

ANALISIS KESTABILAN MODEL SEIR DARI KOINFEKSI PENYAKIT TB DAN PERTUSIS

Muhammad Badrus Sholeh

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : muhammad.20026@mhs.unesa.ac.id**Rudianto Artiono**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : rudiantoartiono@unesa.ac.id**Abstrak**

Koinfeksi antara penyakit Tuberkulosis dan Pertusis merupakan tantangan yang perlu mendapatkan perhatian serius dalam penanganannya. Berdasarkan data dari WHO, tuberkulosis menyumbang 87% dari total kasus global dengan persentase TB di Indonesia mencapai 9,2%. Pada penelitian ini akan menganalisis model koinfeksi Tuberkulosis dan Pertusis untuk mengetahui interaksi pada kedua penyakit serta dinamika penyebaran infeksi dalam populasi. Hasil penelitian menunjukkan terdapat 4 titik kesetimbangan yang terdiri dari titik kesetimbangan penyakit, titik kesetimbangan endemik tuberkulosis, titik kesetimbangan endemik pertusis, dan titik kesetimbangan koinfeksi. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan Next Generation Matrix, pada kasus titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dua bilangan reproduksi dasar, yaitu bilangan reproduksi dasar Pertusis (R_{01}) dan bilangan reproduksi dasar Tuberkulosis (R_{02}). Ketika nilai $R_{01} < 1$ dan $R_{02} < 1$, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil yang menunjukkan kedua penyakit hilang pada populasi dengan jangka waktu tertentu. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} < 1$, maka penyakit pertusis akan tetap ada pada populasi. Namun, apabila $R_{01} < 1$ dan $R_{02} > 1$, penyakit tuberkulosis akan tetap ada pada populasi. Apabila $R_{01} > 1$ dan $R_{02} > 1$, maka kedua penyakit tersebut tetap bertahan dalam populasi. Hasil simulasi numerik menggunakan MATLAB mendukung analisis tersebut..

Kata Kunci: Pertusis, Tuberkulosis, Koinfeksi, Pemodelan Matematika.

Abstract

Concerning the co-infection between Tuberculosis and Pertussis, it is a real issue which should be considered. From data of World Health Organization, TB is the case of 87% of the total global cases, in Indonesia accounted for 9.2% of the percentage of TB. We analyze the Tuberculosis and Pertussis co-infection model to understand how Tuberculosis interacts with the Pertussis system in the face of a growing incidence of differential vaccine and resistance mechanisms and how control of the dynamics of infection can be gained. It is observed that there exist 4 equilibrium points: the disease equilibrium point, the tuberculosis endemic equilibrium point, the pertussis endemic equilibrium point, and the co-infection equilibrium point. Next Generation Matrix is used to express basic reproduction number, in the case of disease-free equilibrium point, two basic reproduction numbers, R_{01} and Tuberculosis basic reproduction number R_{02} . When the value of $R_{01} < 1$ and $R_{02} < 1$, the disease-free equilibrium point will be stable, indicating that both diseases disappear in the population with a certain period of time. If $R_{01} > 1$ and $R_{02} < 1$ indicates pertussis disease will remain in the population, but if $R_{01} < 1$ and $R_{02} > 1$ indicates tuberculosis disease will remain in the population, If $R_{01} > 1$ and $R_{02} > 1$ then both diseases remain in the population. Numerical simulation results using MATLAB can support the analysis results.

Keywords: Pertussis, Tuberculosis, Co-infection, Mathematics Modelling

PENDAHULUAN

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi mendorong berbagai penelitian dalam bidang kesehatan. Salah satu cabang pentingnya adalah epidemiologi, yaitu ilmu yang mempelajari penyebaran penyakit serta faktor-faktor yang memengaruhi kejadian dalam suatu populasi (Bonita dkk., 2006). Ilmu ini bertujuan memahami dan

meningkatkan kesehatan masyarakat. Permasalahan kesehatan pada manusia umumnya berkaitan dengan keberadaan penyakit, terutama penyakit menular.

Penyakit menular adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi tertentu, seperti bakteri. Penularan terjadi dari individu yang terinfeksi ke individu yang rentan, dan dapat berlangsung melalui kontak langsung maupun tidak langsung, misalnya

melalui perantara seperti tumbuhan, hewan, atau benda mati (Miquel., 2014). Menurut laporan World Health Organization (WHO) dalam *Global Tuberculosis Report 2022*, pada tahun 2021 sebanyak 30 negara dengan kasus TB tertinggi menyumbang 87% dari total kasus global. Delapan negara memberikan kontribusi terbesar terhadap dua pertiga dari keseluruhan kasus, yaitu India (28%), Indonesia (9,2%), China (7,4%), Filipina (7%), Pakistan (5,8%), Nigeria (4,4%), Bangladesh (3,6%), dan Republik Demokratis Kongo (2,9%) (WHO, 2022). Berdasarkan data tersebut, Indonesia menempati posisi kedua sebagai negara dengan kasus tuberkulosis tertinggi di dunia. Oleh karena itu, diperlukan perhatian khusus dalam menangani penyakit tuberkulosis.

Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Menurut data Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) tahun 2014, TB menempati posisi sebagai penyakit menular paling mematikan kedua setelah HIV/AIDS di berbagai negara berkembang. Penularan penyakit ini dapat terjadi melalui inhalasi percikan ludah (droplet) dari orang yang terinfeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Selain melalui droplet, penularan juga dapat terjadi ketika bakteri masuk ke tubuh melalui saluran pencernaan, misalnya akibat konsumsi susu yang terkontaminasi dan tidak dipasteurisasi, atau melalui luka pada kulit. Gejala utama TB meliputi batuk selama lebih dari tiga minggu, batuk berdarah, nyeri dada selama tiga minggu atau lebih, serta demam berkepanjangan (S.Crofton., 2009).

Selain tuberkulosis, terdapat penyakit menular lain yang terjadi pada saluran pernapasan, yaitu penyakit pertusis. Pertusis atau batuk rejan juga dikenal sebagai *whooping cough*, *tussi quinta*, *violent cough*, dan di Cina dikenal sebagai batuk seratus hari. Pertusis adalah penyakit yang sangat menular dan menyerang sistem kekebalan manusia, serta disebabkan oleh bakteri *Bordetella pertussis* (Makinen dkk., 2005). *Bordetella pertussis* merupakan bakteri gram-negatif berbentuk kokobasilus (Brady dkk., 2005). Organisme ini menghasilkan toksin yang dapat merusak epitel saluran pernapasan dan menimbulkan efek sistemik berupa sindrom yang ditandai dengan batuk spasmodik dan paroksismal. Batuk ini biasanya disertai suara mengi akibat usaha keras pasien untuk menarik napas, sehingga muncul bunyi khas pada setiap akhir batuk. *Bordetella*

pertussis adalah jenis bakteri yang menyerang saluran pernapasan. Penyakit ini ditandai dengan batuk yang berlangsung selama 28 hingga 100 hari, dengan bayi dan anak-anak sebagai kelompok yang paling rentan tertular (Elooma dkk., 2005). WHO (World Health Organization) melaporkan bahwa kasus pertusis banyak terjadi di negara berkembang. Pada tahun 2019, Cina mencatatkan kasus pertusis tertinggi yaitu 30.072 kasus, diikuti Jepang dengan 16.845 kasus, Rusia 14.407 kasus, Australia 12.021 kasus, dan India 13.208 kasus. Pada tahun sebelumnya, Cina juga mencatatkan jumlah kasus tertinggi, yaitu 22.057 kasus, diikuti Amerika Serikat 15.609 kasus, India 13.208 kasus, Jerman 12.907 kasus, dan Australia 12.555 kasus (Sumarno dkk, 2022). Sementara itu, di Indonesia terdapat 5.643 kasus pertusis, dan jumlah ini berpotensi meningkat setiap tahunnya (Asyabah., 2018).

Salah satu penyakit menular tersebut adalah tuberkulosis. Tuberkulosis menjadi salah satu permasalahan global dan merupakan penyakit yang berkontribusi besar terhadap tingginya angka kematian di dunia. Bagian pendahuluan terutama berisi: (1) permasalahan penelitian; (2) wawasan dan rencana pemecahan masalah; (3) rumusan tujuan penelitian; (4) rangkuman kajian teoritik yang berkaitan dengan masalah yang diteliti. Pada bagian ini kadang-kadang juga dimuat harapan akan hasil dan manfaat penelitian. Panjang bagian pendahuluan sekitar 2-3 halaman dan diketik dengan 1,15 spasi (atau mengikuti ketentuan penulisan jurnal ilmiah tempat artikel tersebut hendak diterbitkan).

