

**PEWARNAAN LOKAL TITIK ANTI-AJAIB PADA HASIL OPERASI COMB GRAF SIKLUS DAN GRAF BINTANG**

**Hera Yunizar**

Program Studi Matematika, Fakultas FMIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia  
e-mail: yunizarhera@gmail.com

**Desi Febriani Putri**

Program Studi Matematika, Fakultas FMIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia  
corresponding author: desifebrianip@fmipa.unmul.ac.id\*

**Rinancy Tumilaar**

Program Studi Matematika, Fakultas FMIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia  
e-mail: rinancytumilaar@gmail.com

**Abstrak**

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik tak kosong dan himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada titik, sisi, atau wilayah sehingga tidak ada dua elemen bertetangga yang memiliki warna yang sama. Penelitian ini mengkaji pewarnaan lokal titik anti-ajaib, yaitu pemetaan bijektif  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  dengan syarat setiap dua titik bertetangga  $u$  dan  $v$  memiliki bobot berbeda, dengan  $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$  dan  $E(u)$  adalah himpunan sisi yang berinsiden dengan titik  $u$ . Penelitian ini membahas tentang pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada hasil operasi *comb* titik Graf Siklus ( $C_n$ ) dan Graf Bintang ( $S_4$ ). Graf hasil operasi *comb* titik yang digunakan yaitu Graf  $C_m \triangleright S_4$ . Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada graf yang diteliti. Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu metode pendeteksian pola sehingga diperoleh pola umumnya. Berdasarkan penelitian, diperoleh bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  yaitu  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) = 4m + 3$ .

**Kata Kunci:** bilangan kromatik, operasi *comb*, pewarnaan lokal titik anti-ajaib.

**Abstract**

A graph  $G$  is defined as an ordered pair consisting of a nonempty set of vertices and a set of edges that connect pairs of vertices. Graph coloring is the assignment of colors to vertices, edges, or regions of a graph such that no two adjacent elements receive the same color. This study examines local antimagic vertex coloring, which is a bijective mapping  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$ , with the condition that for every pair adjacent vertices  $u$  and  $v$  have different weights, where  $w(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$  and  $E(u)$  denotes the set of edges incident to vertex  $u$ . This research discusses local antimagic vertex coloring on graphs obtained from the vertex *comb* operation of a Cycle Graph ( $C_n$ ) and a Star Graph ( $S_4$ ). The resulting graph from the vertex *comb* operation considered in this study is  $C_m \triangleright S_4$ . The objective of this research is to determine the local antimagic vertex chromatic number of the graph under consideration. The method used in this study is a pattern detection method in order to obtain a general pattern. Based on the results, the local antimagic vertex chromatic number of the graph  $C_m \triangleright S_4$  is  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) = 4m + 3$ .

**Keywords:** chromatic number, *comb* operation, local vertex antimagic coloring.

**PENDAHULUAN**

Matematika adalah ilmu tentang logika, mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang berhubungan satu dengan lainnya. Seiring berjalannya waktu, matematika berkembang dengan berbagai cabang, salah satunya adalah matematika diskrit. Cabang ini mempelajari struktur-

struktur diskrit, yaitu objek yang dapat dihitung secara terpisah, seperti bilangan bulat, graf, dan pernyataan logika. Salah satu konsep yang digunakan dalam penelitian ini adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736 (Simangunsong, 2021). Dalam

perkembangannya, teori graf memiliki berbagai topik kajian yang menarik untuk diteliti, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan pada graf  $G$  adalah pemberian label atau nilai pada titik, sisi, atau titik dan sisi dalam suatu graf. Beberapa jenis pelabelan yang umum antara lain yaitu meliputi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Slamin, 2023).

Selain pelabelan graf, pewarnaan graf juga menjadi salah satu topik penting yang banyak dikaji dalam teori graf karena memiliki karakteristik dan aplikasi yang berbeda. Pewarnaan graf adalah proses pemberian warna pada setiap titik, sisi, atau wilayah pada graf. Dalam pewarnaan graf, setiap titik, sisi, atau wilayah diberikan warna sedemikian rupa sehingga tidak ada dua titik, sisi, atau wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama (Waluyo, 2024).

