

ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN FAKTOR TRANSMIGRASI DAN EFEKTIVITAS PENGOBATAN

Siti Nasyiatun Nafiah

[*sitinasyiatunnafiah2@gmail.com](mailto:sitinasyiatunnafiah2@gmail.com)

(Matematika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar, Indonesia)

M. Nur Haqqul Qomarudin

[*haqquludin@gmail.com](mailto:haqquludin@gmail.com)

(Matematika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar, Indonesia)

Rizka Rizqi Robby

[*rizka.ertiga@gmail.com](mailto:rizka.ertiga@gmail.com)

(Matematika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar, Indonesia)

Ewing Rudita Arini

[*ewingrarini@gmail.com](mailto:ewingrarini@gmail.com)

(Matematika, Fakultas Ilmu Eksakta, Universitas Nahdlatul Ulama Blitar, Indonesia)

Abstrak

Malaria adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh parasit bersel satu dari *genus Plasmodium*, yang hidup dan berkembang biak dalam sel darah manusia. Pada penelitian ini akan menggunakan model SEIR dengan memodifikasi penambahan parameter efektivitas pengobatan dan transmigrasi. Hasil analisis menunjukkan titik kesetimbangan bebas penyakit adalah (S, E, I, R) , sedangkan titik kesetimbangan endemik adalah (S^*, E^*, I^*, R^*) dengan $R_0 = \frac{\beta\mu(\rho-1)}{(\sigma_1-\mu-\sigma_2)(\sigma_1-\delta-\mu-\omega-\sigma_2)(\sigma_1-\varepsilon-\mu-\sigma_2)}$. Kestabilan tercapai ketika nilai eigen kurang dari nol. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil ketika $R_0 < \frac{1}{\delta}$ sedangkan kestabilan titik kesetimbangan endemik stabil ketika $R_0 > \frac{1}{\delta}$. Hasil simulasi menunjukkan peningkatan nilai ω dapat menurunkan penyebaran penyakit malaria, sementara nilai σ_1 dan σ_2 dapat mengontrol penularan dengan membatasi imigrasi dan mempertahankan emigrasi.

Kata Kunci: Malaria, Kestabilan, Efektivitas Pengobatan, Transmigrasi.

Abstract

One parasite belongs to the genus Plasmodium, which lives and feeds on human blood, causes malaria, an infectious disease. This study will use the SEIR model with a correction for the effectiveness of the treatment and transmigration parameters. The analysis's results indicate that the point of free equilibrium is (S, E, I, R) with $R_0 = \frac{\beta\mu(\rho-1)}{(\sigma_1-\mu-\sigma_2)(\sigma_1-\delta-\mu-\omega-\sigma_2)(\sigma_1-\varepsilon-\mu-\sigma_2)}$ while the point of endemic equilibrium is (S^, E^*, I^*, R^*) . Stability occurs when the eigenvalue is not quite at zero. At $R_0 < \frac{1}{\delta}$ the disease-free equilibrium point was stable, whereas at $R_0 > \frac{1}{\delta}$ the endemic equilibrium point was stable. According to the results of the simulation, increasing the value of ω can reduce the incidence of malaria, while the value of σ_1 and σ_2 can control transmission by reducing immigration and emigration.*

Keywords: Malaria, Stability, Treatment Effectiveness, Transmigration.

PENDAHULUAN

Malaria adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh parasit bersel satu dari genus Plasmodium, yang hidup dan berkembang biak dalam sel darah manusia. Penyakit ini umumnya ditularkan melalui gigitan nyamuk betina Anopheles. Dalam upaya pengendalian malaria telah menjadi prioritas di banyak negara endemik. Strategi yang diterapkan meliputi pengendalian vektor dengan penggunaan kelambu berinsektisida, penyemprotan dinding dengan

insektisida residual, diagnosis dini, serta pengobatan yang efektif menggunakan obat antimalaria seperti *artemisinin-based combination therapy* (ACT). Meskipun berbagai upaya telah menunjukkan keberhasilan, resistensi obat yang muncul terhadap artemisinin dan obat-obatan lain menjadi ancaman serius bagi keberlanjutan intervensi ini (Ashley, dkk 2014). Resistensi ini dapat memperburuk penyebaran malaria dan menyebabkan peningkatan angka kematian, terutama di daerah-daerah dengan akses layanan kesehatan yang terbatas.

Upaya menghadapi tantangan ini, model matematika sering digunakan untuk memahami dan merepresentasikan dinamika penyebaran penyakit malaria. Model matematika adalah proses merepresentasikan serta menjelaskan permasalahan dunia nyata ke dalam bentuk pernyataan matematis. Model matematika berfungsi sebagai alat untuk mempermudah menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari (Ihsan, Side, dan Wulandari, 2020). Model ini merumuskan hubungan antar komponen dalam suatu masalah ke dalam persamaan matematis, di mana komponen-komponen tersebut dijadikan variabel (Side & Rangkuti, 2015). Model tersebut didasarkan pada asumsi-asumsi tertentu dan dianalisis untuk memastikan kemampuannya dalam merepresentasikan permasalahan secara akurat. Analisis tersebut dilakukan untuk memastikan bahwa model yang dibangun mampu merepresentasikan permasalahan dengan baik. (Side, Zaki, & Sari, 2018).

Melalui penerapan model matematika, berbagai pendekatan dapat dilakukan untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit. Salah satu pendekatan yang umum digunakan adalah model SEIR. Model ini membagi populasi ke dalam empat kelompok: *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Model SEIR dipilih karena menggambarkan tahapan penyebaran penyakit: individu rentan (*susceptible*) terpapar (*exposed*), memasuki fase laten di mana gejala belum muncul, kemudian menjadi terinfeksi (*infected*), dan akhirnya sembuh (*recovered*) jika berhasil melawan penyakit tersebut (Ihsan, 2021).