Beberapa penelitian telah membahas model penyebaran penyakit pertusis dan tuberkulosis menggunakan berbagai pendekatan epidemiologi. Penelitian oleh Ramadhan Rizki Mustiko et al. (2018) berjudul "*Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis Dengan Strategi DOTS*" menggunakan model SEITR dengan memasukkan strategi pengobatan DOTS. Sementara itu, penelitian Asyabah Zaidan et al. (2018) berjudul "*Pemodelan SIR Untuk Penyebaran Penyakit Pertusis Dengan Vaksinasi Pada Populasi Manusia Konstan*" memodelkan penyebaran pertusis dengan pendekatan VSIR yang mempertimbangkan proses vaksinasi pada populasi konstan. Penelitian terkait koinfeksi juga dilakukan oleh Rizal Mohammad (2021) melalui karya berjudul "*Analisis Dinamik Model Koinfeksi Penyakit Difteri dan Covid-19*", yang menelaah interaksi dua penyakit

dengan karakteristik penularan serupa, yakni sama-sama menyebar melalui droplet dari batuk, bersin, maupun muntah.

KAJIAN TEORI

TUBERKULOSIS

Tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular berbahaya yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis* dan memiliki tingkat kematian tinggi (Shah, 2013). Masa inkubasinya 4–8 minggu dengan gejala seperti batuk lebih dari tiga minggu, demam, kelelahan, penurunan berat badan, nyeri dada, dan keringat malam (Trismanjaya, 2020). Penularan terutama melalui percikan dahak dari pasien TB BTA positif, dan tanpa pengobatan tuntas dapat menyebabkan komplikasi berat hingga kematian. Setelah terhirup, bakteri masuk ke paru-paru dan dapat menyebar ke organ lain (Departemen Kesehatan RI, 2013). Kelompok berisiko tinggi meliputi dewasa muda, masyarakat negara berkembang, tenaga kesehatan, individu dengan imunitas lemah, penderita HIV, dan perokok berat (Kemenkes, 2024)..

PERTUSIS

Sejarah pertusis dimulai pada abad ketujuh ketika Yuangfang Chao menggambarkan penyakit “batuk 100 hari” pada masa Dinasti Sui (Liang dkk., 2010). Pada 1578, Guillaume De Baillou juga mendeskripsikan batuk rejan di Prancis dan menamakannya *quinte* karena paroksismenya (Physician College of Philadelphia, 2019). Wabah pertusis tercatat di Eropa sejak abad ke-16, namun penyebabnya baru diketahui sekitar 300 tahun kemudian. Carl Burger menemukan batang bakteri pada dahak pasien pada 1883 (Allbutt), diikuti oleh Jules Bordet yang mengamati basil gram negatif dan kemudian berhasil mengisolasi *Bordetella pertussis* (Oakley, 1962).

Bordetella pertussis adalah bakteri gram negatif berbentuk kokobasil, aerobik, dan sulit ditumbuhkan, dengan pertumbuhan optimal pada media Bordet Gengou atau Regan Lowe pada suhu 35–37°C serta menghasilkan enzim katalase dan oksidase (Clinical and Laboratory Standar Institute, 2015). Penularannya sangat cepat melalui droplet. Penyakit ini berlangsung melalui tiga fase: kataral (1–2 minggu), paroksimal (2–6 minggu) dengan batuk paroksimal dan suara “whoop”, serta konvalesen

(1–12 minggu) dengan berkurangnya intensitas batuk (Nieves dkk, 2016).

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Dalam penelitian ini, persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan dinamika populasi melalui laju perubahannya. Secara umum, persamaan ini dibedakan berdasarkan karakteristik laju perubahan. Persamaan diferensial memuat turunan untuk menggambarkan perubahan sistem sehingga dapat mendekati kondisi sebenarnya, termasuk perubahan populasi akibat penyakit (Boyce DiPrima, 2009).

PERSAMAAN DIFERENSIAL NON-LINEAR

Persamaan diferensial non-linier adalah persamaan yang nilai berubahnya tidak proporsional dan dapat meningkat secara cepat, salah satu contohnya ditunjukkan pada model pertumbuhan logistic sebagai berikut:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)(a - bP(t)) \quad (1)$$

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem Persamaan Diferensial Kumpulan beberapa persamaan diferensial yang menggambarkan kondisi sesuai realistiknya yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$x(t) = f(x), x \in R^n \quad (2)$$

Dengan

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Adalah fungsi dalam x_1, x_2, \dots, x_n (Boyce DiPrima, 2009)

MODEL PENYAKIT

Model penyakit menggambarkan kondisi penyebaran penyakit dari suatu daerah. Model ini dikatakan non-linear karena ada hubungan yang melibatkan satu subpopulasi bahkan lebih. Beberapa jenis model penyakit sebagai berikut (Fred, 2010) :

1. Model SIR

Model yang terdiri dari 3 kelas yakni S(t), I(t), R(t) dengan kelas Susceptible, Infected,

Recovered. Dengan susceptible individu rentan terinfeksi, infected individu yang terinfeksi, recovered individu yang sembuh dari penyakit (Irwin, 1958). Berikut diagram kompartemen.

Berikut persamaan differensial dari persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \theta I \\ \frac{dR}{dt} &= \theta I \end{aligned} \tag{4}$$

2. Model SEIR

Model yang terdiri dari 3 kelas yakni S(t), E(t), I(t), R(t) dengan kelas Susceptible, Exposed, Infected, Recovered. Dengan susceptible individu rentan terinfeksi, exposed individu yang terinfeksi namun belum aktif menularkan penyakit, infected individu yang terinfeksi, recovered individu yang sembuh dari penyakit. Berikut diagram kompartemen.

Berikut persamaan differensial dari persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \gamma E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - \theta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \theta I \end{aligned} \tag{5}$$

TITIK KESETIMBANGAN (EKUILIBRIUM)

Titik kesetimbangan kondisi sistem persamaan differensial berisikan parameter yang saling berhubungan tidak mengalami perubahan terhadap waktu sebagai berikut (Siddik, 2017) :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Titik dikatakan seimbang apabila memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan persamaanya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

LINEARISASI

Linearisasi merupakan metode mengubah persamaan diferensial nonlinier ke persamaan linier supaya sistem persamaan dalam keadaan stabil dengan menggunakan metode Matriks Jacobian dengan turunan parsial fungsi sebagai berikut (..)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{8}$$

NILAI DAN VEKTOR EIGEN

Misalkan \mathcal{K} merupakan matriks Jacobian J berukuran $n \times n$ dan terdapat vektor u dengan vektor tak nol di dalam R^n yang dinamakan vektor eigen dari \mathcal{K} , berlaku

$$\mathcal{K}u = \lambda u \tag{9}$$

Untuk matriks \mathcal{K} dapat dicari nilai eigennya dengan menggunakan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}u - \lambda Iu &= 0 \\ (\mathcal{K} - \lambda I)u &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Jika determinan dari persamaan sama dengan nol, persamaan dapat dituliskan sebagai berikut

$$\det(\mathcal{K} - \lambda I)u = 0 \tag{11}$$

Dengan u merupakan vektor tak nol, maka persamaan sebagai berikut :

$$\det(\mathcal{K} - \lambda I) = 0 \tag{12}$$

Dari persamaan diatas dapat diperoleh nilai eigen yang dapat digunakan untuk mencari kondisi kestabilan di tiap titik kesetimbangan dan nilai reproduksi dasar.

