

ANALISIS DINAMIKA DAN KESTABILAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLINDUNGAN MUTUALISTIK ADAPTIF

Laili Rahmawati

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : laili.23172@mhs.unesa.ac.id

Dian Savitri

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

Penulis Korespondensi: diansavitri@unesa.ac.id*

Abstrak

Interaksi predator-mangsa di alam sering dipengaruhi oleh mekanisme perlindungan mutualistik, seperti keterlibatan semut yang melindungi mangsa sehingga menurunkan efektivitas predasi. Penelitian ini mengkaji model predator-mangsa dengan fungsi respon Holling tipe II yang dimodifikasi oleh perlindungan mutualistik adaptif, di mana tingkat perlindungan direpresentasikan melalui variabel preferensi semut yang dikendalikan oleh mekanisme regulasi. Tujuan penelitian ini adalah menganalisis titik kesetimbangan, kestabilan lokal sistem, serta pengaruh regulasi adaptif terhadap dinamika populasi predator dan mangsa. Metode yang digunakan meliputi penyusunan sistem persamaan diferensial nonlinier, penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal menggunakan matriks Jacobian dan nilai eigen, serta simulasi numerik untuk memvisualisasikan dinamika sistem dalam bentuk deret waktu dan potret fase dua serta tiga dimensi. Analisis dilakukan pada tiga skenario regulasi, yaitu tanpa regulasi, regulasi menuju nilai target tertentu, dan regulasi menuju tingkat perlindungan maksimum. Hasil menunjukkan bahwa tanpa regulasi sistem cenderung mengalami osilasi sebelum mencapai kestabilan, sedangkan penerapan regulasi adaptif mampu mempercepat peredaman fluktuasi dan mengarahkan sistem menuju titik kesetimbangan koeksistensi yang stabil. Semakin kuat regulasi yang diterapkan, semakin cepat sistem mencapai kestabilan, dan simulasi numerik mendukung hasil analisis kestabilan lokal secara analitik.

Kata Kunci: dinamika predator-mangsa, perlindungan mutualistik adaptif, sumber makanan alternatif, regulasi adaptif, kestabilan lokal.

Abstract

Predator-prey interactions in natural ecosystems are often influenced by mutualistic protection mechanisms, such as the involvement of ants that protect prey and thereby reduce predation efficiency. This study investigates a predator-prey model with a Holling type II functional response modified by adaptive mutualistic protection, where the level of protection is represented by an ant preference variable regulated through a control mechanism. The objective of this research is to analyze equilibrium points, local stability of the system, and the effects of adaptive regulation on predator-prey population dynamics. The methodology includes the formulation of a nonlinear system of differential equations, determination of equilibrium points, local stability analysis using the Jacobian matrix and eigenvalues, and numerical simulations to visualize system dynamics through time series and two- and three-dimensional phase portraits. The analysis considers three regulatory scenarios: no regulation, regulation toward a prescribed target value, and regulation toward a maximum protection level. The results show that, in the absence of regulation, the system tends to exhibit oscillatory behavior before reaching stability, whereas the implementation of adaptive regulation accelerates the damping of population fluctuations and drives the system toward a stable coexistence equilibrium. Stronger regulation leads to faster stabilization, and numerical simulations support the analytical results of the local stability analysis.

Keywords: predator-prey dynamics, adaptive mutualistic protection, alternative food sources, adaptive regulation, local stability.

PENDAHULUAN

Salah satu tantangan serius dalam ekosistem pertanian adalah serangan hama, salah satunya yaitu kutu daun (Aphididae) yang tidak hanya merusak tanaman secara langsung tetapi juga menyebarkan berbagai penyakit pada tanaman sehingga secara signifikan dapat menurunkan hasil panen. Menurut

penelitian yang dilakukan Savary et al. (2019) dalam artikel The global burden of pathogens and pests on major food crops, tercatat bahwa kerusakan hasil panen global akibat hama serangga dapat mencapai angka 20 hingga 40 persen dari total produksi. Dalam ekologi alami, kepik (Coccinellidae) berperan sebagai predator utama yang mengontrol populasi kutu daun

dan sering digunakan sebagai agen pengendalian hayati (Lin et al., 2018). Akan tetapi, dinamika populasi keduanya tidak hanya dipengaruhi oleh interaksi pemangsa-mangsa saja, melainkan juga dipengaruhi oleh keberadaan semut yang membentuk simbiosis mutualisme dengan kutu daun. Dalam simbiosis ini, kutu daun menghasilkan cairan manis honeydew yang menjadi sumber energi bagi semut, sementara semut memberikan perlindungan kepada kutu daun dari ancaman pemangsa yaitu kepik (Vela et al., 2023).

Sejumlah penelitian memperlihatkan bahwa kutu daun dapat mempengaruhi perilaku semut, contohnya melalui senyawa kimia dalam honeydew yang membuat semut lebih memilih untuk terus melindungi koloni kutu daun (Kudo et al., 2021). Beberapa model matematika sudah dikembangkan untuk menganalisis interaksi antara kutu daun, kepik, dan semut (Gabbriellini, 2020), tetapi sebagian besar mengasumsikan tingkat perlindungan oleh semut tidak berubah (konstan) dan tidak terpengaruh oleh kondisi lingkungan. Ada yang menyajikan pendekatan yang lebih realistis dengan memperkenalkan perlindungan mutualistik adaptif, yakni semut menentukan alokasi waktu perlindungan secara optimal bergantung pada ketersediaan kutu daun dan sumber makanan alternatif (Revilla & Krivan, 2022). Meskipun demikian, belum banyak penelitian yang mendalami dampak ketersediaan makanan alternatif atau penurunan populasi kutu daun terhadap kelangsungan populasi kepik dan kestabilan ekosistem secara keseluruhan.

