

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GABUNGAN GRAF STRING GANDA

Putu Ngurah Harimbawa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia
e-mail: harimbawa@undiksha.ac.id*

Putu Kartika Dewi

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia
e-mail: kartika.dewi@undiksha.ac.id

I Nengah Suparta

Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia
e-mail: nengah.suparta@undiksha.ac.id

Abstrak

Sebuah graf $G(p, q)$ dikatakan harmonis ganjil jika terdapat fungsi injeksi $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga fungsi yang diinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2q - 1\}$ yang didefinisikan sebagai $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ adalah fungsi bijektif. Graf yang memenuhi pelabelan tersebut disebut sebagai graf harmonis ganjil. Penelitian ini memfokuskan kajian pada tiga jenis graf, yaitu graf string, graf string berganda, dan gabungan graf string berganda. Graf string adalah graf linear sederhana dengan pola berurutan antar simpul. Graf string berganda merupakan pengembangan dari graf string dengan struktur tambahan, sedangkan gabungan graf string berganda merupakan penggabungan beberapa graf string berganda dalam satu konstruksi graf. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa gabungan graf string berganda termasuk dalam kelas graf harmonis ganjil. Metode yang digunakan terdiri dari metode deteksi pola, untuk menemukan bentuk pelabelan yang memenuhi syarat, serta metode deduktif aksiomatik, untuk membuktikan secara formal sifat bijektif dari fungsi yang dihasilkan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa gabungan graf string berganda dapat diberi pelabelan harmonis ganjil yang valid, menunjukkan validitas pelabelan tersebut dan memperluas cakupan graf harmonis ganjil. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam pengembangan teori pelabelan graf dan membuka peluang studi lanjutan, khususnya dalam pengembangan struktur graf non-trivial dalam pelabelan harmonis ganjil.

Kata Kunci: pelabelan harmonis ganjil, graf string, graf string berganda, teori graf, struktur gabungan graf

Abstract

A graph $G(p, q)$ is said to be odd harmonious if there exists an injection $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ such that the induced function $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2q - 1\}$ defined by $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ is a bijection. A graph that satisfies this labeling is called an odd harmonious graph. This study focuses on three types of graphs: string graphs, double string graphs, and unions of double string graphs. A string graph is a simple linear graph with a sequential vertex structure. A double string graph is an extension of a string graph with additional branching structures. The union of double string graphs refers to a construction formed by combining multiple double string graphs into a single graph. This research aims to prove that such a union belongs to the class of odd harmonious graphs. The methods employed include pattern detection, used to identify labeling patterns that satisfy the required conditions, and axiomatic deduction, used to formally prove the bijective nature of the induced function. The results indicate that the union of double string graphs can be assigned a valid odd harmonious labeling, thereby confirming the labeling's validity and expanding the class of known odd harmonious graphs. This study contributes to the development of graph labeling theory and opens opportunities for further research, particularly in the exploration of non-trivial graph structures in the context of odd harmonious labeling.

Keywords: odd harmonious labeling, string graph, double string graph, graph theory, union of graphs

PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan salah satu topik yang terus mengalami perkembangan dalam ranah teori graf. Berbagai jenis teknik pelabelan telah diteliti

secara luas, mencakup beragam pendekatan dan karakteristik. Salah satu kategori yang mendapat perhatian khusus adalah pelabelan harmonis beserta turunannya. Dalam survei komprehensif yang disusun oleh Gallian, tercatat lebih dari 350 teknik

pelabelan telah dibahas dalam lebih dari 3600 publikasi ilmiah, mencerminkan luasnya cakupan dan minat dalam bidang ini (Gallian, 2022). Di antara variasi pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil menjadi salah satu yang menarik untuk ditelaah lebih lanjut karena karakteristik uniknya serta potensi aplikasinya pada berbagai kelas graf. Sebagai contoh, Pujiwati et al. (2021) menunjukkan bahwa graf bintang kembar dapat diberi pelabelan harmonis ganjil yang valid. Penelitian-penelitian semacam ini memperluas pemahaman kita tentang aplikasi pelabelan harmonis ganjil dalam berbagai struktur graf, termasuk di dalamnya pengembangan konsep dan definisi formal yang mendasarinya. Untuk memahami lebih lanjut bagaimana pelabelan harmonis ganjil diterapkan dalam berbagai jenis graf, terlebih dahulu perlu dijelaskan definisi formal dari konsep tersebut