Nilai eigen digunakan untuk menilai kestabilan pada model penyakit dengan nilai eigen bernilai negative sehingga titik kesetimbangan stabil asimtotik, dan berlaku sebaliknya. Sedang vektor eigen berguna untuk menunjukkan arah apakah menjauhi atau mendekati titik kesetimbangan (Boyce DiPrima, 2009). Berikut table untuk menggambarkan kestabilan dari titik kesetimbangan suatu penyakit sebagai berikut (Wang dkk, 2017) :

| Nilai Eigen | Kestabilan |
|-----------------------------|------------------|
| $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ | Tidak Stabil |
| $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ | Stabil Asimtotik |
| $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ | Tidak Stabil |

| | |
|---------------------------------|------------------|
| $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ | Tidak Stabil |
| $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ | Stabil Asimtotik |
| $\lambda_{1,2} a \pm bi, a > 0$ | Tidak Stabil |
| $\lambda_{1,2} a \pm bi, a < 0$ | Stabil Asimtotik |

Tabel 2.1 : Tabel Jenis Titik dari Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan (Boyce dan DiPrima, 2009)

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar (R_0) yang menunjukkan seberapa cepat menyebar satu penyakit dari suatu orang ke penduduk di suatu wilayah (Domnigo, 2020). Ketentuan dari bilangan reproduksi dasar sebagai berikut :

1. Jika $R_0 > 1$, penyakit akan mewabah (endemik) di suatu daerah.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam suatu daerah.
3. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit lenyap dari daerah tersebut.

MATRIX NEXT GENERATION

Metode ini merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi. Dengan menggunakan metode ini diasumsikan bahwa populasi daerah jensi populasi sama. Berikut merupakan tahapan dari metode ini (Diekmann dan Roberts, 2009).

1. Melakukan linearisasi dengan matriks Jacobian pada subpopulasi terpapar (*Exposed*) dan terinfeksi (*Infected*) di sekitar titik keseimbangan.
2. Memisahkan elemen matriks Jacobian dengan matriks transmisi \mathcal{F} untuk menunjukkan banyak individu yang terinfeksi karena ada kontak dengan individu yang terinfeksi, matriks transisi \mathcal{V} perpindahan subpopulasi terinfeksi ke sembuh, meninggal atau ke kompartemen lain dengan persamaan sebagai berikut :

$$J = \mathcal{F} - \mathcal{V} \tag{13}$$

Dimana :

$$\mathcal{F} = \left[\frac{\partial J_i}{\partial x_i}(x_0, y_0) \right] \text{ dan } \mathcal{V} = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x_0, y_0) \right] \tag{14}$$

3. Mengalikan matriks transmisi (\mathcal{F}) dengan invers dari matriks transisi (\mathcal{V}) dan keduanya berupa matriks persegi berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} \tag{15}$$

Dimana :

$$\mathcal{V}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{V}} x \text{ adj} \mathcal{V} \tag{16}$$

4. Diperoleh nilai bilangan reproduksi (R_0) berupa nilai eigen terbesar dari matriks \mathcal{K} dengan cara :

$$R_0 = \max(\lambda_i), i = 1, 2, 3, \dots, n. \tag{17}$$

METODE PENELITIAN

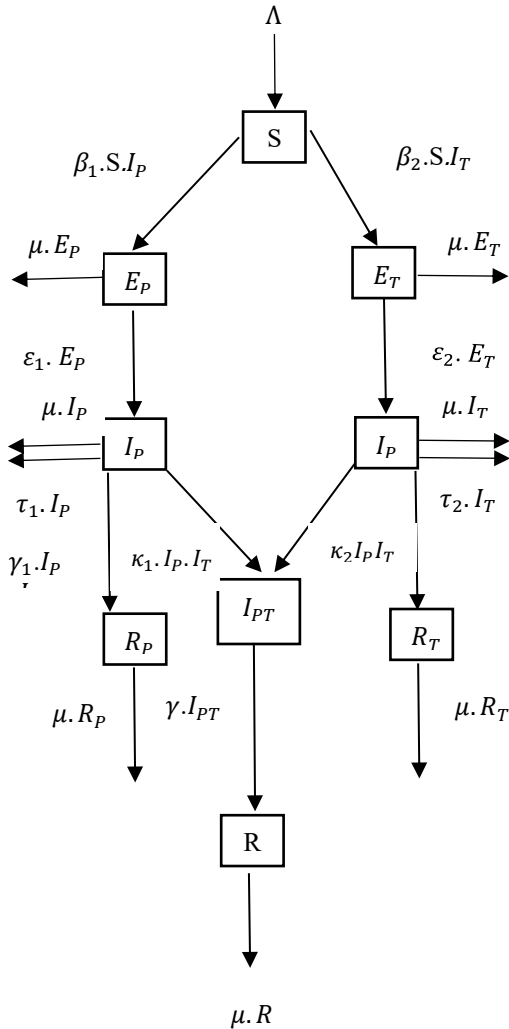
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengkasi atau mengumpulkan informasi melalui mencermati, mencelaah, mendalami serta mengidentifikasi pengetahuan. Tahapan dari penelitian ini adalah : (1) Studi literatur; (2) Menyusun asumsi dan batasan masalah; (3) Mengkonstruksi model matematika dari penyebaran penyakit Tuberkulosis dan Pertusis; (4) Menentukan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar; (5) Analisis jenis kestabilan; (6) Simulasi dengan menggunakan MATLAB; (7) Menarik Kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONTRUKSI MODEL

Model SEIR digunakan sebagai dasar untuk membangun model penyebaran koinfeksi Tuberkulosis dan Pertusis, yang melibatkan sembilan kompartemen subpopulasi. Dengan S menyatakan subpopulasi yang rentan terhadap penyakit, E_p menyatakan subpopulasi yang akan terpapar virus dari penyakit Pertusis, E_T subpopulasi yang akan terpapar virus dari penyakit Tuberkulosis, I_p subpopulasi yang terinfeksi penyakit Pertusis, I_T subpopulasi yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis, I_{PT} subpopulasi yang terinfeksi penyakit Pertusis dan Tuberkulosis, R subpopulasi yang telah sembuh dari penyakit Pertusis dan Tuberkulosis, R_p subpopulasi yang telah sembuh dari Pertusis, R_T subpopulasi yang telah sembuh dari Tuberkulosis. Dalam penyusunan model dibuat asumsi dengan memberikan batasan dalam penelitian ini, seperti a) Populasi bersifat tertutup, b) Tingkat rekrutmen pada individu manusia rentan adalah konstan, c) Terdapat kematian yang disebabkan oleh penyakit, d) Terdapat kematian natural yang terjadi pada setiap kompartemen, e) Subpopulasi rentan yang terinfeksi penyakit tuberkulosis dapat terinfeksi pertusis dan juga sebaliknya, f) Orang yang telah terinfeksi

Pertusis dan Tuberkulosis tidak dapat menginfeksi populasi yang rentan.



Berdasarkan hasil model pada gambar 4.1 maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - (\beta_1 I_p + \beta_2 I_t + \mu)S \quad (4.1)$$

$$\frac{dE_p}{dt} = \beta_1 S I_p - (\mu + \epsilon_1) E_p \quad (4.2)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \beta_2 S I_t - (\mu + \epsilon_2) E_t \quad (4.3)$$

$$\frac{dI_p}{dt} = \epsilon_1 E_p - (\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 I_t) I_p \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_t}{dt} = \epsilon_2 E_t - (\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_2 I_p) I_t \quad (4.5)$$

$$\frac{dI_{pt}}{dt} = (\kappa_1 + \kappa_2) I_p I_t - (\mu + \tau_3 + \gamma) I_{pt} \quad (4.6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I_{pt} - \mu R \quad (4.7)$$

$$\frac{dR_p}{dt} = \gamma_1 I_p - \mu R_p \quad (4.8)$$

$$\frac{dR_t}{dt} = \gamma_2 I_t - \mu R_t \quad (4.9)$$

Dengan

Λ : Laju kelahiran alami.

μ : Laju kematian alami.

β_1 : Laju infeksi dari populasi rentan akibat kontak dengan individu terinfeksi Pertusis.

β_2 : Laju infeksi dari populasi rentan akibat kontak dengan individu terinfeksi Tuberkulosis.

ϵ_1 : Tingkat transisi dari kompartemen E_p ke I_p .

ϵ_2 : Tingkat transisi dari kompartemen E_t ke I_t .

κ_1 : Laju transmisi yang melibatkan individu terinfeksi Pertusis dan Tuberkulosis secara bersamaan.

κ_2 : Tingkat transmisi yang melibatkan individu terinfeksi Tuberkulosis dan Pertusis secara bersamaan.

τ_1 : Laju kematian akibat penyakit Pertusis.

τ_2 : Laju kematian akibat penyakit Tuberkulosis.