Penelitian ini bertujuan mengembangkan model matematis interaksi predator-prey kepik-kutu daun dengan menambahkan parameter sumber makanan alternatif dan mekanisme penurunan populasi kutu daun. Model yang dikembangkan akan dianalisis secara analitik untuk menentukan titik ekuilibrium dan kestabilannya menggunakan matriks Jacobian, serta dilakukan simulasi numerik time series dan potret fase. Hasil yang diharapkan adalah kerangka teoritis yang dapat menjelaskan kondisi koeksistensi, kepunahan predator, serta potensi munculnya pola osilasi dalam populasi. Penemuan ini diharapkan dapat berkontribusi pada pengembangan strategi pengendalian hama yang berbasis ekologi dan meminimalisir gangguan terhadap keseimbangan alam.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem dinamik pada penelitian ini dimodelkan menggunakan sistem persamaan diferensial biasa, yaitu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih fungsi tak diketahui terhadap satu variabel bebas, biasanya waktu. Sistem persamaan diferensial digunakan untuk menggambarkan perubahan suatu besaran terhadap waktu serta interaksi antarvariabel yang terlibat.

Secara umum, sistem persamaan diferensial dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, menyatakan variabel keadaan dan t menyatakan waktu. Sistem ini digunakan untuk memodelkan fenomena dinamik dalam berbagai bidang, termasuk ekologi dan biologi matematika (Boyce & DiPrima, 2012).

MODEL INTERAKSI PREDATOR-PREY

Model predator-mangsa merupakan salah satu model dasar dalam dinamika populasi yang menggambarkan interaksi antara dua spesies, yaitu mangsa dan predator. Misalkan $P(t)$ menyatakan populasi mangsa dan $H(t)$ menyatakan populasi predator pada waktu t .

Dalam kondisi tanpa predator, populasi mangsa diasumsikan tumbuh secara logistik, sedangkan dalam kondisi tanpa mangsa, populasi predator mengalami penurunan akibat kematian alami. Interaksi antara mangsa dan predator terjadi melalui proses predasi yang laju interaksinya bergantung pada kepadatan kedua populasi.

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK PREY

Pertumbuhan populasi mangsa diasumsikan mengikuti model pertumbuhan logistik yang diberikan oleh:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)\tag{2.2}$$

di mana r menyatakan laju pertumbuhan intrinsik mangsa dan K adalah daya dukung lingkungan (carrying capacity). Model ini mencerminkan bahwa

pertumbuhan populasi mangsa dibatasi oleh ketersediaan sumber daya lingkungan.

PERLINDUNGAN MUTUALISTIK DAN INTERAKSI PREDASI

Dalam penelitian ini, interaksi predator–mangsa dipengaruhi oleh mekanisme perlindungan mutualistik yang melibatkan koloni semut. Efek perlindungan ini dimodelkan melalui modifikasi laju predasi, sehingga sistem interaksi predator–mangsa dituliskan sebagai:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{aPH}{1 + quM} \quad (2.3)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{aPH}{1 + quM} - mH \quad (2.4)$$

Parameter a menyatakan tingkat serangan predator terhadap mangsa, m adalah laju kematian predator, M menyatakan ukuran koloni semut, dan q mengukur kekuatan efek perlindungan mutualistik. Variabel u menyatakan preferensi foraging semut terhadap mangsa, sehingga semakin besar nilai u atau M , efektivitas predasi predator terhadap mangsa akan semakin berkurang.

REGULASI ADAPTIF PERLINDUNGAN MUTUALISTIK DAN SUMBER PANGAN ALTERNATIF

Preferensi foraging semut terhadap mangsa tidak diasumsikan bersifat konstan, melainkan dapat berubah sebagai respons terhadap kondisi lingkungan. Perubahan preferensi ini mengikuti mekanisme adaptasi perilaku yang bergerak menuju strategi stabil evolusioner (*evolutionarily stable strategy*, ESS). Interaksi antara predator dan mangsa dalam model ini juga dipengaruhi oleh keberadaan sumber pangan alternatif yang berperan dalam memperkuat perlindungan mutualistik.

Regulasi adaptif perlindungan mutualistik dalam model ini direpresentasikan melalui variabel preferensi foraging, yang mencerminkan intensitas pemanfaatan sumber pangan alternatif oleh predator. Variabel ini tidak diasumsikan konstan, melainkan menyesuaikan secara dinamis terhadap kondisi lingkungan.

Dinamika adaptif preferensi foraging semut dimodelkan dengan persamaan:

$$\frac{du}{dt} = \beta(u^*(P, F) - u) \quad (2.5)$$

di mana parameter β menyatakan laju adaptasi perilaku foraging semut. Nilai β yang besar menunjukkan bahwa preferensi foraging semut beradaptasi dengan cepat menuju nilai optimalnya,

sedangkan nilai β yang kecil mencerminkan proses adaptasi yang lebih lambat. Dalam simulasi numerik pada penelitian ini, parameter β diambil bernilai satu untuk menyederhanakan analisis tanpa mengurangi makna biologis model dan $u^*(P, F)$ yang merupakan nilai preferensi optimal yang memaksimalkan fitness koloni semut, bergantung pada populasi mangsa P dan ketersediaan sumber daya alternatif F . Persamaan ini merepresentasikan proses penyesuaian perilaku secara gradual, sehingga preferensi foraging semut tidak berubah secara instan, melainkan secara bertahap menuju nilai optimalnya.