Selanjutnya, terdapat topik dalam teori graf yang menggabungkan kedua konsep tersebut, yaitu pelabelan dan pewarnaan, yang dikenal dengan istilah pewarnaan lokal anti-ajaib. Pewarnaan lokal anti-ajaib terdiri dari pewarnaan titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan lokal titik anti-ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Arumugam dkk., (2017). Pada penelitian ini yaitu menggunakan pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada beberapa graf khusus. Konsep pewarnaan lokal titik anti-ajaib adalah melabeli setiap sisi pada graf dengan bilangan positif kemudian menentukan bobot titik sedemikian hingga titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Bobot inilah yang diinisiasi sebagai warna.

Penelitian lebih lanjut dilakukan oleh Dafik dkk., (2020), meneliti tentang Pewarnaan lokal titik anti-ajaib dari beberapa graf khusus yang dibagi. Graf  $G$  disebut sub-terbagi jika graf  $G$  menjadi graf yang diperoleh dengan memasukkan titik ke setiap sisi Graf  $G$ . Graf yang digunakan yaitu Graf Bintang, Graf Roda dan Graf Persahabatan. Lalu, Dafik dkk., (2021) melanjutkan penelitian tentang studi pewarnaan lokal titik anti-ajaib dari graf dan operasinya. Graf yang digunakan adalah Graf Lintasan, Graf Persahabatan, Graf Siklus dan Graf Lengkap. Operasi yang digunakan pada penelitian tersebut yaitu operasi korona titik yang memiliki bilangan kromatik masing-masing operasi berjumlah 5.

Pengembangan pewarnaan lokal titik anti-ajaib selanjutnya dilakukan oleh Nalliah dkk., (2023) mengenai pewarnaan lokal titik anti-ajaib untuk Graf Persahabatan Umum dari Graf Lengkap dan Graf

Siklus. Penelitian terbaru dilakukan oleh Uma & Rajasekaran, (2024) yang membahas tentang pewarnaan lokal anti-ajaib untuk operasi graf tertentu. Penelitian ini berfokus pada Graf Sirkulan Bipartit beraturan genap, beberapa Graf Gabungan, gabungan terhingga dari Graf Bipartit, Graf hasil Korona dan Graf hasil kali Tensor.

Berdasarkan penelitian sebelumnya, maka penulis tertarik untuk melakukan kajian lebih lanjut tentang pewarnaan lokal titik anti-ajaib. Pada penelitian ini, selain membahas beberapa graf khusus tetapi juga mengkaji graf pada operasi *comb*. Graf yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah Graf Siklus *comb* Graf Bintang ( $C_m \triangleright S_4$ ).

## KAJIAN TEORI

Menurut sejarah, masalah pertama yang menggunakan teori graf adalah masalah jembatan di Kota Königsberg, yang kini bernama Kaliningrad pada tahun 1736. Di kota tersebut terdapat sebuah sungai Pregal yang mengelilingi pulau Kneiphof dan terdapat tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dipisahkan oleh sungai. Seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonhard Euler berhasil menemukan jawaban atas permasalahan tersebut dengan mencoba memodelkan masalah tersebut menggunakan graf, yakni daratan dinotasikan dengan titik sedangkan jembatan sebagai sisi. Euler menyimpulkan bahwa seseorang tidak dapat melewati ketujuh jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali dan kembali ke titik awal jika setiap titik dalam graf memiliki jumlah sisi yang terhubung dengan titik yang tidak genap (Panjaitan & Rima, 2022).

Graf  $G$  merupakan sekumpulan titik yang dihubungkan oleh sekumpulan sisi. Dengan kata lain, graf  $G$  dapat direpresentasikan sebagai pasangan terurut himpunan  $V(G)$  dan  $E(G)$ , dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah himpunan berhingga tak kosong yang terdiri dari elemen-elemen yang disebut titik, sedangkan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  adalah himpunan yang mungkin kosong dari pasangan tidak terurut dua titik  $v_i, v_j \in V(G)$  yang disebut sisi. Jadi, sebuah graf memungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus terdapat minimal satu titik. Banyaknya titik pada suatu graf  $G$  disebut *order*, yang dinotasikan dengan  $p$  atau  $|V(G)|$ , sedangkan banyaknya sisi dalam suatu graf  $G$  disebut *size*, yang dinotasikan dengan  $q$  atau  $|E(G)|$  (Buhaerah, 2019).