τ_3 : Laju kematian akibat koinfeksi Pertusis dan Tuberkulosis.

γ : Laju kesembuhan dari koinfeksi Pertusis dan Tuberkulosis.

γ_1 : Laju kesembuhan dari penyakit Pertusis.

γ_2 : Laju kesembuhan dari penyakit Tuberkulosis.

Dengan asumsi bahwa semua parameter bernilai positif

Tahap berikutnya membuat setiap sub populasi (1) - (9) sama dengan nol, sehingga diperoleh 4 titik kesetimbangan sebagai berikut :

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (Titik kritis 1)

$$\text{Titik kritis 1} = \left\{ S = \frac{\Lambda}{\mu}, E_t = 0, E_p = 0, I_t = 0, I_p = 0, I_{pt} = 0, R = 0, R_p = 0, R_t = 0 \right\}$$

2. Titik Kesetimbangan Endemik Tuberkulosis (Titik kritis 2)

$$\text{Titik kritis 2} = \left\{ S = \frac{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \epsilon_2)}{\mu}, E_p = 0, E_t = \frac{\Lambda}{(\mu + \epsilon_2)} - \frac{\mu(\mu + \tau_2 + \gamma_2)}{\epsilon_2 \beta_2}, I_p = 0, I_t = \frac{\Lambda \epsilon_2}{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \epsilon_2)} - \frac{\mu}{\beta_2}, I_{pt} = 0, R = 0, R_p = 0, R_t = \frac{\gamma_2 \Lambda \epsilon_2}{\mu(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \epsilon_2)} - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \right\}$$

3. Titik Kesetimbangan Endemik Pertusis (Titik kritis 3)

$$\text{Titik kritis 3} = \left\{ S = \frac{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \epsilon_1)}{\epsilon_1 \beta_1}, E_p = \frac{\Lambda}{(\mu + \epsilon_1)} - \frac{\mu(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}{\epsilon_1 \beta_1}, E_t = 0, I_p = \frac{\Lambda \epsilon_1}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \epsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_2}, I_t = 0, I_{pt} = 0, R = 0, R_p = \frac{\gamma_1 \Lambda \epsilon_1}{\mu(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \epsilon_1)} - \frac{\gamma_1}{\beta_1}, R_t = 0 \right\}$$

4. Titik Kesetimbangan Ko-Infeksi (Titik kritis 4)

$$\text{Titik kritis } 4 = \left\{ S = \frac{\Lambda}{\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu}, E_p = \frac{\beta_1 \Lambda I_p^*}{(\mu + \varepsilon_1)(\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu)}, E_t = \frac{\beta_2 \Lambda I_t^*}{(\mu + \varepsilon_1)(\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu)}, I_p = I_p^*, I_t = I_t^*, I_{pt} = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2) I_p^* I_t^*}{(\mu + \tau_1 + \gamma)}, R = \frac{\gamma I_{pt}^*}{\mu}, R_p = \frac{\gamma_1 I_p^*}{\mu}, R_t = \frac{\gamma_1 I_t^*}{\mu} \right\}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan matrix next generation dan hanya pada individu yang terpapar dan terinfeksi sebagai berikut:

$$\frac{dE_p}{dt} = \beta_1 S I_p - (\mu + \varepsilon_1) E_p \quad (4.2)$$

$$\frac{dE_t}{dt} = \beta_2 S I_t - (\mu + \varepsilon_2) E_t \quad (4.3)$$

$$\frac{dI_p}{dt} = \varepsilon_1 E_p - (\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 I_t) I_p \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_t}{dt} = \varepsilon_2 E_t - (\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_2 I_p) I_t \quad (4.5)$$

$$\frac{dI_{pt}}{dt} = (\kappa_1 + \kappa_2) I_p I_t - (\mu + \tau_3 + \gamma) I_{pt} \quad (4.6)$$

Maka diperoleh matriks Jacobian \mathcal{F} sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 S I_p \\ \beta_2 S I_t \\ 0 \\ 0 \\ (\kappa_1 + \kappa_2) I_p I_t \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh matriks \mathcal{F} yang merupakan hasil dari matriks Jacobian dari \mathcal{F} sebagai berikut:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu + \tau_1 + \gamma_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\mu + \tau_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \tau_3 + \gamma) \end{pmatrix}$$

Selanjutnya terdapat matriks \mathcal{V}

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\mu + \varepsilon_1) E_p \\ (\mu + \varepsilon_2) E_t \\ (\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 I_t) I_p - \varepsilon_1 E_p \\ (\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_2 I_p) I_t - \varepsilon_2 E_t \\ (\mu + \tau_3 + \gamma) I_{pt} \end{bmatrix}$$

Hasil dari matriks \mathcal{V} yang diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut :

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\mu + \varepsilon_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu + \varepsilon_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & 0 & (\mu + \tau_1 + \gamma_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & 0 & (\mu + \tau_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu + \tau_3 + \gamma) \end{pmatrix}$$

Sehingga Next Generation Matrixnya diperoleh $K = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda \varepsilon_1}{\mu(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \tau_1 + \gamma_1)} & 0 & \frac{\beta_2 \Lambda \varepsilon_2}{\mu(\mu + \varepsilon_2)(\mu + \tau_2 + \gamma_2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu(\mu + \tau_1 + \gamma_1)} & 0 & \frac{\beta_2 \Lambda}{\mu(\mu + \tau_2 + \gamma_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka dapat diperoleh nilai eigennya sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1 \Lambda \varepsilon_1}{\mu(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}, \lambda_2 = \frac{\beta_1 \Lambda}{\mu(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}, \lambda_3 = \frac{\beta_2 \Lambda \varepsilon_2}{\mu(\mu + \varepsilon_2)(\mu + \tau_2 + \gamma_2)}, \lambda_4 = \frac{\beta_2 \Lambda}{\mu(\mu + \tau_2 + \gamma_2)}$$

λ_1 dan λ_2 merupakan 2 bilangan reproduksi dasar yaitu $\lambda_1 = R_{01} = \frac{\beta_1 \Lambda \varepsilon_1}{\mu(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit pertusis, $\lambda_2 = R_{02} = \frac{\beta_1 \Lambda \varepsilon_1}{\mu(\mu + \varepsilon_1)(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}$ sebagai bilangan reproduksi dasar untuk penyakit tuberkulosis

maka dapat diperoleh Dari persamaan (1) - (9) dan titik kesetimbangan bebabs penyakit, maka dapat diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

ANALISIS KESTABILAN

Dari persamaan (1) - (9) dan titik kesetimbangan bebabs penyakit, maka dapat diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & a_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{48} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{59} & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{bmatrix}$$

Dimana :

- $a_{11} = \beta_1 I_p + \beta_2 I_t + \mu$
- $a_{21} = \beta_2 I_p$
- $a_{31} = \beta_2 I_t$
- $a_{22} = -(\mu + \varepsilon_1)$
- $a_{24} = \varepsilon_1$
- $a_{32} = -(\mu + \varepsilon_2)$
- $a_{34} = \varepsilon_2$
- $a_{41} = -\beta_1 S$
- $a_{42} = -\beta_2 S$
- $a_{44} = -(\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 I_t)$
- $a_{45} = -\kappa_1 I_p$
- $a_{46} = (\kappa_1 + \kappa_2) I_t$
- $a_{48} = \gamma_1$
- $a_{51} = -\beta_2 S$
- $a_{53} = \beta_2 S$
- $a_{54} = -\kappa_1 I_t$
- $a_{55} = -(\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_2 I_p)$

$$\begin{aligned} a_{56} &= (\kappa_1 + \kappa_2)I_p \\ a_{59} &= \gamma_2 \\ a_{66} &= -(\mu + \tau_3 + \gamma) \\ a_{67} &= \gamma \\ a_{77} &= -\mu \\ a_{88} &= -\mu \\ a_{99} &= -\mu \end{aligned}$$

Analisis kestabilan didapatkan dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit dari matriks Jacobian diatas, maka diperoleh 9 nilai eigen sebagai berikut:

- $\lambda_{01} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.
- $\lambda_{02} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.
- $\lambda_{03} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.
-
- $\lambda_{04} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.
- $\lambda_{05} = -\mu - \tau_3 - \gamma$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.