Penelitian sebelumnya juga pernah dilakukan oleh Sulistioningtias.ES, dkk (2020) yang menjelaskan tentang Pemodelan penyebaran penyakit malaria ini memperhatikan adanya kelahiran dan kematian alami yang terjadi dalam populasi yang mana laju kelahiran diasumsikan sama dengan laju kematian alami. Selanjutnya dilakukan formulasi model matematika untuk empat kelas populasi yaitu *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I) dan *Recovered* (R). Dipilihnya model ini karena penyebaran penyakit malaria mampu menjangkiti kelompok individu rentan (*susceptible*) menjadi *exposed*, kemudian ada saat dimana penyakit malaria dapat menjangkit namun tidak menunjukkan tanda-tanda gejalanya atau biasa disebut periode laten (*exposed*) akan menjadi *infected*, setelah itu kelompok individu yang terinfeksi penyakit malaria (*infected*) dan mampu bertahan terhadap penyakit malaria akan menjadi kelompok individu sembuh (*recovered*).

Berdasarkan pada uraian latar belakang tersebut, pada penelitian ini akan dilakukan modifikasi terhadap model matematika dari penelitian diatas. Pada

penelitian ini peneliti akan menggunakan model SEIR oleh Sulistioningtias.ES, dkk dengan menambahkan parameter efektivitas pengobatan dan transmigrasi (emigrasi dan imigrasi). Selanjutnya, akan dilakukan pengamatan tentang bagaimana tingkah laku dari model maka dilakukan dengan melakukan analisis terhadap kestabilan model yang ada di sekitar titik kesetimbangan. Setelah itu, model akan diteliti guna mengetahui bagaimana dinamika populasi mempengaruhi penyebaran penyakit malaria dengan menginterpretasikan model yang sudah dibentuk dengan menggunakan simulasi numerik dan mengetahui bagaimana pengaruh yang terjadi dengan adanya efektivitas pengobatan dan transmigrasi (emigrasi dan imigrasi) pada seluruh populasi manusia yang terinfeksi penyakit. Efektivitas pengobatan berperan dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi atau mengurangi tingkat kematian akibat penyakit malaria. Model pengobatan biasanya dimasukkan dalam bentuk kecepatan pemulihan yang bergantung pada faktor-faktor seperti ketersediaan obat, tingkat kepatuhan pasien, dan efisiensi pengobatan dalam mengurangi jumlah individu yang terinfeksi dan untuk Transmigrasi mengacu pada perpindahan individu dari satu tempat ke tempat lain, yang dapat membawa mereka ke daerah yang sudah terinfeksi malaria. Faktor ini dapat mempengaruhi tingkat penyebaran penyakit, karena individu yang baru datang mungkin membawa infeksi atau dapat lebih rentan terhadap penyakit.

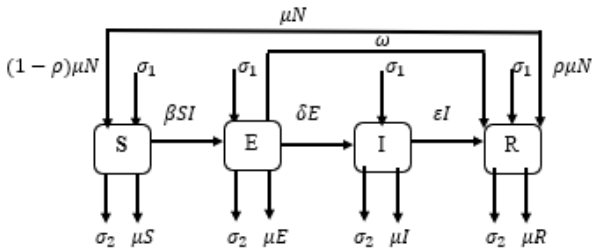
METODE

Penelitian ini diawali dengan kajian literatur untuk mengidentifikasi permasalahan terkait penyebaran malaria, berdasarkan sumber seperti jurnal, artikel, dan buku. Selanjutnya, dilakukan modifikasi model matematika dengan menambahkan parameter efektivitas pengobatan dan transmigrasi. Model yang terbentuk dianalisis untuk menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik.

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dihitung menggunakan matriks Jacobian F dan V, lalu dianalisis kestabilannya melalui nilai eigen. Karena model bersifat nonlinear, dilakukan linearisasi untuk mempermudah analisis kestabilan. Penyelesaian numerik dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan bantuan software MATLAB, hasil simulasi dianalisis untuk menarik kesimpulan mengenai dinamika penyebaran penyakit malaria berdasarkan model yang telah dimodifikasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas model matematika penyebaran penyakit malaria. Dari model matematika penyebaran penyakit malaria akan dicari titik kesetimbangan yang kemudian dianalisis kestabilan titik kesetimbangannya. Langkah selanjutnya akan diberikan simulasi numerik untuk mengetahui tingkah laku model penyebaran penyakit malaria dengan faktor transmigrasi dan efektivitas pengobatan. Modifikasi model yang digunakan pada penyebaran penyakit malaria ini adalah model S, E, I, R yaitu: *Susceptible, Exposed, Infected, dan Recovered*. Modifikasi yang dilakukan pada penelitian ini adalah dengan menambahkan parameter transmigrasi dan efektivitas pengobatan. Penambahan parameter transmigrasi dan efektivitas pengobatan diharapkan dapat digunakan untuk mengetahui model penyakit malaria setelah adanya parameter transmigrasi dan efektivitas pengobatan. Parameter yang digunakan dalam pembentukan model ini adalah μ menyatakan Tingkat kematian dan ρ menyatakan proporsi kematian. β menyatakan tingkat individu rentan menjadi individu laten karena adanya gigitan nyamuk terinfeksi. δ menyatakan peluang individu yang terinfeksi. ε menyatakan peluang Kesembuhan dari setiap individu terinfeksi. ω menyatakan efektivitas pengobatan pada manusia. σ_1 menyatakan laju imigrasi dan σ_2 laju emigrasi.



Gambar 1. Diagram Model Penyakit Malaria dengan Pengaruh Efektivitas pengobatan dan Transmigrasi

Berdasarkan pada diagram gambar 1. diatas maka terbentuk persamaan differensial sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sigma_1 S + (1 - \rho)\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - \sigma_2 S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} + \sigma_1 E - (\delta + \mu + \omega)E - \sigma_2 E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E + \sigma_1 I - (\varepsilon + \mu)I - \sigma_2 I \\ \frac{dR}{dt} &= \varepsilon I + \rho\mu N + \sigma_1 R - \mu R + \omega E - \sigma_2 R \end{aligned} \right\} \dots$$

(1)

a) Titik Kesetimbangan Penyebaran Penyakit

Didapatkan dua titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dinyatakan dalam bentuk $E_0 = (S, E, I, R)$ terjadi jika $I = 0$ maka didapatkan nilai $E = 0$. Karena $E = 0$ dan $I = 0$ maka dari persamaan (1) akan didapatkan nilai $S = \frac{\rho\mu N - \mu N}{\sigma_1 - \mu - \sigma_2}$ dan $R = \frac{\rho\mu N}{\mu - \sigma_1 + \sigma_2}$.