Graf Siklus dinotasikan dengan  $C_n$  merupakan graf yang setiap titiknya berderajat dua dan banyaknya sisi sama dengan banyaknya titik yang dimiliki. Graf Siklus  $C_n$  hanya dapat dibentuk dengan  $n \geq 3$ . Graf Siklus memiliki himpunan titik  $V(C_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$  sehingga untuk kardinalitas titik Graf Siklus  $|V(C_n)| = n$  dan himpunan sisi Graf Siklus  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$  sehingga untuk kardinalitas sisi Graf Siklus  $|E(C_n)| = n$  (Ardiyansah & Darmaji, 2013).

Graf Bintang dinotasikan dengan  $S_n$  adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang memiliki derajat titik  $u_0$  adalah  $n$ , sedangkan derajat  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  adalah 1, dengan titik  $n+1$  dan sisi  $n$ . Graf Bintang hanya dapat dibentuk dengan  $n \geq 3$ . Graf Bintang memiliki himpunan titik  $V(S_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_0\}$  sehingga untuk kardinalitas titik Graf Bintang  $|V(S_n)| = n+1$  dan himpunan sisi  $E(S_n) = \{u_0 v_i | 1 \leq i \leq n\}$  sehingga untuk kardinalitas sisi Graf Bintang  $|E(S_n)| = n$  (Rofikah dkk., 2020).

Misalkan Graf  $G$  dan  $H$  adalah graf terhubung, graf hasil operasi *comb* dari graf  $G$  dan  $H$  dinotasikan dengan  $G \triangleright H$  merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan dari graf  $G$  dan  $|V(G)|$  salinan dari graf  $H$ , kemudian melekatkan titik  $v$  dari masing-masing graf  $H$  salinan ke- $i$  pada titik ke- $i$  dari graf  $G$  (Agustin dkk., 2018).

Pelabelan graf merupakan pemberian label atau nilai pada titik, sisi, atau titik dan sisi dari graf menggunakan bilangan bulat positif. Berdasarkan graf yang dilabeli pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Wallis, 2001).

Pelabelan anti-ajaib merupakan pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1994), yang mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  yang memiliki titik sebanyak  $|V(G)|$  dan sisi  $|E(G)|$  disebut anti-ajaib, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan  $\{1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$  sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Pelabelan anti ajaib terdapat pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib (Slamin dkk., 2006).

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada elemen-elemen pada graf sedemikian hingga setiap elemen yang berdekatan harus memiliki warna berbeda. Jumlah warna minimum pada titik, sisi dan wilayah yang digunakan disebut bilangan kromatik dan pewarnaan sisi memiliki jumlah warna minimum yang disebut dengan indeks kromatik.

Ada tiga jenis pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (Buhaerah dkk., 2022).

Pada pewarnaan graf ada istilah yang dinamakan bilangan kromatik. Bilangan kromatik pada graf adalah jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai titik, sisi dan wilayah pada suatu graf yang dinotasikan dengan  $\chi(G)$  (Munir, 2010).

Pewarnaan titik pada suatu graf  $G$  merupakan pemberian warna pada setiap titik sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dalam graf  $G$  memiliki warna yang sama. Lalu ewarnaan sisi merupakan pemberian warna pada setiap sisi dalam suatu graf sedemikian sehingga sisi-sisi yang berhubungan tidak memiliki warna yang sama. Sedangkan Pewarnaan wilayah merupakan pemberian warna pada setiap wilayah dalam suatu graf sedemikian sehingga tidak ada wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama (Mahmudah, 2022).