Bentuk persamaan adaptasi ini selanjutnya dianalisis dalam beberapa skenario atau *region* dengan nilai preferensi optimal yang berbeda, sebagaimana diimplementasikan dalam komputasi menggunakan Maple.

MODEL MATEMATIKA PREDATOR–MANGSA DENGAN PREFERENSI FORAGING ADAPTIF

Berdasarkan uraian pada bagian sebelumnya, sistem persamaan diferensial (2.3)–(2.5) membentuk model matematika yang menggambarkan dinamika interaksi predator–mangsa dengan mempertimbangkan perlindungan mutualistik dan regulasi adaptif perilaku foraging semut. Model ini direkonstruksi berdasarkan studi oleh Revilla dan Křivan (2022), dalam penelitian ini populasi semut tidak dimodelkan secara eksplisit, melainkan pengaruhnya direpresentasikan melalui variabel preferensi adaptif yang mencerminkan intensitas perlindungan mutualistik dan selanjutnya akan dianalisis untuk menentukan titik kesetimbangan serta kestabilan sistem.

Berbeda dengan Revilla & Křivan (2022) yang mengasumsikan adaptasi instan, kami memodelkan preferensi foraging semut sebagai variabel dinamis yang menyesuaikan menuju ESS dengan laju β .

METODE

Model matematika disusun dengan mengadaptasi kerangka yang dikembangkan oleh Revilla dan Křivan, dengan fokus pada peran regulasi sebagai mekanisme pengendali dinamika sistem.

Tahapan penelitian meliputi:

1. Konstruksi Model

Model dikonstruksi dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang

menggambarkan dinamika populasi mangsa, predator, dan variabel regulasi. Asumsi utama yang digunakan adalah pertumbuhan logistik pada mangsa, interaksi predasi yang dimodifikasi oleh perlindungan mutualistik, serta mekanisme regulasi adaptif yang mengarahkan variabel kontrol menuju nilai target.

2. Analisis Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan diperoleh dengan mengeliminasi ruas kanan setiap persamaan dalam sistem. Analisis dilakukan untuk beberapa skenario regulasi (region 1-3) yang merepresentasikan kondisi tanpa regulasi dan dengan regulasi adaptif.

3. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan lokal dianalisis menggunakan matriks Jacobian yang dievaluasi pada setiap titik keseimbangan. Kriteria kestabilan ditentukan berdasarkan tanda bagian real nilai eigen matriks Jacobian. Perhitungan analitik dilakukan menggunakan perangkat lunak Maple.

4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk memverifikasi hasil analisis kestabilan secara analitik. Sistem persamaan diferensial disimulasikan menggunakan metode numerik dengan bantuan perangkat lunak Python. Hasil simulasi ditampilkan dalam bentuk grafik deret waktu (time series) serta potret fase dua dan tiga dimensi. Simulasi numerik ini digunakan untuk mengamati perilaku dalam jangka waktu tertentu dan memastikan kesesuaian antara hasil analisis kestabilan dan dinamika numerik yang diperoleh.

HASIL DAN PEMBAHASAN

TITIK KESEIMBANGAN SISTEM

Titik keseimbangan sistem diperoleh dengan mensyaratkan seluruh turunan waktu bernilai nol, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 0 \\ \frac{dH}{dt} &= 0 \\ \frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dengan model :

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{aPH}{1 + quM} \tag{4.1}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{aPH}{1 + quM} - mH \tag{4.2}$$

$$\frac{du}{dt} = \beta(u^*(P, F) - u) \tag{4.3}$$

Berdasarkan bentuk persamaan regulasi pada variabel kontrol u, sistem dibagi ke dalam tiga region, yaitu:

1. Region 1: tanpa regulasi ($u^*(P, F) = 0$)

$$\frac{du_1}{dt} = \beta(0 - u) \tag{4.3.1}$$

2. Region 2: regulasi menuju nilai optimal ($u^*(P, F) = u_{reg}$)

$$\frac{du_2}{dt} = \beta(u_{reg} - u) \tag{4.3.2}$$

3. Region 3: regulasi menuju nilai tetap ($u^*(P, F) = 1$)

$$\frac{du_3}{dt} = \beta(1 - u) \tag{4.3.3}$$

Titik keseimbangan tiga region tersebut diperoleh:

1. Region 1: tanpa regulasi ($u^*(P, F) = 0$)

$$E_1 = \{H = 0, P = 0, u = 0\},$$

$$E_2 = \{H = 0, P = K, u = 0\},$$

$$E_3 = \left\{H = \frac{r(aeK - m)}{Ka^2e}, P = \frac{m}{ae}, u = 0\right\},$$

2. Region 2: regulasi menuju nilai optimal ($u^*(P, F) = u_{reg}$)

$$E_1 = \left\{H = 0, P = 0, u = \frac{F}{Mb + w}\right\},$$

$$E_2 = \left\{H = 0, P = K, u = \frac{F}{Mb + w}\right\},$$

$$E_3 = \left\{H, P = \frac{m(MqF + Mb + w)}{ae(Mb + w)}, u = \frac{F}{Mb + w}\right\},$$

$$H = -\frac{r}{a^2eK(Mb + w)^2} \bar{\Phi}$$

dengan

$$\bar{\Phi} = -FKM^2abeq + F^2M^2mq^2 - FKMaeqw$$

$$-KM^2ab^2e + 2FM^2bmq - 2KMabew$$

$$+ 2FMmqw - Kaew^2 + M^2b^2m$$

$$+ 2Mbmw + mw^2$$

dengan syarat $H, P, F > 0$

3. Region 3: regulasi menuju nilai tetap ($u^*(P, F) = 1$)

$$E_1 = \left\{H = 0, P = 0, u = \frac{F}{Mb + w}\right\},$$

$$E_2 = \left\{H = 0, P = K, u = \frac{F}{Mb + w}\right\},$$

$$E_3 = \left\{H = -\frac{r}{a^2eKD^2} \psi, P = \frac{m(MqF + D)}{aeD}, u = \frac{F}{D}\right\},$$

dengan :

$$\psi = -FKM^2abeq + F^2M^2mq^2 - FKMaewq - KM^2ab^2e + 2FM^2bmq - 2KMabew + 2FMmqw - Kaew^2 + M^2b^2m + 2Mbmw + mw^2$$

dengan syarat $H, P, F > 0$

Berikut merupakan tabel parameter yang digunakan dalam perhitungan titik kritis.