Pada tahun 2019, Liang dan Bai memperkenalkan konsep pelabelan harmonis ganjil sebagai berikut. Diberikan graf $G(V,E)$ dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, serta orde $p = |V(G)|$ dan ukuran $q = |E(G)|$. Pelabelan harmonis ganjil pada graf G merupakan fungsi injektif $f:V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2q - 1\}$, yang menginduksi fungsi $f^*:E(G) \rightarrow \{1,3,5, \dots, 2q - 1\}$ dengan definisi $f^*(xy) = f(x) + f(y)$. Jika fungsi f dan f^* memenuhi syarat injektif dan bijektif sebagaimana didefinisikan, maka graf G disebut sebagai graf harmonis ganjil (Liang & Bai, 2009). Berdasarkan definisi tersebut, sejumlah penelitian telah mengidentifikasi berbagai struktur graf yang memenuhi sifat pelabelan harmonis ganjil

Pada tahun 2017, Firmansah dan Yuwono menemukan graf jaring ular (snake net graph) (Firmansah & Yuwono, 2017), dan Firmanash pada tahun 2020 menemukan graf jaring ular ganda (double snake net graph) yang merupakan graf harmonis ganjil (Firmansah, 2020). Kedua hasil ini menjadi dasar untuk memperoleh konstruksi baru dalam bentuk graf string, graf string ganda, dan gabungan graf string ganda. Penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi sifat pelabelan harmonis ganjil pada beberapa kelas graf string, dengan pendekatan pola deduktif dan metode aksiomatik. Fokus utamanya adalah pada definisi dan konstruksi gabungan graf string $R(s,t) \cup R(s,t)$ dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, serta pembuktian bahwa struktur ini memenuhi kriteria sebagai graf harmonis ganjil.

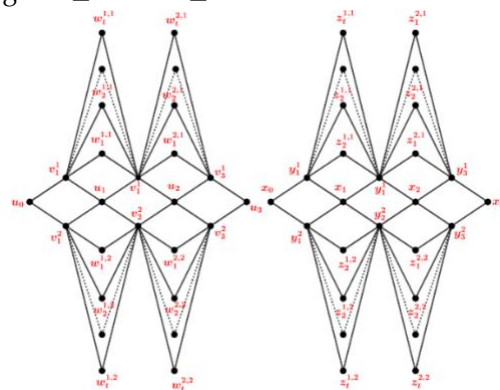
METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan gabungan antara metode eksploratif melalui deteksi pola dan pendekatan deduktif berbasis aksioma didasarkan pada sifat konstruktif dari graf yang diteliti, serta perlunya pembuktian formal terhadap sifat pelabelan harmonis ganjil yang dihasilkan. Pada tahap awal, metode deteksi pola diterapkan dengan melakukan eksplorasi sistematis terhadap beberapa contoh graf gabungan $R(s,t) \cup R(s,t)$ dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, melalui proses coba-coba pelabelan hingga ditemukan pola pelabelan yang memenuhi ketentuan pelabelan harmonis ganjil. Tujuan dari tahap ini adalah untuk merumuskan dugaan bentuk umum pelabelan harmonis ganjil yang berlaku pada keluarga graf string tersebut.