Pewarnaan lokal titik anti-ajaib pertama kali diperkenalkan oleh (Arumugam dkk., 2017). Pewarnaan lokal titik anti-ajaib merupakan konsep dalam teori graf yang menggabungkan pelabelan dan pewarnaan graf. Suatu graf  $G$  didefinisikan oleh pemetaan bijektif  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  sedemikian hingga bobot dari dua titik yang bertetangga  $u$  dan  $v$  berbeda  $w(u) \neq w(v)$ , dengan  $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$  dan  $E(u)$  adalah himpunan sisi yang bersisian ke  $u$ . Jadi pelabelan lokal titik anti ajaib akan menghasilkan pewarnaan titik yang tepat pada graf  $G$ , titik  $u$  diberi warna dengan notasi  $w(u)$  dan titik  $v$  diberi warna dengan notasi  $w(v)$ . Pewarnaan anti-ajaib pada graf juga terdapat suatu istilah bilangan kromatik dengan notasi  $\chi_{la}(G)$  (Arumugam dkk., 2017).

**Teorema 1.** (Arumugam dkk., 2017) untuk setiap Graf Pohon  $T$  dengan daun  $l$ ,  $\chi_{la}(T) \geq l + 1$ .

**Bukti.** Misalkan  $f$  adalah sebarang pelabelan lokal anti-ajaib dari  $T$ . Maka dalam pewarnaan yang diinduksi oleh  $f$ , warna dari sebuah daun  $v$  adalah  $f(e)$  untuk  $e$  adalah sisi yang berinsiden dengan  $v$ . Oleh karena itu, semua daun menerima warna yang berbeda. Selanjutnya, untuk setiap titik bukan daun  $w$  yang berinsiden dengan sisi  $e_1$  dengan  $f(e_1) = m$ , warna yang diberikan pada  $w$  lebih besar daripada

$m$ . Maka, jumlah warna dalam pewarnaan yang diinduksi oleh  $f$  adalah paling sedikit  $l + 1$ . Dengan demikian  $\chi_{la}(T) \geq l + 1$ . ■

Hasil bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf Lintasan dan Graf Siklus dapat dilihat pada Tabel 1. (Arumugam dkk., 2017).

**Tabel 1.** Hasil Pewarnaan Lokal Titik Anti-Ajaib

No	Graf	Bilangan Kromatik
1	Graf Lintasan	$\chi_{la}(P_n) = 3$
2	Graf Siklus	$\chi_{la}(C_n) = 3$

**METODE**

Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola yaitu metode penelitian yang menentukan pola pelabelan sehingga didapatkan bentuk pola umumnya, dari pola umum tersebut didapatkan pula bobot titik yang paling minimum, atau bisa disebut dengan bilangan kromatik. Melalui metode ini, pewarnaan lokal titik anti ajaib dapat diterapkan pada graf-graf khusus yang dioperasikan. Adapun operasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *comb*. Graf-graf khusus yang digunakan pada penelitian ini yaitu Graf Siklus ( $C_n$ ) dan Bintang ( $S_4$ ).

Tahapan penelitian ini disusun untuk memberikan gambaran secara sistematis mengenai penelitian yang dilakukan. Berikut adalah tahapan penelitian mengenai pewarnaan lokal titik anti-ajaib.

1. Menentukan Jenis Graf yang akan diteliti  
 Jenis graf yang akan diteliti yaitu graf khusus seperti Graf Siklus dan Graf Bintang.
2. Menentukan Operasi Graf  
 Setelah menentukan graf yang akan diteliti, lalu menentukan operasi graf yang digunakan. Dalam penelitian ini menggunakan operasi *comb*.
3. Mengkonstruksi Graf Hasil Operasi Comb  
 Selanjutnya graf yang sudah ditentukan dikonstruksi ke dalam bentuk operasi *comb* yaitu ( $C_m \triangleright S_4$ ).
4. Memberikan Notasi Pada Graf Hasil Kontruksi  
 Pada tahap ini, titik dan sisi dari graf hasil operasi *comb* diberikan notasi.
5. Menentukan Pelabelan Sisi Pada Graf  
 Pemberian label pada sisi graf hasil operasi *comb* kedalam bilangan positif, hingga semua sisi pada graf dilabeli dan tidak boleh berulang.
6. Menentukan Fungsi Pada Graf

Tahapan selanjutnya menentukan fungsi pelabelan sisi dan fungsi bobot titik pada graf.