Tabel 4.1 Notasi dan nilai parameter

Parameter	Makna	Nilai	Referensi
r	laju pertumbuhan aphid	0.10 day^{-1}	Kindlman & Dixon (1999); Dixon (2000)
K	kapasitas dukung aphid	50	Murray (2002); asumsi skala populasi
a	laju serangan predator	0.01 day^{-1}	Holling (1959); Hassell (1978)
e	efisiensi konversi	0.50	Freedman & Waltman (1977)
m	mortalitas predator	0.05 day^{-1}	Murray (2002); Kot (2001)
q	kekuatan interferensi semut	0.02	Revilla & Křivan (2022); asumsi terkalibrasi
M	ukuran/efek koloni semut	50	Revilla & Křivan (2022); skala koloni
s	skala keuntungan honeydew	0.10	Stadler & Dixon (2005); asumsi
b	pembobot fungsi	0.001	Parker & Stuart

			(1976); asumsi
w	bobot tambahan fungsi	0.10	Revilla & Křivan (2022); asumsi
λ	laju adaptasi preferensi semut	1.0 day^{-1}	Dieckman & Law (1996); asumsi
F	suplai nektar eksternal variabel	(>0)	asumsi

Berdasarkan nilai parameter yang digunakan pada tabel 4.1 terdapat empat titik kesetimbangan, yaitu:

1. Region 1: tanpa regulasi ($u^*(P, F) = 0$)

$$E_1 = \{H = 0, P = 0, u = 0\},$$

Titik E_1 merepresentasikan keadaan kepunahan total populasi mangsa dan predator tanpa adanya regulasi.

$$E_2 = \{H = 0, P = 50, u = 0\},$$

Titik E_2 menunjukkan kondisi di mana populasi mangsa mencapai kapasitas dukung maksimum, sedangkan populasi predator punah.

$$E_3 = \{H = 8, P = 10, u = 0\}$$

Titik E_3 merupakan titik koeksistensi antara mangsa dan predator tanpa adanya intervensi regulasi.

2. Region 2: regulasi menuju nilai optimal ($u^*(P, F) = u_{reg}$)

$$E_1 = \{H = 0, P = 0, u = 3.33333333\},$$

Titik E_1 menyatakan kepunahan populasi meskipun regulasi diterapkan pada tingkat optimal.

$$E_2 = \{H = 0, P = 50, u = 3.33333333\},$$

Titik E_2 menggambarkan kondisi dominasi mangsa pada kapasitas dukung maksimum dengan predator punah di bawah regulasi optimal.

$$E_3 = \left\{ \begin{array}{l} H = 5.777777780, \\ P = 43.33333333, \\ u = 3.33333333 \end{array} \right\}$$

Titik E_3 merupakan titik koeksistensi stabil antara mangsa dan predator ketika regulasi berada pada nilai optimal.

3. Region 3: regulasi menuju nilai tetap ($u^*(P, F) = 1$)

$$E_1 = \{H = 0, P = 0, u = 1\},$$

Titik E_1 merepresentasikan keadaan kepunahan total populasi pada tingkat regulasi maksimum.

$$E_2 = \{H = 0, P = 50, u = 1\},$$

Titik E_2 menunjukkan kondisi di mana populasi mangsa bertahan pada kapasitas dukung, sementara predator punah akibat regulasi maksimum.

$$E_3 = \{H = 12, P = 20, u = 1\},$$

Titik E_3 merupakan titik koeksistensi mangsa dan predator di bawah pengaruh regulasi maksimum.

ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN DAN PERSAMAAN KARAKTERISTIK

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, sistem dilinierkan di sekitar titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobian sebagai berikut: $\det(\lambda I - J) = 0$

1. Region 1: tanpa regulasi ($u^*(P, F) = 0$)

$$J = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

2. Region 2: regulasi menuju nilai optimal ($u^*(P, F) = u_{reg}$)

$$J = \begin{pmatrix} -r & -\frac{aK}{\frac{MqF}{Mb+w} + 1} & 0 \\ 0 & \frac{aeK}{\frac{MqF}{Mb+w} + 1} - m & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

3. Region 3: regulasi menuju nilai tetap ($u^*(P, F) = 1$)

$$D = Mqu + 1$$

$$J = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2P}{K}\right) - \frac{aH}{D} & -\frac{aP}{D} & -\frac{aPHMq}{D^2} \\ \frac{aeH}{D} & \frac{aeP}{D} - m & -\frac{aePHMq}{D^2} \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai eigen, dilakukan linearisasi dengan mensubstitusikan masing-masing titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobi. Nilai eigen dari matriks Jacobi yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk mengklasifikasikan kestabilan titik kesetimbangan.