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $E_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\rho\mu N - \mu N}{\sigma_1 - \mu - \sigma_2}, 0, 0, \frac{\rho\mu N}{\mu - \sigma_1 + \sigma_2} \right)$... (2)

pada persamaan (1) dengan menggunakan konstruksi *the next generation matrix* dapat diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$R_0 = \frac{\beta\mu(\rho-1)}{(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2)(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)} \dots$$

(3)

dengan kondisi $(\sigma_1 - \mu - \sigma_2) < 0$ maka analisis matematis model menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar (R_0) akan selalu bernilai positif ($R_0 > 0$). Hal ini mengindikasikan bahwa dalam kerangka model ini, penyakit malaria memiliki potensi untuk bertahan dan menyebar dalam populasi.

2. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah sebuah keadaan dimana terdapat individu yang menderita penyakit sehingga nilai $I \neq 0$. Dengan kondisi $I \neq 0$ maka didapatkan nilai titik kesetimbangan endemik sebagai berikut: $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*) =$... (4)

$$S^* = \frac{(\delta - \mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon + \mu + \sigma_2 - \sigma_1)N}{\beta\delta}$$

$$E^* = (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) \frac{N}{\rho} \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2) + \frac{(1-\rho)\mu N \beta \delta}{(\delta - \mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon + \mu + \sigma_2 - \sigma_1)} \right)$$

$$I^* = (\sigma_1 - \mu - \sigma_2)N + \frac{(1-\sigma)\mu N \beta \delta}{(\delta - \mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon + \mu + \sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$R^* = \varepsilon \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2)N + \frac{(1-\rho)\mu N \beta \delta}{(\delta - \mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon + \mu + \sigma_2 - \sigma_1)} \right) + \sigma\mu N + \omega \left((\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) \frac{N}{\rho} \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2) + \frac{(1-\rho)\mu N \beta \delta}{(\delta - \mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1)(\varepsilon + \mu + \sigma_2 - \sigma_1)} \right) \right)$$

$\sigma_1 - \mu - \sigma_2$

b) Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Pada pembahasan ini akan dilakukan analisis kestabilan pada titik keseimbangan dengan melakukan linearisasi suatu sistem model penyebaran penyakit dari sistem persamaan (1). Selanjutnya hasil sistem persamaan linier yang telah didapatkan disubstitusikan ke dalam matriks jacobian, sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \frac{\beta I}{N} - \mu - \sigma_2 & 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & \sigma_1 - (\delta + \mu + \omega) - \sigma_2 & \frac{\beta S}{N} & 0 \\ 0 & \delta & \sigma_1 - (\varepsilon + \mu) - \sigma_2 & 0 \\ 0 & \omega & \varepsilon & \sigma_1 - \mu - \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \dots(4)$$

1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada pembahasan ini untuk melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit maka titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S, E, I, R)$ pada persamaan (2) disubstitusikan pada matriks jacobian persamaan (4) maka diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & \delta & a_5 & 0 \\ 0 & \omega & \varepsilon & a_6 \end{bmatrix} \quad \dots(5)$$

dimana:

$$a_1 = \sigma_1 - \mu - \sigma_2$$

$$a_2 = -\frac{\beta(\rho\mu N - \mu N)}{N(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}$$

$$a_3 = \sigma_1 - (\delta + \mu + \omega) - \sigma_2$$

$$a_4 = \frac{\beta(\rho\mu N - \mu N)}{N(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}$$

$$a_5 = \sigma_1 - (\varepsilon + \mu) - \sigma_2$$

$$a_6 = \sigma_1 - \mu - \sigma_2$$

Selanjutnya untuk melakukan analisis kestabilan pada titik tetap (4), maka akan dicari nilai eigen berdasarkan (5) yaitu dengan $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ sedemikian hingga dapat diperoleh:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 - \lambda & a_4 & 0 \\ 0 & \delta & a_5 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega & \varepsilon & a_6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(6)$$

Maka diperoleh:

$$(a_1 - \lambda)(a_6 - \lambda)\{(a_3 - \lambda)(a_5 - \lambda) - \delta a_4\} = 0 \quad \dots(7)$$

Dalam hal ini maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 - \mu - \sigma_2 < 0 \quad \dots(8)$$

Pada λ_3 dan λ_4 memiliki beberapa kemungkinan dimana dengan kemungkinan-kemungkinan tersebut memiliki sifat kestabilan. Jadi, λ_3 dan λ_4 dapat dicari uji kestabilan dengan mensubstitusi nilai R_0 maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(a_3 + a_5) \pm \sqrt{(a_3 + a_5)^2 - 4a_3 a_5 (1 - \delta R_0)}}{2} \quad \dots(9)$$

diketahui nilai parameter a_3 dan a_5 bernilai positif sehingga diperoleh $b > 0$, supaya sistem stabil

maka diperoleh nilai $c > 0$ sedemikian hingga berlaku:

$$a_3 a_5 (1 - \delta R_0) > 0 \Leftrightarrow R_0 < \frac{1}{\delta}$$

jika $b^2 - 4c > 0$ maka $Re(\lambda_{3,4}) < 0$ dengan

$$R_0 < \frac{1}{\delta} - \frac{(a_3 + a_5)^2}{\delta a_3 a_5}$$

Berdasarkan hasil perhitungan yang diperoleh, titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dapat dikatakan stabil dengan berlakunya $R_0 < \frac{1}{\delta}$ dimana R_0 merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit yang berupa rata-rata tingkat penularan dibandingkan dengan rata-rata lainnya, maka dapat diamati bahwa kondisi rata-rata tingkat penularan penyakit lebih banyak dari pada rata-rata lainnya. Dengan seiring berjalannya waktu maka penularan penyakit malaria akan tetap ada dan tidak menghilang dari populasi.