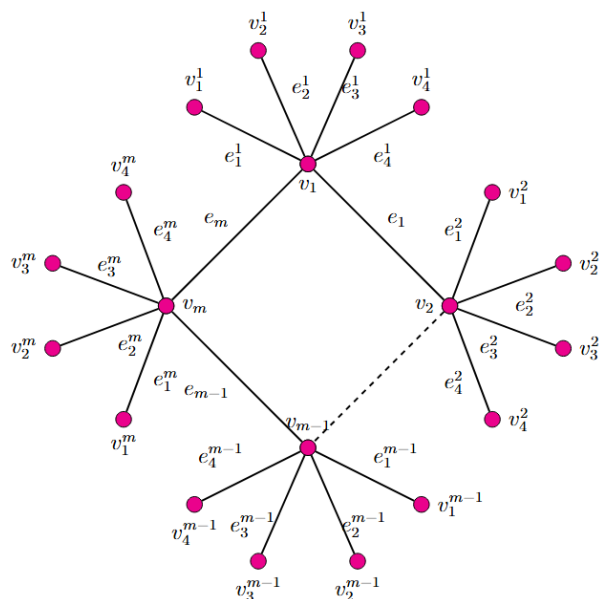
7. Menghitung Bobot Titik Pada Graf  
 Bobot setiap titik dihitung dengan menjumlahkan label sisi yang bersisian pada titik tersebut.
8. Mencari Bilangan Kromatik Pada Graf  
 Tahapan terakhir yaitu menentukan bilangan kromatik dari pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada graf hasil operasi *comb* berdasarkan warna minimum.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Pada bagian ini akan dibahas mengenai hasil penelitian dari pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada beberapa hasil operasi *comb*. Graf yang diteliti adalah Graf ( $C_m \triangleright S_4$ ). Hasil yang didapatkan dari penelitian ini adalah berupa teorema mengenai bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada hasil operasi *comb*.

**1) Pewarnaan Lokal Titik Anti-Ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$**

**Definisi 1.** Graf  $C_m \triangleright S_4$  merupakan bentuk hasil operasi *comb* antara Graf Siklus ( $C_m$ ) dengan  $m$  titik dan Graf Bintang ( $S_n$ ) dengan  $n = 4$  titik. Contoh Graf hasil operasi *comb* dari Graf Siklus dan Graf Bintang dapat dilihat pada Gambar 1.



**Gambar 1.** Graf  $C_m \triangleright S_4$

Diberikan Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 3$  dan  $n = 4$ . Untuk menyatakan sisi  $v_i v_{i+1}$  pada Graf  $C_m$  digunakan notasi  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq m - 1$  dan  $e_m =$

$v_m v_1$ . Kemudian, untuk menyatakan setiap sisi hasil salinan dari Graf  $C_m \triangleright S_4$  digunakan notasi  $e_j^i$ , dengan indeks  $j$  menyatakan urutan sisi dalam suatu Graf  $S_4$ , yaitu mulai dari  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Sementara untuk indeks  $i$  menyatakan jumlah salinan yaitu sebanyak  $m$ .

**Teorema 2.** Graf  $C_m \triangleright S_4$  untuk  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$  dan  $n = 4$ , memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) = 4m + 3$ .

**Bukti.** Diberikan Graf  $C_m \triangleright S_4$  untuk  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$  dan  $n = 4$ . Himpunan titik pada Graf  $P_m \triangleright C_n$  dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(C_m \triangleright S_4) = \{v_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_j^i | 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq m\}.$$

Berdasarkan penotasian himpunan titik pada Graf  $C_m \triangleright S_4$ , maka pasangan himpunan titik yang terhubung disebut sebagai himpunan sisi. Himpunan sisi dinotasikan sebagai berikut:

$$E(C_m \triangleright S_4) = \{e_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{e_j^i | 1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq m\}.$$

Graf  $P_m \triangleright C_n$  memiliki kardinalitas titik  $|V(C_m \triangleright S_4)| = 5m$  dan kardinalitas himpunan sisi  $|E(C_m \triangleright S_4)| = 5m$  didefinisikan fungsi bijektif pelabelan sisi Graf  $C_m \triangleright S_4$ , yaitu:

$$f: (E(C_m \triangleright S_4)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 5m\}.$$