1. Region 1: tanpa regulasi ($u^*(P, F) = 0$)

Pada region ini, predator sepenuhnya memanfaatkan mangsa tanpa adanya pengaruh regulasi adaptif. Substitusi titik kesetimbangan pada Region 1 ke dalam matriks Jacobi menghasilkan:

$$J = \begin{pmatrix} 0.10 & -0 & 0 \\ 0 & -0.05 & -0 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Dengan nilai eigen :

$$\left\{ \begin{matrix} -1, \\ -0.0500000000000000, \\ 0.1000000000000000. \end{matrix} \right\}$$

Karena terdapat satu nilai eigen bernilai positif, maka titik kesetimbangan pada Region 1 bersifat tidak stabil (unstable equilibrium).

2. Region 2: regulasi menuju nilai optimal ($u^*(P, F) = u_{reg}$)

Pada region ini, kondisi preferensi foraging semut menyesuaikan menuju nilai optimal yang memaksimalkan fitness koloni. Substitusi titik kesetimbangan pada Region 2 ke dalam matriks Jacobi menghasilkan:

$$J = \begin{pmatrix} -0.100000000 & -0.1153846154 & 0 \\ 0 & 0.00769230770 & -0 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Dengan nilai eigen :

$$\left\{ \begin{matrix} -0.1000000000000000, \\ 0.00769230770000000, \\ -1. \end{matrix} \right\}$$

Karena terdapat satu nilai eigen bernilai positif, maka titik kesetimbangan pada Region 2 juga bersifat tidak stabil (unstable equilibrium).

3. Region 3: regulasi menuju nilai tetap ($u^*(P, F) = 1$)

Pada region ini, predator sepenuhnya bergantung pada sumber daya alternatif, sehingga perlindungan mutualistik mencapai intensitas maksimum. Substitusi titik kesetimbangan pada Region 3 ke dalam matriks Jacobi menghasilkan:

$$J = \begin{pmatrix} -0.086666664 & -0.10 & 0.13333334 \\ 0.006666667 & 0 & -0.06666667 \\ 0 & 0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

Dengan nilai eigen :

$$\left\{ \begin{matrix} -0.0781343549949770, \\ -0.00853231164502295, \\ -1. \end{matrix} \right\}$$

Karena seluruh nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan pada Region 3 bersifat stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan perangkat lunak Maple, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$P(\lambda) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ dengan :}$$

$$a = Kae(Mb + w)$$

$$b = mr(FMq + Mb + w)$$

$$c = mr.Kae(Mb + w) - m^2r(FMq + Mb + w)$$

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analisis dengan hasil perhitungan secara numerik. Simulasi numerik ditampilkan melalui potret fase dan grafik time series dengan software Python. Nilai parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 4.2 berikut.

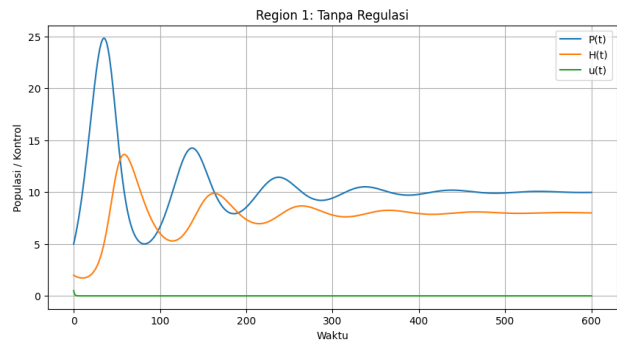
Tabel 4.2 Notasi dan nilai parameter

Parameter	Makna	Nilai	Referensi
r	laju pertumbuhan aphid	0.10 day^{-1}	Kindlman & Dixon (1999); Dixon (2000)
K	kapasitas dukung aphid	50	Murray (2002); asumsi skala populasi
a	laju serangan predator	0.01 day^{-1}	Holling (1959); Hassell (1978)
e	efisiensi konversi	0.50	Freedman & Waltman (1977)
m	mortalitas predator	0.05 day^{-1}	Murray (2002); Kot (2001)
q	kekuatan interferensi semut	0.02	Revilla & Křivan (2022); asumsi terkalibrasi
M	ukuran/efek koloni semut	50	Revilla & Křivan (2022);

			skala koloni
s	skala keuntungan honeydew	0.10	Stadler & Dixon (2005); asumsi
b	pembobot fungsi	0.001	Parker & Stuart (1976); asumsi
w	bobot tambahan fungsi	0.10	Revilla & Křivan (2022); asumsi
λ	laju adaptasi preferensi semut	1.0 day^{-1}	Dieckman & Law (1996); asumsi
F	suplai nektar eksternal variabel	(>0)	asumsi

SIMULASI DERET WAKTU (TIME SERIES)

Hasil simulasi deret waktu menunjukkan:

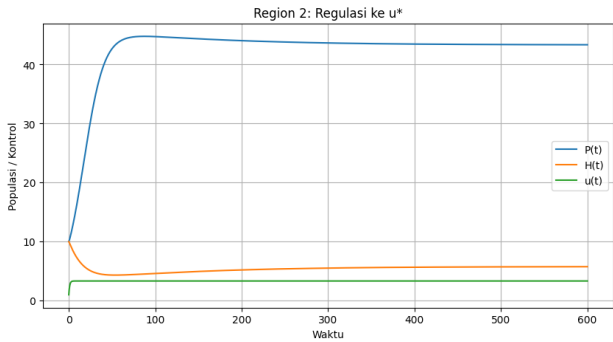


Gambar 1. Simulasi deret waktu region 1

Pada Region 1, sistem beroperasi tanpa adanya mekanisme regulasi adaptif. Grafik menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa mengalami fluktuasi dengan amplitudo relatif besar pada waktu awal. Hal ini terjadi akibat interaksi langsung antara mangsa dan pemangsa melalui fungsi respon Holling tipe II tanpa adanya kontrol eksternal.