Setelah pola pelabelan diperoleh, penelitian dilanjutkan dengan metode deduktif aksiomatik untuk membuktikan kebenaran dari pola pelabelan yang telah dirumuskan. Pendekatan deduktif ini dilakukan dengan menyusun argumen matematis yang logis dan valid berdasarkan teori graf yang relevan, guna memastikan bahwa pelabelan yang dihasilkan memang memenuhi syarat-syarat pelabelan harmonis ganjil pada $R(s,t) \cup R(s,t)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gabungan graf string ganda $R(s,t) \cup R(s,t)$, dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, dibentuk dari dua buah graf string ganda identik yang digabungkan menjadi satu konstruksi graf. Setiap graf string ganda memiliki struktur berurutan dan bercabang, sehingga gabungannya menghasilkan graf dengan karakteristik kombinatorial yang lebih kompleks. Konstruksi gabungan dari beberapa graf string ganda ditunjukkan pada gambar 1 dengan $R(s,t) \cup R(s,t)$, dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$.



Gambar 1. Gabungan graf string ganda $R(2,3) \cup R(2,3)$

fungsi pelabelan pada simpul dan titik sebagai berikut. Diberikan suatu fungsi pelabelan $f^*: V(R(s, t) \cup R(s, t)) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 16st + 32s + 15\}$. Label untuk setiap simpul didefinisikan sebagai berikut:

- $f(u_i) = 4i \rightarrow 0 \leq i \leq s + 1$
- $f(v_i^j) = 4i + 2j - 5 \rightarrow j = 1, 2 \text{ dan } 0 \leq i \leq s + 1$
- $f(w_1^{i,j}) = (8t + 16)s + 8l - (8t + 12)i - 4j + 10 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t + 1, j = 1, 2$
- $f(x_1) = 4i + 2 \rightarrow 0 \leq i < s + 1$
- $f(y_i^j) = (8t + 12)s + 4i + 4j + 5 \rightarrow 0 \leq i \leq s + 1, j = 1, 2$
- $f(z_1^{i,j}) = (8t + 16)s + 8l - (8l + 12)i - 4j + 12 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t + 1, j = 1, 2$

Berdasarkan fungsi pelabelan $f(u_i)$, $f(v_i^j)$, $f(w_1^{i,j})$, $f(x_1)$, $f(y_i^j)$, dan $f(z_1^{i,j})$, dapat disimpulkan bahwa setiap simpul memperoleh label yang berbeda. Dengan demikian, himpunan simpul $V(R(s, t)) \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 16st + 32s + 15\}$, sehingga fungsi f bersifat injektif.

Selanjutnya, didefinisikan fungsi pelabelan sisi $f^*: E(R(s, t)) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 16st + 32s + 15\}$.

Maka diperoleh:

- $f(u_i v_{i+1}^j) = 8i + 2j - 1 \rightarrow 0 \leq i \leq s, j = 1, 2$
- $f(v_{i+1}^j u_i) = 8i + 2j - 5 \rightarrow 1 \leq i \leq s = 1, j = 1, 2$
- $f(v_1^j w_1^{i,j}) = (8t + 16)s + 8l - (8t + 8)i - 2j + 5 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t, j = 1, 2$
- $f(w_1^{i,j} v_{i+1}^j) = (8t + 16)s + 8l - (8t + 8)i - 2j + 9 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t + 1, j = 1, 2$
- $f(x_i y_{i+1}^j) = (8t + 22)s + 8i + 2j - 5 \rightarrow 0 \leq i \leq s, j = 1, 2$
- $f(y_{i+1}^j x_i) = (8t + 22)s + 8i + 2j - 9 \rightarrow 1 \leq i \leq s + 1, j = 1, 2$
- $f(y_1^j z_1^{i,j}) = (16t + 28)s + 16l - (8t + 8)i - 2j + 13 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t + 1, j = 1, 2$
- $f(z_1^{i,j} y_{i+1}^j) = (16t + 28)s + 16l - (8t + 8)i - 2j + 17 \rightarrow 1 \leq i \leq s, 1 \leq l \leq t + 1, j = 1, 2$

Berdasarkan fungsi pelabelan simpul yang telah dirumuskan sebelumnya, setiap simpul dalam graf $R(s, t) \cup R(s, t)$, dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, memperoleh label berupa bilangan ganjil yang unik, tidak berulang, dan berada dalam rentang $\{0, 1, 2, \dots, 16st + 32s + 15\}$. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi pelabelan simpul f bersifat injektif, sesuai dengan definisi pelabelan harmonis ganjil.