### Kasus 1. Untuk $m$ ganjil

Menentukan pelabelan sisi pada Graf  $C_m \triangleright S_4$ . Pelabelan sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif  $f$  dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas Graf  $C_m \triangleright S_4$ , sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{i}{2}, & \text{untuk } e = e_i, 2 \leq i \leq m-1, i \text{ genap} \\ m - \frac{i-1}{2}, & \text{untuk } e = e_i, 1 \leq i \leq m, i \text{ ganjil} \\ m + \frac{j-3}{2} + 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 1 \leq j \leq 3, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \\ 5m + \left(\frac{j-6}{2}\right) - 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 2 \leq j \leq 4, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Kemudian setelah mendapatkan semua fungsinya, langkah selanjutnya yaitu menentukan bobot pelabelan titik pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n = 4$ . Rumus bobot titik ditentukan dengan menjumlahkan sisi yang bersisian dengan titik tersebut yaitu sebagai berikut:

$$w(v) = \begin{cases} 13m + 3, & \text{untuk } v = v_i, 2 \leq i \leq m-1, i \text{ genap} \\ 13m + 2, & \text{untuk } v = v_i, 3 \leq i \leq m, i \text{ ganjil} \\ \frac{27m+5}{2}, & \text{untuk } v = v_i, i = 1 \\ m + \frac{j-3}{2} + 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 1 \leq j \leq 3, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \\ 5m + \left(\frac{j-6}{2}\right) - 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 2 \leq j \leq 4, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Syarat pewarnaan lokal titik anti-ajaib, setiap pasangan titik yang bertetangga harus memiliki bobot dengan warna yang berbeda. Maka, untuk bobot  $w(v)$ , pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  untuk  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n = 4$  diketahui bahwa graf tersebut memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \leq 4m + 3$ .

### Kasus 2. Untuk $m$ genap

Menentukan pelabelan sisi pada Graf  $C_m \triangleright S_4$ . Pelabelan sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif  $f$  dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas Graf  $C_m \triangleright S_4$ , sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{i}{2}, & \text{untuk } e = e_i, 2 \leq i \leq m, i \text{ genap} \\ m - \frac{i-1}{2}, & \text{untuk } e = e_i, 1 \leq i \leq m-1, i \text{ ganjil} \\ m + \frac{j-3}{2} + 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 1 \leq j \leq 3, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \\ 5m + \left(\frac{j-6}{2}\right) - 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 2 \leq j \leq 4, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Kemudian setelah mendapatkan semua fungsinya, langkah selanjutnya yaitu menentukan bobot pelabelan titik pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m \geq 3$ ,  $m$  genap dan  $n = 4$ . Rumus bobot titik ditentukan dengan menjumlahkan sisi yang bersisian dengan titik tersebut yaitu sebagai berikut:

$$w(v) = \begin{cases} 13m + 3, & \text{untuk } v = v_i, 2 \leq i \leq m, i \text{ genap} \\ 13m + 2, & \text{untuk } v = v_i, 3 \leq i \leq m-1, i \text{ ganjil} \\ \frac{27m}{2} + 2, & \text{untuk } v = v_i, i = 1 \\ m + \frac{j-3}{2} + 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 1 \leq j \leq 3, j \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq m \\ 5m + \left(\frac{j-6}{2}\right) - 2i, & \text{untuk } e = e_j^i, 2 \leq j \leq 4, j \text{ genap}, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Syarat pewarnaan lokal titik anti-ajaib, setiap pasangan titik yang bertetangga harus memiliki bobot dengan warna yang berbeda. Maka, untuk bobot  $w(v)$ , pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  untuk  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$ ,  $m$  genap dan  $n = 4$  diketahui bahwa graf tersebut memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \leq 4m + 3$ .