g. $\lambda_{06} = -\frac{\gamma_2\mu + 2\mu^2 + \tau_2\mu + \varepsilon_2\mu + \sqrt{a}}{2\mu}$, dengan nilai

$$a = 4\varepsilon_2\beta_2\Lambda\mu + \gamma_2^2\mu^2 + 2\gamma_2\mu^2\tau_2 - 2\gamma_2\mu^2\varepsilon_2 + \mu^2\tau_2^2 - 2\mu^2\tau_2\varepsilon_2 + \mu^2\varepsilon_2^2$$

akan bernilai negatif dengan syarat

$$4\varepsilon_2\beta_2\Lambda\mu + \gamma_2^2\mu^2 + 2\gamma_2\mu^2\tau_2 - 2\gamma_2\mu^2\varepsilon_2 + \mu^2\tau_2^2 - 2\mu^2\tau_2\varepsilon_2 + \mu^2\varepsilon_2^2 < 0, .$$

h. $\lambda_{07} = \frac{\gamma_2\mu - 2\mu^2 - \tau_2\mu - \varepsilon_2\mu + \sqrt{b}}{2\mu}$, dengan nilai

$$b = 4\varepsilon_2\beta_2\Lambda\mu + \gamma_2^2\mu^2 + 2\gamma_2\mu^2\tau_2 - 2\gamma_2\mu^2\varepsilon_2 + \mu^2\tau_2^2 - 2\mu^2\tau_2\varepsilon_2 + \mu^2\varepsilon_2^2$$

akan bernilai negatif dengan syarat

$$4\varepsilon_2\beta_2\Lambda\mu + \gamma_2^2\mu^2 + 2\gamma_2\mu^2\tau_2 - 2\gamma_2\mu^2\varepsilon_2 + \mu^2\tau_2^2 - 2\mu^2\tau_2\varepsilon_2 + \mu^2\varepsilon_2^2 < 0.$$

Selain itu, berlaku syarat berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_2\mu - 2\mu^2 - \tau_2\mu - \varepsilon_2\mu &> 0 \\ -\mu(2\mu + \tau_2 + \varepsilon_2 - \gamma_2) &> 0 \end{aligned}$$

Dengan tambahan syarat:

$$2\mu + \tau_2 + \varepsilon_2 - \gamma_2 > 0$$

i. $\lambda_{08} = -\frac{\gamma_1\mu + 2\mu^2 + \tau_1\mu + \varepsilon_1\mu + \sqrt{c}}{2\mu}$, dengan nilai

$$c = 4\varepsilon_1\beta_1\Lambda\mu + \gamma_1^2\mu^2 + 2\gamma_1\mu^2\tau_1 - 2\gamma_1\mu^2\varepsilon_1 + \mu^2\tau_1^2 - 2\mu^2\tau_1\varepsilon_1 + \mu^2\varepsilon_1^2$$

akan bernilai negative dengan syarat

$$4\varepsilon_1\beta_1\Lambda\mu + \gamma_1^2\mu^2 + 2\gamma_1\mu^2\tau_1 - 2\gamma_1\mu^2\varepsilon_1 + \mu^2\tau_1^2 - 2\mu^2\tau_1\varepsilon_1 + \mu^2\varepsilon_1^2 < 0$$

dan semua parameter bernilai positif

j. $\lambda_{09} = -\frac{\gamma_1\mu - 2\mu^2 - \tau_1\mu - \varepsilon_1\mu + \sqrt{d}}{2\mu}$, dengan nilai d=

$$4\varepsilon_1\beta_1\Lambda\mu + \gamma_1^2\mu^2 + 2\gamma_1\mu^2\tau_1 - 2\gamma_1\mu^2\varepsilon_1 + \mu^2\tau_1^2 - 2\mu^2\tau_1\varepsilon_1 + \mu^2\varepsilon_1^2$$

akan bernilai negative dengan

syarat: $4\varepsilon_1\beta_1\Lambda\mu + \gamma_1^2\mu^2 + 2\gamma_1\mu^2\tau_1 - 2\gamma_1\mu^2\varepsilon_1 + \mu^2\tau_1^2 - 2\mu^2\tau_1\varepsilon_1 + \mu^2\varepsilon_1^2 < 0$

Selain itu berlaku syarat:

$$\begin{aligned} k. \quad \gamma_1\mu - 2\mu^2 - \tau_1\mu - \varepsilon_1\mu &> 0 \\ -\mu(2\mu + \tau_1 + \varepsilon_1 - \gamma_1) &> 0 \end{aligned}$$

Dengan

$$(2\mu + \tau_2 + \varepsilon_2 - \gamma_2) > 0$$

dan semua parameter bernilai positif.

Akan dilanjutkan dengan analisis kestabilan dari endemic penyakit tuberkulosis, dan diperoleh matriks jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{44} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & 0 & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & a_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{48} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{59} & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{bmatrix}$$

Dimana :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left(\beta_2 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_2}{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)} - \frac{\mu}{\beta_2} \right)\right) \\ a_{31} &= \beta_2 \left(\Lambda - \frac{\mu}{\beta_2} \right) \\ a_{22} &= -(\mu + \varepsilon_1) \\ a_{24} &= \varepsilon_1 \\ a_{33} &= -(\mu + \varepsilon_2) \\ a_{35} &= \varepsilon_2 \\ a_{41} &= -\beta_1 \left(\frac{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)}{\varepsilon_2\beta_2} \right) \\ a_{42} &= \beta_1 \left(\frac{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)}{\varepsilon_2\beta_2} \right) \\ a_{44} &= -\left(\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_2}{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)} - \frac{\mu}{\beta_2} \right) \right) \\ a_{46} &= (\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{\Lambda\varepsilon_2}{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)} - \frac{\mu}{\beta_2} \right) \\ a_{48} &= -\gamma_1 \\ a_{51} &= -\beta_2 \left(\frac{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)}{\varepsilon_2\beta_2} \right) \\ a_{53} &= -\beta_2 \left(\frac{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)}{\varepsilon_2\beta_2} \right) \\ a_{54} &= -\kappa_1 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_2}{(\mu + \tau_2 + \gamma_2)(\mu + \varepsilon_2)} - \frac{\mu}{\beta_2} \right) \\ a_{55} &= -(\mu + \tau_2 + \gamma_2) \\ a_{59} &= \gamma_2 \\ a_{66} &= -(\mu + \tau_3 + \gamma) \\ a_{67} &= \gamma \\ a_{77} &= -\mu \\ a_{88} &= -\mu \\ a_{99} &= -\mu \end{aligned}$$

Analisis kestabilan didapatkan dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan endemic tuberkulosis dari matriks Jacobian diatas, maka diperoleh 9 nilai eigen sebagai berikut:

- a. $\lambda_{11} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif.
- b. $\lambda_{12} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif
- c. $\lambda_{13} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{14} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{15} = -\mu - \tau_3 - \gamma$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{16} = -\sqrt{3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, akan bernilai negative dengan syarat:

$$3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$$

$\lambda_{17} = -\sqrt{3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, akan bernilai negative dengan syarat:

$$3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$$

$\lambda_{18} = -\sqrt{3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, akan bernilai negative dengan syarat:

$\lambda_{19} = -\sqrt{3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, akan bernilai negative dengan syarat:

$$3\beta_1^2\gamma_1^7 - \tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 3\beta_1^2\gamma_1\mu\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$$

Akan dilanjutkan dengan analisis kestabilan dari endemic penyakit pertusis, dan diperoleh matriks jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & a_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{48} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{59} & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{bmatrix}$$

Dimana :

$$a_{11} = -\left(\beta_1 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_1}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \right) + \mu\right)$$

$$a_{21} = \beta_1 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_1}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \right)$$

$$a_{22} = -(\mu + \varepsilon_1)$$

$$a_{24} = \varepsilon_1$$

$$a_{33} = -(\mu + \varepsilon_2)$$

$$a_{35} = \varepsilon_2$$

$$a_{41} = -\left(\beta_1 \left(\frac{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1\beta_1} \right)\right)$$

$$a_{42} = \beta_1 \left(\frac{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1\beta_1} \right)$$

$$a_{45} = -\kappa_2 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_1}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \right)$$

$$a_{48} = \gamma_1$$

$$a_{51} = -\beta_2 \left(\frac{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1\beta_1} \right)$$

$$a_{53} = \beta_2 \left(\frac{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)}{\varepsilon_1\beta_1} \right)$$

$$a_{55} = -\left(\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_2 \left(\frac{\Lambda\varepsilon_1}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \right) \right)$$

$$a_{56} = (\kappa_1 + \kappa_2) \left(\frac{\Lambda\varepsilon_2}{(\mu + \tau_1 + \gamma_1)(\mu + \varepsilon_1)} - \frac{\mu}{\beta_1} \right)$$

$$a_{59} = \gamma_2$$

$$a_{66} = -(\mu - \tau_3 + \gamma)$$

$$a_{67} = \gamma$$

$$a_{77} = -\mu$$

$$a_{88} = -\mu$$

$$a_{99} = -\mu$$

Analisis kestabilan didapatkan dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan endemic pertusis dari matriks Jacobian diatas, maka diperoleh 9 nilai eigen sebagai berikut:

$\lambda_{21} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{22} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{23} = -\mu$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{24} = -\mu - \tau_3 - \gamma$, karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif

$\lambda_{25} = -\sqrt{24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, .. Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$$

$\lambda_{26} = -\sqrt{24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, .. Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0,$$

dan semua parameter bernilai positif.