2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan Endemik yang sebelumnya sudah diperoleh dari persamaan (4), dengan menulis ulang hasil titik kestabilan yang dikaitkan dengan nilai R_0 , sehingga menghasilkan nilai $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*) =$

$$S^* = \frac{R_0 N (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2) (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)}{\beta}$$

$$E^* = \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (\sigma_1 - \mu - \sigma_2) N}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (1 - \rho) \mu N R_0 \beta \delta}{\rho (\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$I^* = \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (\sigma_1 - \mu - \sigma_2) N}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (1 - \rho) \mu N R_0 \beta \delta}{\rho (\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$R^* = \frac{\varepsilon \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2) N + \frac{(1 - \rho) \mu N R_0}{1} \right) + \sigma_1 \mu N + \omega \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (\sigma_1 - \mu - \sigma_2) N}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (1 - \rho) \mu N R_0}{\rho} \right)}{\sigma_1 - \mu - \sigma_2}$$

selanjutnya akan disubstitusikan pada matriks Jacobi dari nilai E_1 sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 & b_5 & 0 \\ 0 & \delta & b_6 & 0 \\ 0 & \omega & \varepsilon & b_7 \end{bmatrix} \quad \dots(11)$$

dimana:

$$b_1 = \sigma_1 - \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (1 - \rho) \mu R_0 \beta \delta}{\rho (\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) - \mu - \sigma_2$$

$$b_2 = -\beta \left(\frac{R_0 (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2) (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)}{\beta} \right)$$

$$b_3 = \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) (1 - \rho) \mu R_0 \beta \delta}{\rho (\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2) (\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right)$$

$$b_4 = \sigma_1 - (\delta + \mu + \omega) - \sigma_2$$

$$b_5 = R_0 \cdot (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2) (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)$$

$$b_6 = \sigma_1 - (\varepsilon + \mu) - \sigma_2$$

$$b_7 = -(\mu - \sigma_1 + \sigma_2)$$

Langkah selanjutnya untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobi pada persamaan (11), maka akan dilakukan dengan menyelesaikan determinan dari $|J - \lambda I| = 0$. Jadi diperoleh matriks:

$$\begin{vmatrix} b_1 - \lambda & 0 & b_2 & 0 \\ b_3 & b_4 - \lambda & b_5 & 0 \\ 0 & \delta & b_6 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega & \varepsilon & b_7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(12)$$

untuk mencari persamaan karakteristik dengan menghitung determinan persamaan (12) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$(b_7 - \lambda)((b_1 - \lambda)\{(b_4 - \lambda)(b_6 - \lambda) - \delta(b_5)\} - b_3(-\delta b_2)) = 0 \quad \dots(13)$$

Dalam hal ini maka diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -(\mu - \sigma_1 + \sigma_2) < 0$$

Berlaku juga pada bagian akhir dari persamaan (13) sebagai berikut.

$$(b_1 - \lambda)\{(b_4 - \lambda)(b_6 - \lambda) - \delta(b_5)\} - b_3(-\delta b_2) = 0 \quad \dots(14)$$

Pada persamaan (4.51) diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\lambda^3 + (b_1 + b_4 + b_6)\lambda^2 + (b_1b_4 + b_1b_6 + b_4b_6 - \delta b_5)\lambda + b_1b_4b_6 - b_3\delta b_2 = 0$$

Sedemikian hingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0 \quad \dots(15)$$

Dengan koefisien:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = b_1 + b_4 + b_6$$

$$c_2 = b_1b_4 + b_1b_6 + b_4b_6 - \delta b_5$$

$$c_3 = b_1b_4b_6 - b_3\delta b_2$$

Kemudian untuk mencari nilai eigen yang kedua, ketiga dan keempat dapat menggunakan kriteria *Routh Hurwitz*. Sehingga dapat dibentuk matriks *Routh-Hurwitz* sebagai berikut :

$$H^* = \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad \dots(16)$$

Supaya matriks pada persamaan (16) memiliki nilai-nilai karakteristik bernilai negatif maka akan dicari nilai determinan sebagai berikut :

$$H_1 = c_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} = c_1c_2 - c_3 > 0 = c_1c_2 > c_3$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} = (c_1c_2 - c_3)c_3 > 0$$

dengan $H_3 > 0$ maka $c_3 > 0$. Dalam hal ini diperoleh $c_1c_2 > c_3 > 0$ maka $c_2 > 0$.

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwit dimana akar-akar persamaan karakteristik memiliki bagian riil negatif jika memenuhi beberapa kriteria antara lain: $c_1, c_2, c_3 > 0$ dan $c_1c_2 > c_3$. Akar-akar persamaan tersebut memiliki bagian riil negatif jika memenuhi syarat sebagai berikut:

$$1. \quad c_1, c_2, c_3 > 0$$

$$\triangleright \quad c_1 > 0$$

Dengan nilai $c_1 = b_1 + b_4 + b_6$, selanjutnya akan disubstitusikan nilai b_1, b_4 dan b_6 ke c_1 sehingga diperoleh nilai c_1 sebagai berikut:

$$3\sigma_1 - \delta - \varepsilon - 3\mu - \omega - 3\sigma - \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) > 0 \quad \dots(17)$$

Selanjutnya kita kaitkan dengan persamaan (3) maka dihasilkan persamaan sebagai berikut.

$$R_0 > \frac{1}{\delta} \cdot ((3\sigma_1 - \delta - \varepsilon - 3\mu - \omega - 3\sigma)\rho - \beta(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2))(\sigma_1 - \mu - \sigma_2) \frac{(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)}{\beta^2(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu} \quad \dots(18)$$

$$\triangleright \quad c_2 > 0$$

Dengan nilai $c_2 = b_1b_4 + b_1b_6 + b_4b_6 - \delta b_5$, selanjutnya akan disubstitusikan nilai b_1, b_4, b_6 dan b_5 ke c_2 sehingga diperoleh nilai c_2 sebagai berikut:

$$\left(\sigma_1 - \mu - \sigma_2 - \beta \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2) + (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) \left(2\sigma_1 - \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) - \delta - 2\mu - \omega - 2\sigma_2 \right) - \delta R_0 (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2)(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) > 0 \quad \dots(19)$$

Selanjutnya kita kaitkan dengan persamaan (3) maka dihasilkan persamaan sebagai berikut

$$R_0 > \frac{1}{\delta} \left(\frac{ab + ac + bc - \frac{\beta ca(b+c)}{\rho}}{bc \left(1 + \frac{\beta^2(1-\rho)\mu(b+c)}{\rho bcde} \right)} \right) \quad \dots(20)$$

dimana:

$$a = \sigma_1 - \mu - \sigma_2$$

$$b = \sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2$$

$$c = \sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2$$

$$d = \delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2$$

$$e = \varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\triangleright c_3 > 0$$

