan mensubtitusikan nilai parameter pada tabel 3, diperoleh syarat nilai $\beta > 30.689$. Simulasi numerik dilakukan dengan mengambil nilai $\beta = 50$, yang memenuhi syarat tersebut. Selain itu, faktor musiman dimasukkan melalui amplitudo (α) untuk melihat pengaruh fluktuasi musiman terhadap dinamika sistem. Menghasilkan garfik simulasai sebagai berikut



c. Populasi Terinfeksi



d. Populasi Manusia Sembuh dengan Kekabalan Parsial
Gambar 2. Grafik simulasi kondisi endemik dengan $\beta = 50$ dan variasi amplitudo (α)

Dengan mengambil nilai parameter untuk titik endemik, nilai R_0 yang diperoleh adalah $R_0 = 1.629$. Karena $R_0 = 1.629 > 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil. Jumlah individu yang terinfeksi masih tetap ada sampai waktu tertentu. Penambahan faktor musim pada populasi nyamuk mempengaruhi dinamika penyebaran malaria dengan memperkuat fluktuasi infeksi dari waktu ke waktu. Dalam kondisi ini, sistem mengalami osilasi periodik di sekitar keseimbangan endemik, terutama saat nilai α tinggi, yang memicu gelombang infeksi besar pada manusia non-imun dan vektor. Fluktuasi juga terjadi pada populasi sembah akibat hilangnya imunitas.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan diperoleh kesimpulan, sebagai berikut:

- Hasil rekonstruksi model penyebaran penyakit malaria dengan faktor musim pada nyamuk dalam bentuk sistem persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_e}{dt} &= p\Lambda - \left(c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h} \right) S_e - d_h S_e, \\
 \frac{dE_e}{dt} &= c_{ve}\beta \frac{I_v}{N_h} S_e - v_e E_e - d_h E_e, \\
 \frac{dI_e}{dt} &= v_e E_e - \varepsilon_e I_e - d_h I_e - \gamma_e I_e, \\
 \frac{dS_a}{dt} &= (1-p)\Lambda + \beta_a R_a - \left(c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h} \right) S_a - d_h S_a, \\
 \frac{dE_a}{dt} &= c_{va}\beta \frac{I_v}{N_h} S_a - d_h E_a - v_a E_a, \\
 \frac{dI_a}{dt} &= v_a E_a - \varepsilon_a I_a - d_h I_a - \gamma_a I_a, \\
 \frac{dR_a}{dt} &= \varepsilon_e I_e + \varepsilon_a I_a - d_h R_a - \beta_a R_a, \\
 \frac{dS_v}{dt} &= \mu_v \left(1 - \alpha \cos \left(\frac{2\pi t}{365} + \varphi \right) \right) N_v - \left(c_{av}\beta \frac{I_a}{N_h} + c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + \tilde{c}_{av}\beta \frac{R_a}{N_h} \right) S_v - \mu_v S_v,
 \end{aligned}$$

$$\frac{dE_v}{dt} = \left(c_{av}\beta \frac{I_e}{N_h} + c_{ev}\beta \frac{I_e}{N_h} + c_{av}\beta \frac{R_a}{N_h} \right) S_v - \mu_v E_v - v_v E_v,$$

$$\frac{dl_v}{dt} = v_v E_v - \mu_v I_v.$$

2. Didapatkan dua titik kesetimbangan, yakni titik kesetimbangan bebas penyakit $X_0 = (S_e, E_e, I_e, S_a, E_a, I_a, R_a, S_v, E_v, I_v) = \left(\frac{p\Lambda}{a_h}, 0, 0, \frac{(1-p)\Lambda}{a_h}, 0, 0, 0, N_v, 0, 0\right)$ dan titik kesetimbangan endemik $X_1 = (S_e^*, E_e^*, I_e^*, S_a^*, E_a^*, I_a^*, R_a^*, S_v^*, E_v^*, I_v^*)$. Dimana kestabilannya bergantung pada nilai parameter yang dianalisis menggunakan (R_0). Dari penelitian diperoleh nilai $R_0(X_0) =$

$$\beta \sqrt{N_v v_v \left(\left(\frac{(1-p)c_{av}v_v}{\frac{\Lambda}{a_h}(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)(\mu_v+v_v)\mu_p} (c_{av} + \frac{c_{av}e_a}{d_h+p_a}) \right) + \left(\frac{pc_{av}v_v}{\frac{\Lambda}{a_h}(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)(\mu_v+v_v)\mu_p} (c_{ev} + \frac{c_{av}e_a}{d_h+\beta_a}) \right) \right)}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit muncul saat nilai $R_0 < 1$, sedangkan titik kesetimbangan endemik tercapai apabila $R_0 > 1$. Dari kedua kondisi tersebut, dapat diperoleh nilai minimum dari tingkat gigitan nyamuk (β) yang diperlukan dalam dinamika penyebaran penyakit yaitu, ketika dalam kondisi bebas penyakit $\beta <$

$$\frac{A\mu_v(\mu_v+v_v)(d_h+\beta_a)((v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)(v_a+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a))}{d_hN_vv_v((pc_{av}v_e(c_{av}d_h+c_{ev}\beta_a+c_{av}e_a))(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)+(1-p)c_{av}v_a(c_{av}d_h+c_{av}\beta_a+c_{av}e_a))(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a))}$$

dan ketika dalam kondisi endemik $\beta >$

$$\frac{A\mu_v(\mu_v+v_v)(d_h+\beta_a)((v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)(v_a+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a))}{d_hN_vv_v((pc_{av}v_e(c_{av}d_h+c_{ev}\beta_a+c_{av}e_a))(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a)+(1-p)c_{av}v_a(c_{av}d_h+c_{av}\beta_a+c_{av}e_a))(v_e+d_h)(e_a+d_h+\gamma_a))}$$