Seiring bertambahnya waktu, amplitudo osilasi secara perlahan menurun dan sistem akhirnya menuju kondisi stabil. Variabel regulasi $u(t)$ menurun menuju nol, sehingga tidak memberikan pengaruh signifikan terhadap dinamika sistem. Hal ini menunjukkan bahwa tanpa regulasi, sistem tetap dapat mencapai kestabilan, namun membutuhkan

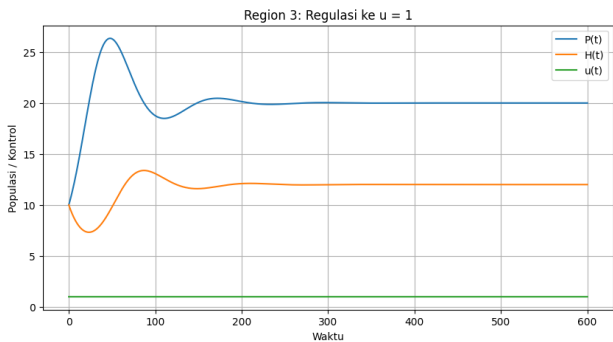
waktu yang lebih lama dan melalui fluktuasi yang cukup besar.



Gambar 2. Simulasi deret waktu region 2

Pada Region 2, regulasi adaptif diterapkan dengan mengarahkan variabel kontrol $u(t)$ menuju nilai target u_{reg} . Dari grafik terlihat bahwa fluktuasi populasi mangsa dan pemangsa meredam lebih cepat dibandingkan Region 1.

Variabel $u(t)$ dengan cepat menyesuaikan diri menuju nilai u_{reg} , sehingga menurunkan intensitas interaksi antara mangsa dan pemangsa. Dampaknya, sistem mencapai kondisi keseimbangan dengan waktu transien yang lebih singkat dan osilasi yang lebih kecil. Hal ini menunjukkan bahwa regulasi adaptif berperan penting dalam mempercepat pencapaian kestabilan sistem.



Gambar 3. Simulasi deret waktu region 3

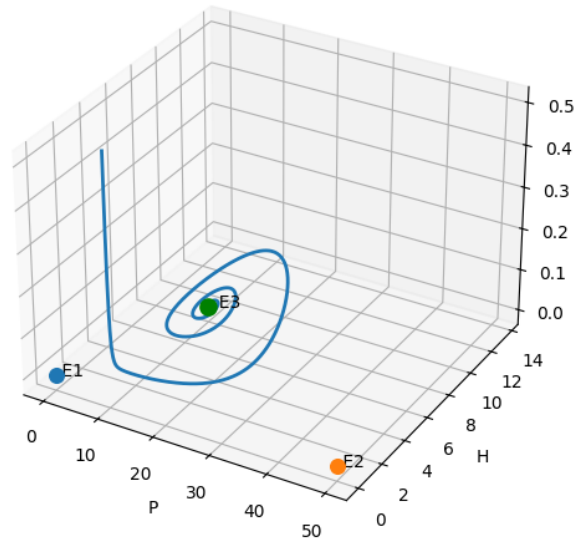
Pada Region 3, regulasi diterapkan lebih kuat dengan target regulasi yang lebih rendah. Grafik menunjukkan bahwa sistem mengalami konvergensi paling cepat dan paling stabil dibandingkan dua region sebelumnya.

Populasi mangsa dan pemangsa segera menuju nilai kesetimbangan tanpa fluktuasi besar. Variabel regulasi $u(t)$ cepat stabil, sehingga sistem langsung berada pada kondisi terkendali. Kondisi ini mengindikasikan bahwa regulasi adaptif yang lebih kuat mampu meningkatkan kestabilan lokal sistem secara signifikan.

Dinamika variabel u menunjukkan bahwa regulasi adaptif bekerja secara gradual menuju nilai target, sesuai dengan asumsi model.

POTRET FASE (PHASE POTRAIT)

Phase Portrait 3D - Region 1

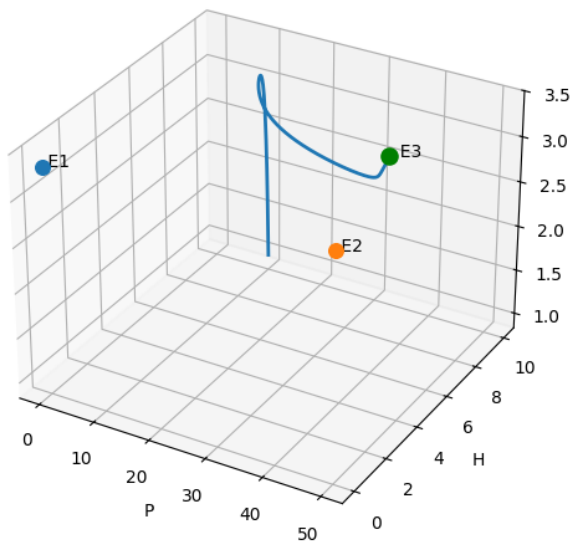


Gambar 4. Simulasi 3D potret fase region 1

Pada Region 1, phase portrait 3D menunjukkan lintasan berbentuk spiral yang relatif lebar sebelum akhirnya mendekati suatu daerah tertentu pada ruang fase. Pola ini mengindikasikan bahwa sistem mengalami osilasi yang cukup besar pada populasi mangsa dan predator akibat interaksi predasi yang tidak dikendalikan.