Dengan nilai $c_3 = b_1 b_4 b_6 - b_3 \delta b_2$, selanjutnya akan disubstitusikan nilai $b_1, b_4, b_6 - b_3 \delta b_2$ ke c_3 sehingga diperoleh nilai c_3 sebagai berikut:

$$(\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2)(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)((\sigma_1 - \mu - \sigma_2 + \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right)) \delta R_0 > 0 \quad \dots(21)$$

Selanjutnya kita kaitkan dengan persamaan (3) maka dihasilkan persamaan sebagai berikut.

$$R_0 > \frac{1}{\delta} \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2)(\rho + \beta(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2))(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2) \frac{(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)}{\beta^2(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(1 - \rho)\mu} \right) \quad \dots(22)$$

$$2. \quad c_1 c_2 > c_3$$

Dengan mensubstitusi nilai c_1, c_2 dan c_3 maka didapatkan nilai sebagai berikut:

$$\left(3\sigma_1 - \delta - \varepsilon - 3\mu - \omega - 3\sigma \right. \\ \left. - \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) \right) \\ \left((\sigma_1 - \mu - \sigma_2 - \beta \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)}) (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2) + \right. \\ \left. (\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) \left(2\sigma_1 - \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) - \delta - 2\mu - \omega - 2\sigma_2 \right) - \right. \\ \left. \delta R_0 (\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2)(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2) \right) > \\ \left((\sigma_1 - \delta - \mu - \omega - \sigma_2)(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2) + \beta \left(\frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2)}{\rho} + \frac{(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(1 - \rho)\mu R_0 \beta \delta}{\rho(\delta - \mu + \omega + \sigma_1 - \sigma_2)(\varepsilon + \mu + \sigma_1 - \sigma_2)} \right) \delta R_0 \right) \quad \dots(23)$$

Selanjutnya kita kaitkan dengan persamaan (3) maka dihasilkan persamaan sebagai berikut.

$$R_0 > \frac{1}{\delta} \cdot (\mu + \sigma_2 - \sigma_1)(\mu + \omega + \sigma_2 - \sigma_1 + \delta) \frac{(\mu + \sigma_2 - \sigma_1 + \varepsilon)}{(1 - \rho)\mu\beta} \\ \left(\frac{\rho^2(3\sigma_1 - \delta - \varepsilon - 3\mu - \omega - 3\sigma_2 - \beta(\sigma_1 - \varepsilon - \mu - \sigma_2)(\sigma_1 - \mu - \sigma_2))}{\mu + \sigma_2 - \sigma_1 + \varepsilon} + \frac{\mu + \sigma_2 - \sigma_1}{\rho} \right) \quad \dots(24)$$

Berdasarkan Persamaan (18), (20), (22) dan (24) dengan hasil perhitungan kriteria *Routh Hurwitz* dapat

disimpulkan bahwa Sistem stabil asimtotik lokal di sekitar titik equilibrium endemik jika semua parameter memenuhi $c_1, c_2, c_3 > 0$ dan $c_1 c_2 > c_3$ sedemikian hingga dengan persamaan (18), (20), (22) dan (24) diperoleh $R_0 > \frac{1}{\delta}$.

Berdasarkan perhitungan dengan analisis kestabilan, titik kesetimbangan endemik (E_1) akan stabil jika berlaku $R_0 > \frac{1}{\delta}$ dimana R_0 merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit yang berupa rata-rata tingkat penularan dibandingkan dengan rata-rata lainnya. maka dapat diamati bahwa kondisi rata-rata tingkat penularan penyakit lebih banyak dari pada rata-rata lainnya. Dengan seiring berjalannya waktu penularan penyakit malaria akan tetap ada dan tidak menghilang dari populasi. Kondisi ini menjamin bahwa semua nilai eigen dari sistem memiliki bagian real negatif, sehingga setiap penyimpangan kecil dari titik setimbang akan teredam secara eksponensial dan sistem akan kembali ke keadaan equilibriumnya seiring waktu.

c) Simulasi Numerik

Pada sub bab ini akan membahas simulasi dari penyebaran pada penyakit malaria menggunakan penyelesaian numerik. Tujuan dari adanya simulasi ini adalah untuk memudahkan dalam memahami tingkah laku pada model penyebaran penyakit malaria. Pada penelitian yang telah dilakukan diperoleh model penyebaran penyakit malaria dengan bentuk persamaan differensial nonlinear. Sistem differensial yang sudah terbentuk akan diselesaikan dengan menggunakan solusi numerik dengan metode runge kutta orde empat. Dengan membedakan model penyebaran pada penyakit malaria sebelum serta sesudah adanya efektivitas pengobatan dan transmigrasi (imigrasi dan emigrasi).

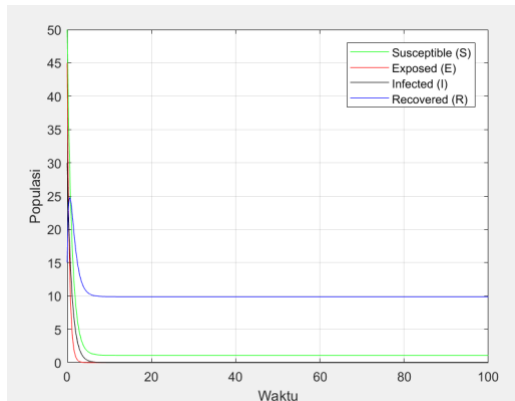
1. Simulasi yang pertama dilakukan pada persamaan (1) dengan menggunakan parameter yang telah diketahui. Nilai parameter yang akan dipergunakan pada simulasi numerik sebagai berikut:

Tabel 1 Nilai Parameter keadaan stabil Non Endemik

Parameter	Nilai	Sumber
N	100	Asumsi
ρ	0,9	Ratna Dwi dkk (2023)
δ	0,02	Ratna Dwi dkk (2023)
β	0,02	Ratna Dwi dkk (2023)
μ	0,01	Ratna Dwi dkk (2023)

ε	0,023	Hisyam Ihsan dkk (2021)
ω	1,0	Hisyam Ihsan dkk (2021)
σ_1	0,5	Asumsi
σ_2	0,8	Asumsi

Simulasi yang dilakukan untuk $t = 0$ sampai dengan $t = 100$ dalam satuan waktu dengan nilai parameter yang akan digunakan harus bernilai positif atau nilai parameter > 0 berdasarkan pada tabel 1.