3. Berdasarkan hasil simulasi numerik, dapat disimpulkan bahwa Faktor musim pada populasi nyamuk memicu fluktuasi infeksi dalam dinamika penyebaran malaria. Meskipun nilai reproduksi dasar (R_0). tetap menentukan arah jangka panjang sistem (bebas penyakit atau endemik), musim menyebabkan parameter berubah secara periodik, menghasilkan osilasi musiman. Sistem tetap stabil, namun kestabilannya berupa osilasi yang amplitudonya meningkat seiring nilai α . Pada kondisi bebas penyakit, musim meningkatkan puncak infeksi awal dan memperlambat penurunan kasus, terutama pada vektor. Dalam kondisi endemik, musim memperkuat fluktuasi pada manusia non-imun dan nyamuk.

SARAN

Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan model dengan menambahkan komponen populasi lain dan asumsi tambahan, seperti perilaku manusia, yang memengaruhi dinamika penyebaran malaria. Intervensi eksternal seperti penyemprotan insektisida, penggunaan kelambu, atau vaksinasi juga dapat dimasukkan

untuk melihat dampaknya terhadap populasi nyamuk dan laju penularan. Selain itu, analisis kestabilan dan simulasi numerik dapat diperluas menggunakan pendekatan atau metode numerik lain guna memperoleh pemahaman yang lebih komprehensif terhadap dinamika sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- Armiyati, Y., & Prasetyo, E. (2022). *Immunity Dalam Dunia Kesehatan*.
- Baguelin, M., Flasche, S., Camacho, A., Demiris, N., Miller, E., & Edmunds, W. J. (2013). Assessing Optimal Target Populations for Influenza Vaccination Programmes: An Evidence Synthesis and Modelling Study. *PLoS Medicine*, 10(10). <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.1001527>
- Bakary, T., Boureima, S., & Sado, T. (2018). A mathematical model of malaria transmission in a periodic environment. *Journal of Biological Dynamics*, 12(1), 400–432. <https://doi.org/10.1080/17513758.2018.1468935>
- Barrett, D. H., Ortmann, L. W., Dawson, A., Saenz, C., Reis, A., & Bolan, G. (2016). Public Health Ethics: Cases Spanning the Globe [recurso electrónico]. In *Public Health Ethics Analysis: Cases Spanning the Globe*. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK435786/>
- Boyce, W. E., IPrima, R. C., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Binder Ready Version* (pp. 1-709). https://books.google.fr/books?id=vf_qMgEA_CAAJ
- Castellini, H., & Romanelli, L. (2007). On the propagation of social epidemics in social networks under S.I.R. model. April 2007. <http://arxiv.org/abs/nlin/0703053>
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Roberts, M. G. (2010). The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, 7(47), 873–885. <https://doi.org/10.1098/rsif.2009.0386>
- Fatmawati, Herdicho, F. F., Windarto, Chukwu, W., & Tasman, H. (2021). An optimal control of malaria transmission model with mosquito seasonal factor. *Results in Physics*, 25. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2021.104238>
- Ferguson, N. M. (2009). Mathematical prediction in infection. *Medicine*, 37(10), 507–509. <https://doi.org/10.1016/j.mpmed.2009.07.004>
- Fitria, V. A. (2011). Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-prey dengan

- Perlambatan. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, 2(1), 41–53.
<https://doi.org/10.18860/ca.v2i1.1807>
- Goode, S. W., & Annin, S. A. (2017). *Differential Equations & Linear Algebra*.
- Kasbawati, K. (2009). Penentuan Nilai R₀ dengan Menggunakan Operator The Next Generation. *Jurnal Matematika, Statistika, Dan Komputasi*2, 6(1), 56–64.
- Kemenkes.RI. (2022). Pengendalian Faktor Risiko Malaria. *Petunjuk Teknis Faktor Risiko Malaria*, 1–115.
https://malaria.kemkes.go.id/sites/default/files/2023-11/Petunjuk_Teknis_Pengendalian_Faktor_Risiko_Malaria_2022_0.pdf
- Omondi, E. O., Orwa, T. O., & Nyabadza, F. (2018). Application of optimal control to the onchocerciasis transmission model with treatment. *Mathematical Biosciences*, 297(January 2017), 43–57.
<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2017.11.009>
- Putra, R. T. (2016). Model Epidemi Seir dengan Insidensi Standar. *Jurnal Ilmiah Poli Rekayasa*, 12(1), 73. <https://doi.org/10.30630/jipr.12.1.37>
- WHO. (2024). *World Malaria Report 2024*.
<https://www.wipo.int/amc/en/mediation/>
<https://www.who.int/teams/global-malaria-programme/reports/world-malaria-report-2023>
- Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Issue January 2003).
<https://doi.org/10.1007/b97481>
- Zhang, Y., Liu, Q. Y., Luan, R. S., Liu, X. B., Zhou, G. C., Jiang, J. Y., Li, H. S., & Li, Z. F. (2012). Spatial-temporal analysis of malaria and the effect of environmental factors on its incidence in Yongcheng, China, 2006-2010. *BMC Public Health*, 12(1), 1. <https://doi.org/10.1186/1471-2458-12-544>