Nilai u menurun menuju nol, sehingga efek perlindungan mutualistik melemah dan predasi berlangsung lebih efektif. Akibatnya, fluktuasi populasi predator dan mangsa berlangsung lebih lama sebelum sistem menuju keadaan mendekati stabil. Hal ini mencerminkan kestabilan yang lemah (slow convergence) pada sistem tanpa regulasi.

Phase Portrait 3D - Region 2

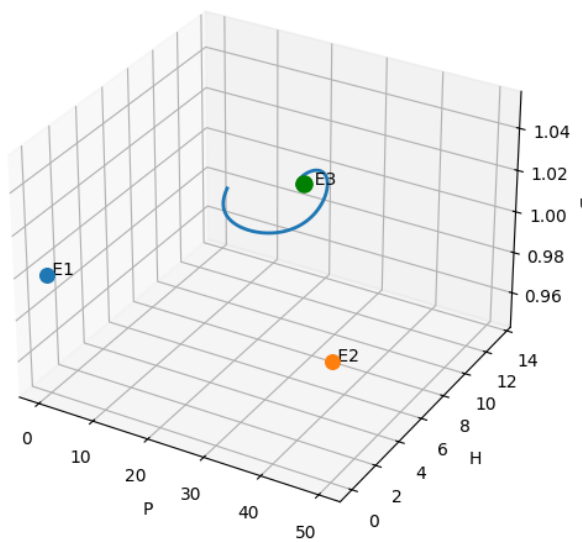


Gambar 5. Simulasi 3D potret fase region 2

Pada Region 2, lintasan phase portrait memperlihatkan lintasan yang lebih terarah dan tidak berosilasi besar. Sistem bergerak secara monoton menuju titik kesetimbangan dalam ruang (P,H,u) .

Regulasi adaptif pada variabel u menyebabkan sistem secara aktif menyesuaikan tingkat perlindungan mutualistik. Hal ini meredam fluktuasi predator-mangsa dan mempercepat tercapainya keadaan tunak. Secara geometris, lintasan ruang fase menunjukkan perilaku node stabil, yang konsisten dengan hasil analisis kestabilan lokal berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian.

Phase Portrait 3D - Region 3



Gambar 6. Simulasi 3D potret fase region 3

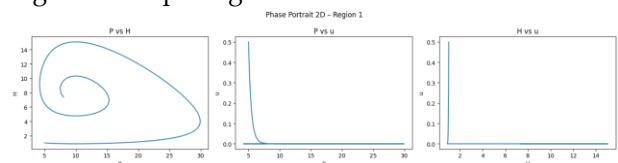
Pada Region 3, phase portrait 3D menunjukkan lintasan yang paling cepat dan paling halus menuju titik kesetimbangan. Kurva langsung mengarah ke suatu titik tetap tanpa osilasi berarti.

Hal ini menunjukkan bahwa ketika regulasi berada pada tingkat yang moderat dan stabil, sistem mencapai koeksistensi prey-predator yang paling stabil. Secara biologis, kondisi ini mencerminkan keseimbangan optimal antara predasi dan perlindungan mutualistik, sehingga dinamika populasi menjadi terkendali dan berkelanjutan.

INTERAKSI INTERPRETASI POTRET FASE 2D

Potret fase dua dimensi digunakan untuk memperjelas hubungan dinamika antarvariabel secara berpasangan, yaitu antara populasi mangsa dan predator (P,H) , antara mangsa dan variabel regulasi (P,u) , serta antara predator dan variabel regulasi (H,u) . Pola lintasan pada bidang fase mencerminkan sifat kestabilan sistem dan pengaruh regulasi adaptif.

Region 1: Tanpa Regulasi



Gambar 7. Simulasi 2D potret fase region 1

Bidang P-H

Lintasan membentuk spiral menuju daerah tertentu, yang menunjukkan adanya osilasi populasi mangsa dan predator sebelum mendekati keadaan stabil. Hal ini mencerminkan interaksi predator-mangsa klasik tanpa kontrol, di mana fluktuasi populasi relatif besar.

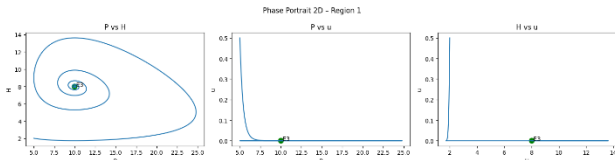
Bidang P-u dan H-u

Kurva menunjukkan bahwa nilai u menurun dengan cepat menuju nol, sementara P dan H masih mengalami fluktuasi. Ini menegaskan bahwa tanpa regulasi eksternal, efek perlindungan mutualistik tidak lagi bekerja, sehingga dinamika sistem sepenuhnya ditentukan oleh interaksi alami antara mangsa dan predator.

Region 1:

Sistem memang stabil, tetapi tidak kuat, pada awalnya terjadi fluktuasi besar, dan sistem baru mencapai keadaan stabil setelah waktu yang cukup lama.

Region 2: Regulasi Adaptif menuju $u=u_{reg}$



Gambar 8. Simulasi 2D potret fase region 2

Bidang P-H

Lintasan tidak membentuk spiral tertutup, melainkan bergerak langsung menuju titik kesetimbangan, menandakan osilasi yang jauh lebih kecil dibandingkan Region 1.

Bidang P-u

Nilai u meningkat secara cepat menuju u_{reg} , sementara populasi mangsa bergerak menuju nilai keseimbangan yang stabil.