Gambar 2. Hasil Simulasi Numerik Kondisi Stabil Non Endemik

Berdasarkan nilai parameter pada tabel 1. menunjukkan bahwa model penyebaran malaria dalam keadaan stabil, dimana individu yang sembuh semakin banyak. Pada gambar 2. menunjukkan penyebaran penyakit malaria dalam kurun waktu $0 \leq t \leq 100$ terlihat bahwa sistem mencapai kondisi stabil setelah beberapa waktu. Kurva S (*Susceptible*) terlihat menurun di awal, hal tersebut menunjukkan bahwa efektivitas pengobatan menyebabkan kurva S turun lebih cepat dan kurva R naik lebih awal dan lebih tinggi, seperti bentuk kurva R (biru) yang meningkat sebelum perlahan menurun akibat tidak ada tambahan individu baru. Sementara itu, saat terjadi imigrasi pada individu sehat yang belum terpapar, maka jumlah populasi S akan bertambah. Hal ini akan membuat kurva S tidak langsung turun drastis, bisa melandai atau bahkan naik, tergantung jumlah imigran yang masuk. Penambahan ini juga bisa menyebabkan kurva E dan I meningkat karena ada lebih banyak individu rentan yang dapat tertular. Dalam mengendalikan penyakit campak dengan adanya individu yang bermigrasi maka dapat dilakukan dengan emigrasi. Jika banyak individu dari setiap kelompok keluar, maka semua kurva akan lebih cepat menurun. Dengan kata lain, emigrasi mempercepat penyusutan populasi dalam kelompok sehingga sistem bergerak lebih cepat

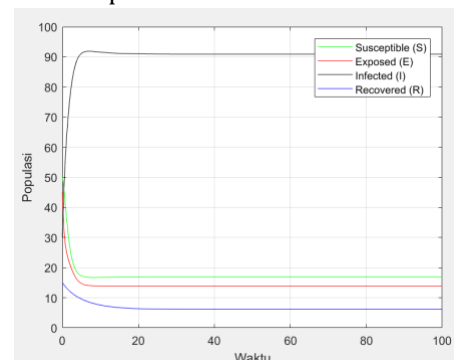
menuju kesetimbangan. Berdasarkan bentuk grafik yang menunjukkan penurunan populasi S dan I yang cepat serta peningkatan tajam R , dapat disimpulkan bahwa jika wabah bisa dikendalikan dengan lebih cepat dengan adanya efektivitas pengobatan dan transmigrasi.

- Selanjutnya simulasi yang akan dilakukan adalah dengan mengubah parameter-parameter kestabilan yang ada menjadi keadaan yang tidak stabil berdasarkan pada syarat kestabilan yang telah diperoleh. Berikut merupakan daftar nilai-nilai dari parameter yang digunakan.

Table 2. Nilai Parameter keadaan tidak stabil Endemik

Parameter	Nilai	Sumber
N	100	Asumsi
ρ	0,001	Asumsi
δ	1,242	Asumsi
β	1,3	Asumsi
μ	0,23	Asumsi
ε	0,01	Asumsi
ω	0,0123	Asumsi
σ_1	0,07	Asumsi
σ_2	0,02	Asumsi

Simulasi yang dilakukan untuk $t = 0$ sampai dengan $t = 100$ dalam satuan waktu dengan nilai parameter yang akan digunakan harus bernilai positif atau nilai parameter > 0 berdasarkan pada tabel 2.



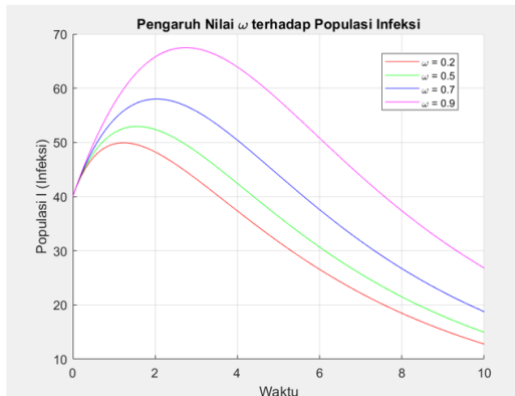
Gambar 3. Hasil Simulasi Numerik tidak Stabil Endemik

Berdasarkan nilai parameter pada tabel 2 dan nilai awal diperoleh bahwa penyebaran penyakit malaria bersifat tidak stabil. Hal ini dikarenakan pada subpopulasi terinfeksi (*infected*) mengalami kenaikan yang tinggi. Berbanding terbalik dengan subpopulasi sembuh (*recovery*) yang terlihat lebih sedikit dibandingkan dengan subpopulasi terinfeksi. Dengan demikian penyebaran penyakit malaria tidak dapat dikendalikan. Oleh karena itu

untuk mengendalikan penyebaran penyakit ini diperlukan lebih banyak pemberian pengetahuan mengenai pola hidup sehat tentang penyakit malaria dan pencegahannya dan pengefektivitasan pengobatan dalam menangani yang terinfeksi.

3. Simulasi Pengaruh Parameter ω (Efektivitas Pengobatan)

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh jumlah individu terinfeksi terhadap efektivitas pengobatan.