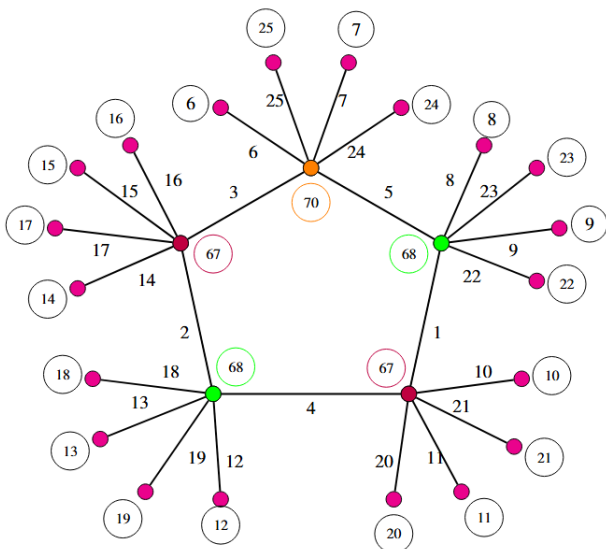
Berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 Graf  $C_m \triangleright S_4$  untuk  $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 3$  dan  $n = 4$  diperoleh bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \leq 4m + 3$ . Berdasarkan Teorema 1. batas bawah pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  adalah  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \geq 4m + 1$  dengan  $4m$  merupakan banyaknya daun pada Graf Bintang. Namun, batas bawah tersebut tidak dapat dicapai karena beberapa alasan sebagai berikut:

- Pada setiap sisi Graf Bintang dilabeli dari  $m + 1, m + 2, \dots, 5m$ . Pemberian label ini menghasilkan bobot yang berbeda pada setiap daun, yaitu  $w(v_j^i) \neq w(v_{j+1}^i)$  dengan  $1 \leq i \leq m$  dan  $1 \leq j \leq 4$ .

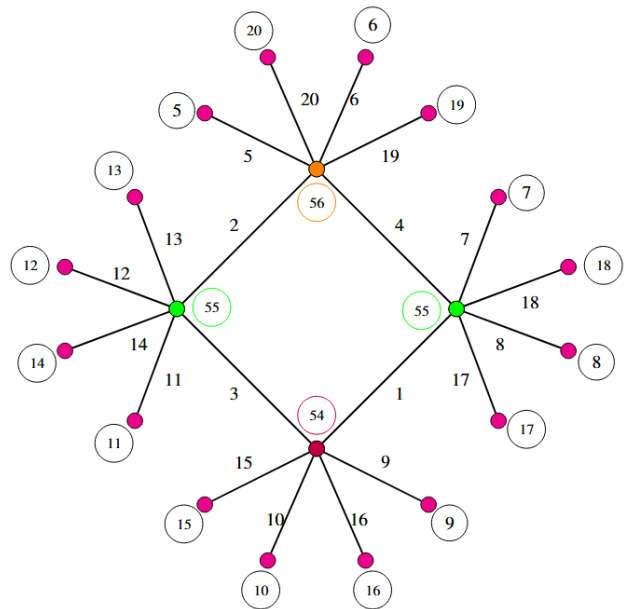
b. Berdasarkan Tabel 1. Graf Siklus memiliki jumlah bobot titik minimum sebanyak 3 . Berdasarkan pengertian operasi *comb* adalah salah satu titik pada Graf Bintang ( $S_4$ ) ditempelkan pada Graf Siklus ( $C_m$ ) maka, pelabelan Graf  $C_m \triangleright S_4$  membutuhkan tambahan minimal 3 bobot warna. Dengan demikian, jumlah warna minimum yang diperlukan yaitu  $4m + 3$  agar bobot pada titik yang bertetangga memiliki bobot warna berbeda, yaitu  $w(v_i) \neq w(v_{i+1})$ .