$\lambda_{27} = -\sqrt{24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, .. Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0,$$

dan semua parameter bernilai positif

$\lambda_{28} = -\sqrt{24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, .. Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0,$$

dan semua parameter bernilai positif

$\lambda_{29} = -\sqrt{24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2}$, .. Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$24\beta_2^2\gamma_2^7 + 24\tau_2\tau_3\varepsilon_1 - 24\beta_2^2\gamma_2\mu^7\tau_2\varepsilon_1\varepsilon_2 > 0,$$

dan semua parameter bernilai positif

Akan dilanjutkan dengan analisis kestabilan dari endemic penyakit tuberkulosis dan pertusis, dan diperoleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & a_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{44} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{35} & a_{45} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{46} & a_{56} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{67} & a_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{48} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{59} & 0 & 0 & 0 & a_{99} \end{bmatrix}$$

Dimana :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu) \\ a_{21} &= \beta_1 I_p^* \\ a_{31} &= \beta_2 I_t^* \\ a_{22} &= -(\mu + \varepsilon_1) \\ a_{24} &= \varepsilon_1 \\ a_{33} &= -(\mu + \varepsilon_2) \\ a_{35} &= \varepsilon_2 \\ a_{41} &= -\beta_1 \left(\frac{\Lambda}{\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu} \right) \\ a_{42} &= \beta_1 \left(\frac{\Lambda}{\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu} \right) \\ a_{44} &= -(\mu + \tau_1 + \gamma_1 + \kappa_1 I_t^*) \\ a_{45} &= -\kappa_2 I_p^* \\ a_{46} &= (\kappa_1 + \kappa_2) I_t^* \\ a_{48} &= \gamma_1 \\ a_{51} &= -\beta_2 \left(\frac{\Lambda}{\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu} \right) \\ a_{53} &= \beta_2 \left(\frac{\Lambda}{\beta_1 I_p^* + \beta_2 I_t^* + \mu} \right) \\ a_{54} &= -\kappa_1 I_t^* \\ a_{55} &= -(\mu + \tau_2 + \gamma_2 + \kappa_1 I_p^*) \\ a_{56} &= (\kappa_1 + \kappa_2) I_p^* \\ a_{59} &= \gamma_2 \\ a_{66} &= -(\mu - \tau_3 + \gamma) \\ a_{67} &= \gamma \\ a_{77} &= -\mu \\ a_{88} &= -\mu \\ a_{99} &= -\mu \end{aligned}$$

Analisis kestabilan didapatkan dengan menganalisis nilai eigen pada titik kesetimbangan endemic tuberkulosis dan pertusis dari matriks Jacobian diatas, maka diperoleh 9 nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_{31} &= -\mu, \text{ karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif} \\ \lambda_{32} &= -\mu, \text{ karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif} \\ \lambda_{33} &= -\mu, \text{ karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif} \\ \lambda_{34} &= -\mu - \tau_3 - \gamma, \text{ karena semua parameter bernilai positif, maka nilai ini selalu negatif} \end{aligned}$$

$$\lambda_{35} = \frac{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}{\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}$$

, Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2 > 0, \text{ dan semua parameter bernilai positif.}$$

$$\lambda_{36} = \frac{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma + \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma + \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}$$

Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2 > 0, \text{ dan semua parameter bernilai positif.}$$

$$\lambda_{37} = \frac{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma + \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma + \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}$$

Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2 > 0, \text{ dan semua parameter bernilai positif.}$$

dan semua parameter bernilai positif.

$$\lambda_{38} = \frac{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}$$

Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2 > 0, \text{ dan semua parameter bernilai positif.}$$

dan semua parameter bernilai positif.

$$\lambda_{39} = \frac{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}{-\sqrt{3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2}}$$

Nilai ini akan negatif dengan syarat:

$$3(It^*)^3\gamma - \beta_2^2\kappa_1\mu^3\varepsilon_2 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\gamma_2\mu^3 - (3Ip^*)^2\gamma\beta_1^2\gamma_1\mu^3\tau_2 > 0, \text{ dan semua parameter bernilai positif.}$$

dan semua parameter bernilai positif.

SIMULASI NUMERIK

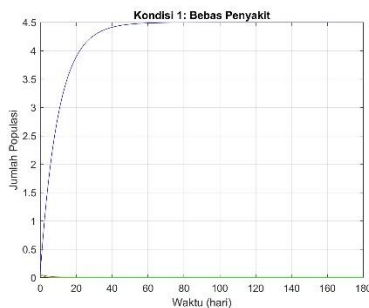
Simulasi menggunakan parameter yang diperoleh dari beberapa sumber refrensi serta asumsi yang disajikan pada table berikut :

| Parameter | Nilai | Sumber |
|-----------------|--------|-------------------------|
| Λ | 0.45 | (Puspitasari dkk, 2019) |
| μ | 0.1 | (Puspitasari dkk, 2019) |
| β_1 | 0.05 | (Asyabah dkk, 2018) |
| β_2 | 0.001 | (Ramdhan dkk, 2018) |
| ε_1 | 0.048 | Asumsi |
| ε_2 | 0.0102 | (Fatmawati, 2019) |
| γ | 0.004 | Asumsi |
| γ_1 | 0.04 | (Asyabah dkk, 2018) |
| γ_2 | 0.03 | (Novi, 2020) |
| τ_1 | 0.02 | Asumsi |

| | | |
|------------|-------|----------------------|
| τ_2 | 0.3 | (Ramadhan dkk, 2018) |
| τ_3 | 0.6 | Asumsi |
| κ_1 | 0.001 | Asumsi |
| κ_2 | 0.001 | Asumsi |

Tabel 4.1 : Nilai dan Sumber Parameter

Nilai awal yang digunakan $S(0) = 0.1, E_p(0) = 0.01, E_t(0) = 0.01, I_p(0) = 0.1, I_t(0) = 0.1, I_{pt}(0) = 0.1, R(0) = 0.1, R_p(0) = 0.1, R_t(0) = 0.1$. Berikut hasil simulasi dengan menggunakan software Matlab Online dengan menggunakan ODE45, diperoleh $R_{01} = 0,3125$ dan $R_{02} = 0,002325581395349$. dan diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_{01} = -0.1, \lambda_{02} = -0.258096109437385, \lambda_{03} = -0.0499038905626152, \lambda_{04} = -0.1, \lambda_{05} = 1.50403589795440, \lambda_{06} = -0.0331641020455965, \lambda_{07} = -0.1, \lambda_{08} = -0.704, \lambda_{09} = -0.1$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, maka jenis kesetimbangan adalah stabil asimtotik pada Titik Kritis 1 = (4,5; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0) dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut:

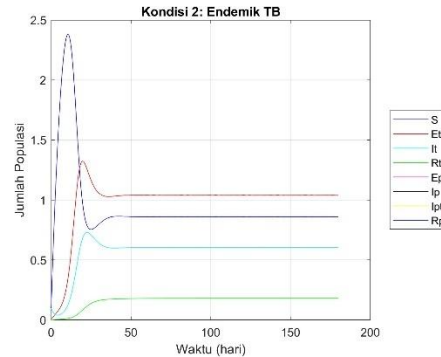


Gambar 4.2 Grafik Simulasi Model Bebas Penyakit $t \leq 140$

Berdasarkan Gambar 4.2, populasi manusia rentan awalnya sebesar 0.01 dan meningkat hingga stabil pada 4.5 di hari ke-60, seiring bertambahnya individu dari proses kelahiran yang belum terpapar penyakit. Sementara itu, populasi yang terinfeksi pertusis (0.09) dan Tuberkulosis (0.06) menurun hingga mencapai nol, menunjukkan tidak ditemukannya kasus aktif. Penurunan ini dipengaruhi oleh meningkatnya kekebalan atau efektivitas kesehatan dalam populasi. Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil, di mana seluruh populasi menuju nol kecuali populasi rentan.