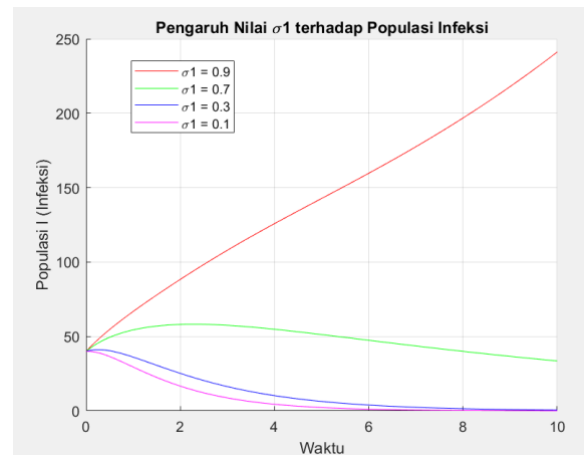
Gambar 4. Hasil Simulasi Parameter Efektivitas Pengobatan (ω)

Berdasarkan gambar 4. dengan adanya upaya efektivitas pengobatan yang dilakukan oleh individu yang terinfeksi, diharapkan penyebaran infeksi dapat dikendalikan. Pada $\omega = 0.2$ terlihat bahwa populasi infeksi menurun sangat lambat dengan jumlah kasus tetap tinggi dalam periode panjang, menunjukkan keterbatasan pengobatan dalam mengendalikan wabah. Ketika efektivitas ditingkatkan menjadi 0.5, terjadi percepatan penurunan kasus meskipun masih memerlukan waktu signifikan untuk mengendalikan penyebaran. Pada $\omega = 0.7$ gambar 4. menunjukkan respons yang lebih cepat dengan penurunan jumlah infeksi, mengindikasikan kemampuan yang lebih baik dalam menekan transmisi penyakit. Puncak pencapaian terlihat pada $\omega = 0.9$ dimana populasi infeksi menurun secara drastis dalam waktu singkat, membuktikan bahwa intervensi pengobatan yang hampir sempurna dapat mengendalikan wabah dengan sangat efektif.

4. Simulasi Pengaruh Parameter Trasmigrasi

a) Imigrasi (σ_1)

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh jumlah individu terinfeksi terhadap parameter imigrasi.

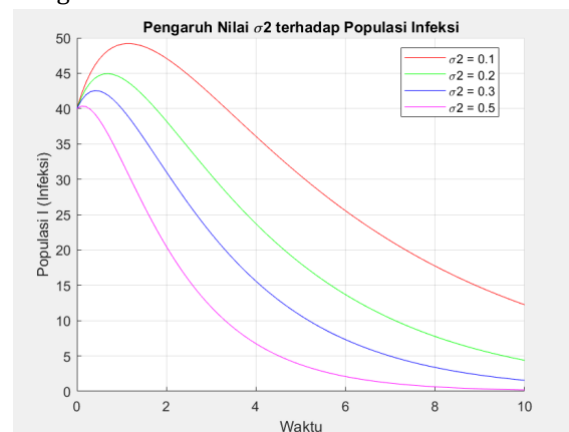


Gambar 5. Hasil Simulasi Parameter Imigrasi (σ_1)

Berdasarkan gambar 5. terjadi bagaimana laju imigrasi individu terinfeksi (σ_1) mempengaruhi dinamika penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Ketika σ_1 bernilai tinggi (0.9), artinya banyak imigran yang masuk, populasi kasus infeksi akan tetap tinggi atau bahkan meningkat karena terus mendapat tambahan kasus baru dari luar. Sebaliknya, saat σ_1 bernilai rendah (0.1), dengan sedikitnya imigran yang masuk, jumlah kasus infeksi bisa turun secara signifikan karena populasi tidak banyak mendapat sumber penularan baru dari luar.

b) Emigrasi (σ_2)

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh jumlah individu terinfeksi terhadap parameter emigrasi.



Gambar 6. Hasil Simulasi Parameter Emigrasi (σ_2)

Berdasarkan gambar 6. pada pengaruh nilai σ_2 terhadap populasi infeksi, semakin tinggi nilai σ_2 dengan nilai $\sigma_2 = 0,5$ menunjukkan proporsi emigrasi individu terinfeksi yang lebih besar, yang berdampak pada penurunan populasi infeksi lebih cepat dalam waktu tertentu. Hal ini terjadi karena individu terinfeksi yang meninggalkan populasi mengurangi sumber penularan, sehingga memperlambat penyebaran penyakit. Sebaliknya, nilai σ_2 yang lebih rendah dengan nilai $\sigma_2 = 0,1$ menunjukkan sedikitnya emigrasi individu terinfeksi, sehingga populasi infeksi cenderung bertahan lebih lama karena sumber penularan tetap ada dalam populasi. Pada nilai σ_2 antara 0.2 hingga 0.3 menunjukkan efek menengah, di mana penurunan populasi infeksi terjadi lebih lambat dibanding $\sigma_2 = 0,5$ tetapi lebih cepat daripada $\sigma_2 = 0,1$. penyelesaian ini mengindikasikan bahwa emigrasi individu terinfeksi berperan penting dalam mengendalikan penyebaran penyakit, di mana semakin tinggi proporsi emigrasinya, semakin efektif pengurangan kasus infeksi dalam populasi tersebut.

Pada gambar 4, untuk mencapai nilai ω yang optimal, diperlukan pendekatan komprehensif meliputi penguatan sistem kesehatan, ketersediaan obat esensial, deteksi dini kasus, dan edukasi masyarakat tentang pentingnya kepatuhan pengobatan. Dengan demikian, peningkatan efektivitas pengobatan tidak hanya menjadi solusi jangka pendek, tetapi juga investasi penting untuk mencegah krisis kesehatan di masa depan.

Pada gambar 5 dan gambar 6, mengungkapkan dinamika penularan penyakit melalui dua sisi mobilitas penduduk yang saling berkaitan. Pada aspek imigrasi (masuknya individu terinfeksi), semakin tinggi nilai σ_1 menunjukkan semakin banyaknya kasus impor yang masuk ke populasi, sehingga mempertahankan atau bahkan meningkatkan jumlah infeksi. Sebaliknya, dalam konteks emigrasi (kepergian individu terinfeksi), nilai σ_2 yang lebih tinggi justru membantu mengurangi beban infeksi dengan mengeluarkan sumber penularan dari populasi. Chinazzi, dkk (2020). Ketika menganalisis dampak gabungan kedua faktor ini, terlihat bahwa keseimbangan antara imigrasi dan emigrasi menentukan dinamika akhir populasi terinfeksi. Sebuah populasi dengan nilai imigrasi tinggi namun emigrasi rendah akan kesulitan mengendalikan wabah, karena terus menerima tambahan kasus tanpa mengurangi sumber penularan yang ada. Di sisi lain, jika emigrasi dapat dipertahankan pada tingkat yang

memadai sambil mengontrol imigrasi, maka populasi infeksi akan menunjukkan penurunan yang lebih stabil.