Selanjutnya, fungsi pelabelan sisi f^* didefinisikan berdasarkan hasil penjumlahan dua

label simpul yang bertetangga. Dari pelabelan tersebut, diperoleh bahwa setiap sisi dalam graf juga menerima label bilangan ganjil yang berbeda satu sama lain. Label sisi yang terbentuk merupakan elemen dari himpunan bilangan ganjil dalam interval $\{1, 3, 5, 7, \dots, 16st + 32s + 15\}$, dan jumlahnya sesuai dengan banyaknya sisi pada graf. Karena tidak terdapat dua sisi yang memiliki label yang sama, maka fungsi f^* bersifat bijektif.

Dengan terpenuhinya kedua syarat tersebut, yaitu fungsi pelabelan simpul f bersifat injektif dan fungsi pelabelan sisi f^* bersifat bijektif, maka dapat disimpulkan bahwa gabungan graf string ganda $R(s, t) \cup R(s, t)$, untuk setiap $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, merupakan graf harmonis ganjil.

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini secara langsung memberikan jawaban atas masalah terbuka yang dikemukakan oleh Firmansah (2022) mengenai keberadaan pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf string ganda $R(s, t) \cup R(s, t)$, dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$. Temuan ini secara signifikan menambah satu kelas baru dalam keluarga graf harmonis ganjil, yakni gabungan dari dua graf string ganda yang sebelumnya belum terklasifikasi secara formal. Dengan demikian, penelitian ini memberikan kontribusi nyata dalam pengembangan teori pelabelan graf, khususnya dalam memperluas klasifikasi graf harmonis ganjil.

PENUTUP

Penelitian ini berhasil menunjukkan bahwa gabungan dari beberapa graf string ganda $R(s, t) \cup R(s, t)$, dengan $s \geq 1$ dan $t \geq 1$, dapat diberi pelabelan harmonis ganjil yang sah. Melalui penerapan metode deteksi pola dan pembuktian deduktif aksiomatik, ditetapkan bahwa fungsi pelabelan simpul bersifat injektif dan fungsi pelabelan sisi yang diinduksi bersifat bijektif. Hal ini memenuhi seluruh syarat pelabelan harmonis ganjil sebagaimana didefinisikan dalam literatur. Temuan ini menambah satu lagi kelas graf dalam keluarga graf harmonis ganjil dan memperluas pemahaman tentang penerapan pelabelan harmonis ganjil pada struktur graf gabungan. Dengan demikian, studi lanjutan dapat diarahkan pada generalisasi gabungan multi-graf string serta pengaruh struktur tambahan terhadap sifat pelabelan.

DAFTAR PUSTAKA

- Firmansah, F. (2020). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bunga Double Quadrilateral. *JURNAL ILMIAH SAINS*, 20(1), 12. <https://doi.org/10.35799/jis.20.1.2020.27278>
- Firmansah, F. (2022). ODD HARMONIOUS LABELING ON SOME STRING GRAPH CLASSES. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(1), 315-322. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss1p313-320>
- Firmansah, F., & Yuwono, M. R. (2017). Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product. *Jurnal Matematika "MANTIK,"* 3(2), 87-95. <https://doi.org/10.15642/mantik.2017.3.2.87-95>
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1000. <https://doi.org/10.37236/11668>
- Liang, Z.-H., & Bai, Z.-L. (2009). On the odd harmonious graphs with applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29(1-2), 105-116. <https://doi.org/10.1007/s12190-008-0101-0>
- Pujiwati, D. A., Halikin, I., & Wijaya, K. (2021). *Odd harmonious labeling of two graphs containing star*. 020019. <https://doi.org/10.1063/5.0039644>