Selanjutnya dengan memodifikasi nilai $\beta_2 = 0.7, \epsilon_2 = 0.25$ pada table 4.1 dan diperoleh $R_{01} = 0.3125, R_{02} = 1.1628$. Kemudian diperoleh juga nilai analisis kestabilannya yaitu $\lambda_{11} = -0.255720711748728, \lambda_{12} = -0.0715917192279871 + 0.0486422180202403i, \lambda_{13} = -0.0715917192279871 - 0.0486422180202403i, \lambda_{14} = -$

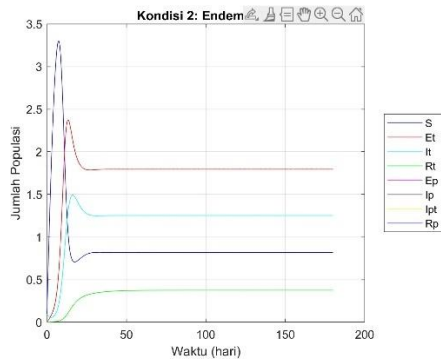
$0.0574324563848184, \lambda_{15} = -0.1, \lambda_{16} = -0.690764690934914, \lambda_{17} = -0.717710541775567, \lambda_{18} = -0.1, \lambda_{19} = -0.1$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, maka jenis kesetimbangan adalah stabil asimtotik pada titik kritis 2 = (0.86; 0; 1.04; 0; 0.6046511628; 0; 0; 0; 0.1813953488) dan akan menghasilkan simulasi sebagai berikut:



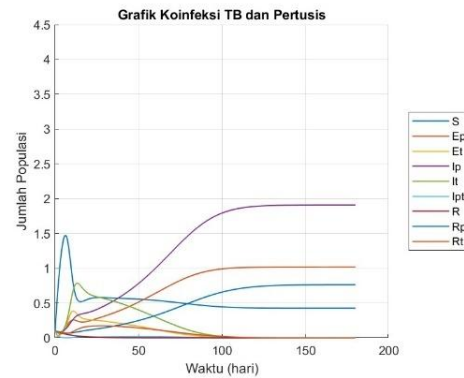
Gambar 4.3 Grafik Simulasi Model Endemik Tuberkulosis $t \leq 140$

Berdasarkan grafik yang terdapat pada Gambar 4.3, populasi rentan awalnya 0.1 meningkat hingga 2.376593 pada hari ke-11 sebelum menurun ke 0.754593 akibat paparan Tuberkulosis serta kematian alami dan karena penyakit. Populasi terinfeksi meningkat dari 0.01 menjadi 1.321488, menunjukkan penyakit tetap bertahan. Populasi sembuh juga bertambah hingga 0.1813908082, menandakan adanya pemulihan dan pembentukan kekebalan. Secara keseluruhan, titik kesetimbangan endemik stabil dengan populasi menuju nilai nol kecuali pada subpopulasi rentan, terinfeksi, dan sembuh.

Selanjutnya dengan memodifikasi nilai $\beta_2 = 0.2$ pada parameter yang terdapat pada Gambar 4.2 dan diperoleh nilai $R_{01} = 1.013514$ dan $R_{02} = 0.000215$, kemudian diperoleh juga nilai analisis kestabilannya yaitu: $\lambda_{21} = -0.343334610286286, \lambda_{22} = 0.0735489111068570 + 0.0166124479739972i, \lambda_{23} = -0.0735489111068570 - 0.0166124479739972i, \lambda_{24} = -0.1, \lambda_{25} = -1.25446622691906, \lambda_{26} = 0.680878727037660, \lambda_{27} = -0.306267208043279, \lambda_{28} = 0.1, \lambda_{29} = -0.1$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, jenis kesetimbangan yang diperoleh adalah **stabil asimtotik** pada titik kritis 3 = (0.986667; 2.373874; 0; 0.712162; 0; 0; 0; 0.284865; 0), dan menghasilkan simulasi sebagai berikut.



Gambar 4.3 Grafik Simulasi Model Endemik Pertusis $t \leq 140$



Gambar 4.4 Grafik Simulasi Model Endemik Koinfeksi $t \leq 140$

Berdasarkan grafik Gambar 4.3, populasi rentan awalnya berada pada 0.17, meningkat hingga 4.1 pada hari ke-127, lalu menurun ke 2.5 akibat paparan Pertusis, kematian karena penyakit, dan kematian alami. Populasi terinfeksi meningkat dari 0.04 menjadi 0.4, menunjukkan Pertusis tetap ada dalam populasi. Populasi sembuh juga naik hingga 0.14, menandakan banyak individu pulih dan memperoleh kekebalan. Dengan demikian, titik kesetimbangan endemik Pertusis bersifat stabil, dengan tiga populasi yang tetap bertahan: rentan, terinfeksi, dan sembuh. Selanjutnya dengan memodifikasi nilai $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.8$, $\epsilon_1 = 0.3$, $\epsilon_2 = 1.08$, $\kappa_1 = 0.03$, $\kappa_2 = 0.01$ pada parameter yang terdapat pada gambar 4.1 dan diperoleh nilai $R_{01} = 2.3438$ dan $R_{02} = 1.6913$. Kemudian diperoleh nilai analisis kestabilannya yaitu: $\lambda_{31} = -1.88428727987111$, $\lambda_{32} = -1.10177719896234$, $\lambda_{33} = -0.711389080768911$, $\lambda_{34} = -0.385187985415377 + 0.107173639257255i$, $\lambda_{35} = -0.385187985415377 - 0.107173639257255i$, $\lambda_{36} = -0.0878423117668835$, $\lambda_{37} = -0.1$, $\lambda_{38} = -0.1$, $\lambda_{39} = -0.1$. Berdasarkan nilai eigen tersebut, jenis kesetimbangan yang diperoleh adalah **stabil asimtotik** pada titik kritis 4 = (0.239700; 1.065075; 0.000001; 1.997015; 0.000001; 0.000001; 0.000001; 0.798806; 0.000001) dan menghasilkan simulasi sebagai berikut:

Berdasarkan Gambar 4.4, populasi rentan meningkat dari 0.1 ke 1.474822 sebelum menurun ke 0.445342 akibat paparan penyakit dan kematian alami. Populasi terinfeksi dan sembuh Pertusis masing-masing meningkat hingga 0.429999 dan 0.734693, sementara populasi terinfeksi Tuberkulosis naik ke 0.785271 lalu menurun hampir ke nol, dengan populasi sembuh TB sempat mencapai 0.170184. Populasi koinfeksi juga meningkat hingga 0.017592, dan populasi sembuh koinfeksi mencapai 0.011561. Secara keseluruhan, titik kesetimbangan endemik koinfeksi stabil, ditunjukkan oleh subpopulasi yang tetap bertahan sehingga kedua penyakit tetap ada dalam populasi.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini membahas mengenai model koinfeksi penyakit Tuberkulosis dan Pertusis yang dapat dibuat model berdasarkan karakteristik dari dua penyakit. Terdapat 4 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik tuberkulosis, titik kesetimbangan endemik pertusis, titik kesetimbangan endemik tuberkulosis dan pertusis. Untuk nilai dari bilangan reproduksi dasar, diperoleh dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix*, untuk kasus kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan dua bilangan reproduksi yakni untuk bilangan reproduksi Tuberkulosis $R_{01} = \frac{\beta_1 \Lambda \epsilon_1}{\mu(\mu + \epsilon_1)(\mu + \tau_1 + \gamma_1)}$, untuk bilangan reproduksi Pertusis $R_{02} = \frac{\beta_2 \Lambda \epsilon_2}{\mu(\mu + \epsilon_2)(\mu + \tau_2 + \gamma_2)}$. Ketika nilai $R_{01} < 1$ dan $R_{02} < 1$, kedua penyakit akan hilang dari populasi dengan jangka waktu tertentu. Ketika $R_{01} >$

1 dan $R_{02} < 1$ menunjukkan penyakit tuberkulosis ada dalam populasi. Apabila $R_{01} < 1$ dan $R_{02} > 1$ menunjukkan penyakit pertusis ada dalam populasi. Jika $R_{01} > 1$ dan $R_{02} > 1$ maka kedua penyakit akan tetap ada di dalam populasi. Hasil dari simulasi numerik yang dilakukan menggunakan MATLAB untuk mendukung hasil analisa tersebut.