Berdasarkan alasan diatas, diperoleh bahwa batas bawah dari pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  adalah  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \geq 4m + 3$  dan batas atas pewarnaan lokal titik anti-ajaib yaitu Graf  $C_m \triangleright S_4$  adalah  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) \leq 4m + 3$ . Dengan demikian, karena batas atas dan batas bawah telah dicapai, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  adalah  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) = 4m + 3$ . ■

Ilustrasi pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m$  ganjil dapat dilihat pada Gambar 2. dan ilustrasi pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m$  genap dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 2. Pewarnaan Lokal Titik Anti-Ajaib pada Graf  $C_5 \triangleright S_4$



Gambar 3. Pewarnaan Lokal Titik Anti-Ajaib pada Graf  $C_5 \triangleright S_4$

**PENUTUP**

**SIMPULAN**

Penelitian ini membahas pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada graf hasil operasi *comb* antara Graf Siklus  $C_m$  dan Graf Bintang  $S_4$  yang dinotasikan  $C_m \triangleright S_4$  . Berdasarkan hasil dan pembahasan, konstruksi fungsi pelabelan sisi yang memenuhi pewarnaan lokal titik anti-ajaib diperoleh bahwa bobot titik yang saling bertetangga pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  selalu berbeda. Hasil utama menunjukkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal titik anti-ajaib pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $m \geq 3$  adalah  $\chi_{la}(C_m \triangleright S_4) = 4m + 3$ .

**SARAN**

Berdasarkan hasil penelitian ini, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengembangkan mengenai pewarnaan lokal titik anti-ajaib dengan menggunakan operasi *comb* pada Graf  $C_m \triangleright S_4$  dengan  $n > 4$  dan  $n$  lainnya. Selain itu, disarankan juga agar penelitian selanjutnya mangkaji lebih dalam penerapan operasi *comb* pada pewarnaan lokal sisi dan juga pewarnaan graf lainnya.

**DAFTAR PUSTAKA**

Agustin, I. H., Hasan, M., Dafik, Ridho, A, Kristiana,

- A. I., & Prihandini, R. M. (2018). Local Edge Antimagic Coloring of Comb Product of Graphs. *Journal of Physics*, 1-10.
- Ardiyansah, R., & Darmaji. (2013). Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2(1), 2337-3520.
- Arumugam, S., Premalatha, K., Baca, M., & Andrea S. F. (2017). Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Journal Graph and Combinatorics* 33, 275-285.
- Buhaerah. (2019). *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. Urbana Champaign: University of Illinois.
- Buhaerah, Busrah, Z., dan Sanjaya, H. (2022). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Makassar: Living Spiritual Quotient.
- Dafik, Agustin, I. H., Marsidi & Kurniawati, E. Y. (2020). On The Local Antimagic Vertex Coloring of Sub-devided Some Special Graph. *Journal of Physics*, 1-8.
- Dafik, Agustin, I. H., Slamini, Adawiyah, R., & Kurniawati, E. Y. (2021). On The Study of Local Antimagic Vertex Coloring of Graphs and Their Operations. *Journal of Physics*, 1-8.
- Mahmudah, M. (2022). Aplikasi Pewarnaan Graf Terhadap Penyimpanan Bahan Kimia. *Jurnal Educazione*, 10(2), 108-115.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Nalliah, M., Shankar, R., & Wang, T. M. (2021). Local Antimagic Vertex Coloring for Generalized Friendship Graphs. *Journal of Discrete Mathematical Science & Cryptography*, 1-8.
- Panjaitan, D., & Rima, A. (2022). *Teori Graph*. Medan: LPPM UMNAW.
- Rofikah, I., Agustin, I. H., & Dafik. (2020). Analisis Locating Dominating Set pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi. *CGANT: Journal of Mathematics and Applications*, 1(2), 1-7.
- Simangunsong, V. H. (2021). Hubungan Filsafat Pendidikan dan Filsafat Matematika dengan Pendidikan. *Sepren: Journal of Mathematics Education Applied*, 3(1), 14-25.
- Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Jawa Timur: Rumpun Dua Belas.
- Slamin, A. C., Prihandoko, T. B., Setiawan, F., Rosita, B., dan Shaleh. (2006). Vertex-Magic Total Labeling of Disconnected Graphs. *Journal of Prime Research in Mathematics*, to appear.
- Uma, L. dan Rajasekaran, G. (2024). The Local Vertex Anti-Magic Coloring for Certain Graph Operations. *Jurnal Heliyon*, 10, 1-18.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Boston: Birkhauser.
- Waluyo, E., Wahab, A. A., dan Rudi, M. (2024). Pewarnaan Graceful pada Graf Hasil Comb Siklus dan Graf Star. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 14(1), 9-19.