PENUTUP

SIMPULAN

Model SEIR yang dikembangkan dalam penelitian ini menunjukkan dinamika penyebaran penyakit malaria dengan faktor transmigrasi dan efektivitas pengobatan, sehingga membentuk model sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \sigma_1 S + (1 - \rho)\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - \sigma_2 S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} + \sigma_1 E - (\delta + \mu + \omega)E - \sigma_2 E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E + \sigma_1 I - (\varepsilon + \mu)I - \sigma_2 I \\ \frac{dR}{dt} &= \varepsilon I + \rho\mu N + \sigma_1 R - \mu R + \omega E - \sigma_2 R\end{aligned}$$

Model matematika SEIR penyebaran penyakit malaria dengan pengaruh transmigrasi dan efektivitas pengobatan merupakan model yang terbentuk berupa sistem persamaan diferensial nonlinear dimana Setelah dilakukan perhitungan analisis kestabilan dapat diperoleh 2 titik kestabilan dari titik kesetimbangannya yaitu kestabilan titik tetap non endemik dan titik tetap endemik. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil saat saat $R_0 < \frac{1}{\delta}$ sedangkan titik kesetimbangan endemik akan stabil dalam keadaan yaitu $R_0 > \frac{1}{\delta}$.

Grafik simulasi menunjukkan bahwa efektivitas pengobatan (ω) dan pengelolaan transmigrasi (σ) merupakan dua faktor kunci dalam pengendalian penyakit menular. Peningkatan efektivitas pengobatan melalui sistem kesehatan yang kuat dan akses obat yang memadai dapat menekan penularan, sementara pengaturan keseimbangan antara imigrasi dan emigrasi membantu mengontrol penyebaran penyakit secara geografis. Pendekatan terintegrasi antara intervensi medis dan kebijakan mobilitas merupakan strategi efektif untuk mengendalikan wabah, baik dalam jangka pendek maupun panjang. Dengan demikian, kombinasi optimal dari kedua aspek ini menjadi pondasi penting dalam membangun ketahanan kesehatan masyarakat di era globalisasi.

SARAN

Dalam penelitian selanjutnya, penulis mengusulkan untuk mengembangkan model penyakit malaria

dengan menambahkan analisis bifurkasi ataupun kontrol optimal untuk menekan dan mengurangi penyebaran penyakit malaria.

DAFTAR PUSTAKA

- Abraham, R. (2015). *Dasar-dasar mekanika* (Edisi ke-2). Penerbit Benjamin Cummings.
- Ashley, E. A., Dhorda, M., Fairhurst, R. M., Amaratunga, C., Lim, P., Suon, S., ... & White, N. J. (2014). *Spread of artemisinin resistance in Plasmodium falciparum malaria. New England Journal of Medicine*, 371(5), 411-423.
- Asri Setyowati. (2020) *Penyebaran Penyakit Malaria Model SIRS-Si Dengan Pengobatan, Vaksinasi Dan Penyemprotan*. Jurnal Ilmiah Matematika Volume 8 No. 2 Tahun 2020.
- Bru, R. (2021). *Komputasi matriks: Teori dan aplikasi*. Springer.
- Chinazzi, M., Davis, J. T., Ajelli, M., Gioannini, C., Litvinova, M., Merler, S., ... & Vespignani, A. (2020). *The effect of travel restrictions on the spread of the 2019 novel coronavirus (COVID-19) outbreak*. *Science*, 368(6489), 395-400. DOI: 10.1126/science.aba9757
- Darlina, Leni. 2012. *Kestabilan Titik Equilibrium Model Sir (Susceptible, Infected, Recovered)*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., & Britton, T. (2020). *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*. Princeton University Press.
- Getz, W. M., Lloyd-Smith, J. O., & Cross, P. C. (2021). Modeling the dynamics of infectious diseases: A case study of malaria transmission. *Theoretical Population Biology*, 84(3), 165–175. <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2021.01.005>
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Komputasi matriks* (Edisi ke-4). Johns Hopkins University Press.
- Hidayati, R., Faisal, Yulida, Y. (2017) *Model Matematika Pada Penyebaran Malaria Di Kalimantan Selatan*. Jurnal Matematika Murni dan Terapan “epsilon”. Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 11-18.
- Ihsan, H., Side, S., Wulandari, E. (2020). *Pemodelan Penggunaan E-Money Pada E-Parking Kota*.
- Ihsan, H., Side, S., dkk (2021) *Pemodelan Matematika SEIRS Pada Penyebaran Penyakit Malaria di Kabupaten Mimika*. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*. Vol. 4. No. 1, April 2021
- Kamruzzaman, M., Rahman, M. M., & Hossain, M. S. (2022). Effectiveness of malaria intervention strategies using SEIR model. *BMC Public Health*, 22(1), 876. <https://doi.org/10.1186/s12889-022-13056-7>
- Kaya, Y. (2021). *Analisis sistem nonlinear*. CRC Press.
- Kress, R. (2020). *Analisis numerik* (Edisi ke-2). Springer.
- Ndii, M. Z. (2018). "Angka reproduksi dasar dalam pemodelan penyakit menular". *Model Matematika Terapan*, 62, 1-15.
- Ndii, M. Z., Roberts, M. G., & Hodges, R. (2022). Stability analysis of malaria transmission models incorporating control strategies. *Bulletin of Mathematical Biology*, 84(7), 123. <https://doi.org/10.1007/s11538-022-00987-8>
- Sari, A. (2012). *Karakteristik Penderita Malaria Terhadap Kejadian Malaria di Kecamatan Suka Makmur Kabupaten Aceh Besar Tahun 2012*. *Jurnal Kesehatan Masyarakat*, V (1): 1-2.
- Setiawan, N. F. (2017). *Sistem dinamika lanjutan*. Penerbit Universitas Indonesia.
- Side, S., dkk. (2016). "Analisis kestabilan model epidemiologi". *Jurnal Matematika Terapan*, 2016, 1-8.
- Strang, G. (2022). *Aljabar linear dan pembelajaran dari data* (Edisi ke-2). Wellesley-Cambridge Press.
- Sulistioningtias, ES, Lestari, D. (2018) *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Model SEIR*. *Jurnal Kajian dan Terapan Matematika*
- Utami, T. P., et al. (2020). "Faktor Risiko Penyebab Terjadinya Malaria di Indonesia: Literature Review." *Jurnal Surya Medika*, 6(1), 97-104.