SARAN

Penelitian selanjutnya dapat mengkaji pemodelan penyebaran koinfeksi Tuberkulosis dan Pertusis dengan memasukkan variabel vaksinasi untuk melihat pengaruh pemberian vaksin terhadap ketahanan dan dinamika populasi terhadap penyakit.

DAFTAR PUSTAKA

- Allbut, T., 1897. Whooping cough, a system of medicine. England.
- Allmandan, E., dan Rhodes, J., 2004. Mathematical Models in Biology: An Introduction. England: Cambridge University Press.
- Anton, H., dan C., R., 2004. Aljabar Linear Elementer. Erlangga.
- Asyabah, B., Z. and Waluya., dan Muhammad, K., 2018. PEMODELAN SIR UNTUK PENYEBARAN PENYAKIT PERTUSIS DENGAN VAKSINASI PADA POPULASI MANUSIAKONSTAN. Indonesia: UNNESJournal of Mathematics.
- Bonita, R., Beaglehole, R., dan Kjellstrom, T., 2006. Basic Epidemiology. World Health Organization.
- Boyce, W., dan DiPrima, R., 2009. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Canada: John Wiley Sons Canada, Limited.
- Brady, M., Byington, C., dan Devis, H., 2005. Additional Recommendations for Use of Tetanus Toxoid, Reduced-Content Diphtheria Toxoid, and Acellular Pertussis Vaccine (Tdap). Finland.
- Chebotaeva, V., Srinivasan, A., dan Vasquez, P. A., 2025a. Differentiating contact with symptomatic and asymptomatic infectious individuals in a seir epidemic model. Bulletin of Mathematical Biology, 87.
- Chebotaeva, V., Srinivasan, A., dan Vasquez, P. A., 2025b. Differentiating contact with symptomatic and asymptomatic infectious individuals in a seir epidemic model. Bulletin of Mathematical Biology, 87.
- Clinical and Laboratory Standar Institute, 2015. Interpretive criteria for Identification of bacteria and fungi by DNA target sequencing approved guideline. Canada: Clinical and Laboratory Standar Institute.
- Departemen Kesehatan RI, 2013. Riset Kesehatan Dasar. Indonesia: Departemen Kesehatan RI.
- Dieguez, G., Batistela, C., dan Piqueira, J. R., 2023. Controlling covid-19 spreading: Athree-level algorithm. Mathematics, 11.
- Diekmann, O., dan Roberts, M., 2009. The Consturctionnof Generation Matrices for Compartemental Epidemic Models. London: Journal of The Royal Society.
- Domnigo, E., 2020. Virus as Populations (Composition, Complexity, Quasispecies, Dynamics, and Biological Implications). Spanyol: Academic Publisher.
- Driessche, P. V. D., 2017. Reproduction Numbers of Infectious Disease Models. Canada: ScienceDirect.
- Elomaa, A., Advani, A., Donnelly, D., Antila, M., dan Mertsola, J., 2005. Additional Recommendations for Use of Tetanus Toxoid, Reduced-Content Diphtheria Toxoid, and Acellular Pertussis Vaccine (Tdap). Finland
- Fatmawati, M. U. C. A. Y. P., Utami D. Purwati., 2019. Is the recovery rate in latent tuberculosis infection significant in reducing tuberculosis transmission in indone sia? a mathematical model study in epidemiology. UNAIR Journal of Mathematics, (hal. 101-111).
- Fred, C. C., B., 2010. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. London: Springer.
- Gilbert, S., 2014. Differential Algebra. USA: Cambridge Press
- Irwin, J., 1958. Mathematical Epidimology.
- Ladas, N., 1982. An Introduction to Differential Equations. USA: Wadsworth Publishing.
- Liang, Y., Salim, A., Wu, W., dan Kilgore, P., 2016. Chao Yuanfang: Imperial Pyhsician of the Sui Dynasty and an early pertussis observer?. China: Open Forum Infect Dis.
- Makinen, J., Mertsola, J., Mooi, F., Amersfoorth, S., Arvilommi, H., Viljanen, M., dan He, Q., 2005. Bordetella pertussis isolates. Finland.
- Miquel, P., 2014. A Dicionary of Epidemiology. Oxford University Press.
- Morris, J., 1962. Explaining the Routh and Routh-Hurwitz Stability. England.
- Nieves, J., dan U, H., 2016. Bordetella pertussis. USA: Microbiology Spectrum.
- Oakley., C., 1962. Jules Jean Baptiste Vincent Bordet 1870-1961. Biograph Memoirs Fellows R Soc.
- P., E., 1910. Studies in immunity, the bacillus of whooping cough. New York: J Wiley and Sons.

- Puspitasari, A., Kamiran, dan Asiyah, N., 2019. Analisis kestabilan dan kontrol optimal model penyebaran tuberkulosis (tb) dengan terapi dan vaksinasi menggunakan metode runge kutta. Tech. rep., Institut Teknologi Sepuluh November (ITS)
- Physicians Collage of Philadelphia, 2015. Gullaume De Ballou, The History of Vaccines. Philadelphia: Sturgis Collections.
- Ramadhan, M. R., Waluya, S. B., dan Kharis, M., 2018. Pemodelan matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dengan strategi dots. UNNES Journal of Mathe matics, 7, 130-141.
- Rizal, M., 2021. Analisis Dinamik Model Koinfeksi Penyakit Diferi dan Covid-19. Indo nesia: MATHunesa.
- Robinson, 2004. An Introduction to Ordinary Differential Equations. England: Cambri dge University Press.
- S.Crofton, 2009. Crofton's Clinical Tuberculosis Third Edition. Oxford Macmillans Publishers Limited
- Shah, dan Gupta, N., 2013. Mathematical Modelling of Pul onary Extra-pul. India: International Journal of Mathematics Trends and Technology Gujarat
- Siddik, A., 2017. Analisisi Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Fungsi Respon Holling Tipe III Dan Penyakit Pada Pemangsa Super. Indonesia: Universitas Hasanu ddin Makasar.
- Sunamo, S., Sofiah, S., dan Amalia, N., 2022. Laboratory and Epidemiology Data of Pertussis Cases and Close Contracts : A 5- Year Case Based Surveillance of Pertussis in Indonesia, 2016-2020. Cambridge University Press.
- Trismanjaya, 2020. Epidemiologi Penyakit Menular: Riwat Penularan dan Pencegaha. Jakarta: Yayasan Kita Menulis.
- Weckesser, W., 2005. Math 312 Lecture Notes. New York: Warren Weckesser.
- World Health Organization, 2022. Global Tuberculosis Report 2022. World Health Organization.
- Zakirullah, Li, L., Shah, K., Abdalla, B., dan Abdeljawad, T., 2025. Using treatment and vaccination strategies to investigate transmission dynamics of influenza ma thematical model. Ain Shams Engineering Journal, 16.
- Zill, G., 2011. A First Course In Differential Equations With Modelling Application. Canada: Richard Stratton.
- Wang, L., Horn, B. K., dan Strang, G., 2017. Eigenvalue and eigenvector analysis of stability for a line of traffic. Studies in Applied Mathematics, 138, 103-132
- Allmandan, E., dan RhodesChau, M., & Reith, R. (2020). IDC - Smartphone Market Share - Vendor. Retrieved January 8, 2021, from Smartphone Market Share website: <https://www.idc.com/promo/smartphone-market-share/vendor>
- Masitoh, S. (2018). Blended Learning Berwawasan Literasi Digital Suatu Upaya Meningkatkan Kualitas Pembelajaran dan Membangun Generasi Emas 2045. Proceedings of the ICECRS, 1(3), 13-34. <https://doi.org/10.21070/piccrs.v1i3.1377>