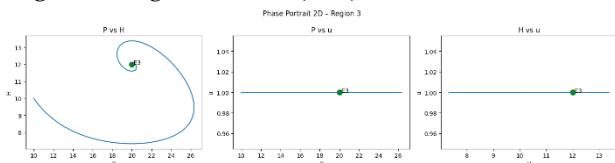
Bidang H-u

Hubungan antara predator dan regulasi menunjukkan bahwa peningkatan u diikuti oleh penurunan fluktuasi predator, sehingga dinamika menjadi lebih terkendali.

Region 2:

Regulasi adaptif membuat sistem lebih stabil dan lebih cepat mencapai keseimbangan.

Region 3: Regulasi Stabil ($u=1$)



Gambar 9. Simulasi 2D potret fase region 3

Bidang P-H

Lintasan menunjukkan osilasi kecil yang cepat teredam, kemudian langsung menuju titik kesetimbangan.

Bidang P-u dan H-u

Kurva hampir berupa garis horizontal, menandakan bahwa nilai u konstan. Dengan regulasi yang stabil, dinamika sistem didominasi oleh interaksi prey-predator yang telah terkendali.

Region 3:

Dibandingkan region lain, sistem pada kondisi ini mencapai kestabilan lebih cepat dan lebih kuat.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan simulasi numerik deret waktu serta potret fase dua dan tiga dimensi, dapat disimpulkan bahwa regulasi adaptif pada variabel preferensi

foraging u memiliki peran penting dalam menentukan kestabilan sistem prey-predator.

Pada Region 1 (tanpa regulasi), populasi mangsa dan predator mengalami fluktuasi yang relatif besar sebelum menuju keadaan tunak, yang ditunjukkan oleh osilasi pada deret waktu serta lintasan spiral pada potret fase. Hal ini menunjukkan bahwa sistem bersifat stabil lemah dengan laju konvergensi yang lambat.

Pada Region 2 (regulasi menuju u_{reg}), fluktuasi populasi berkurang secara signifikan. Regulasi adaptif menyebabkan sistem lebih cepat mencapai titik kesetimbangan, sebagaimana terlihat dari deret waktu yang cepat meredam osilasi dan lintasan fase yang langsung menuju titik tetap.

Pada Region 3 (regulasi stabil), sistem menunjukkan konvergensi paling cepat dan paling stabil. Nilai u yang konstan membuat dinamika prey-predator menjadi terkendali, dengan osilasi minimal dan lintasan fase yang pendek serta terarah menuju titik kesetimbangan.

Secara keseluruhan, simulasi numerik mendukung hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan, dan menunjukkan bahwa regulasi adaptif bukan hanya meningkatkan kestabilan lokal, tetapi juga mempercepat proses stabilisasi sistem. Dengan demikian, pengendalian preferensi foraging semut dapat dipandang sebagai mekanisme efektif dalam menjaga koeksistensi populasi mangsa dan predator. Model ini memiliki potensi untuk dikembangkan lebih lanjut dengan memasukkan bentuk regulasi lain atau faktor ekologis tambahan.

SARAN

Berdasarkan hasil analisis stabilitas dan simulasi numerik pada model mangsa-predator dengan perlindungan mutualistik dan regulasi adaptif, beberapa saran dapat diberikan sebagai berikut.

Secara praktis, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa penerapan mekanisme regulasi adaptif pada preferensi semut berpotensi digunakan sebagai strategi pengendalian hayati untuk menjaga stabilitas populasi mangsa dan predator. Oleh karena itu, pendekatan ini dapat dipertimbangkan dalam perencanaan pengelolaan ekosistem pertanian, khususnya pada sistem yang melibatkan interaksi kutu daun-kumbang kepik-semut.

Secara teoretis, model dapat diperluas dengan memasukkan dinamika koloni semut sebagai variabel populasi terpisah, sehingga lebih realistis dan merepresentasikan interaksi antarspesifik. Lebih lanjut, fungsi regulasi adaptif untuk variabel preferensi dapat dimodifikasi menjadi bentuk nonlinier atau berbasis ambang batas untuk menguji pengaruh respons perilaku yang lebih kompleks. Untuk penelitian lebih lanjut, disarankan untuk melakukan analisis bifurkasi pada parameter kunci, seperti tingkat serangan predator dan kekuatan pertahanan mutualistik, untuk memahami perubahan stabilitas sistem secara global. Penelitian di masa mendatang juga dapat mempertimbangkan penambahan efek lingkungan, penundaan waktu, atau gangguan stokastik untuk lebih mendekati dinamika ekosistem alami.

DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (10th Edition). John Wiley & Sons, Inc.
- Dieckmann, U., & Law, R. (1996). The dynamical theory of coevolution: A derivation from stochastic ecological processes. *Journal of Mathematical Biology*, 34, 579–612. <https://doi.org/10.1007/BF02409751>
- Dixon, A. F. G. (2000). *Insect Predator-Prey Dynamics: Ladybird Beetles and Biological Control*. Cambridge University Press.
- Holling, C. S. (1959). Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*, 91(7), 385–398. <https://doi.org/10.4039/Ent91385-7>
- Hassell, M. P. (1978). *The Dynamics of Arthropod Predator-Prey Systems*. Princeton University Press.
- Gabbriellini, S. (2020). Mathematical modeling of aphid-ant-predator interactions with mutualistic protection. *Mathematical Biosciences*, 326, 108374.
- Kindlmann, P., & Dixon, A. F. G. (1999). Population dynamics of aphids. *Ecological Modelling*, 123, 1–17.
- Kot, M. (2001). *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press.
- Kudo, S., Takahashi, M., & Miura, T. (2021). Chemical mediation in ant-aphid mutualism: Effects of honeydew composition on ant behavior. *Journal of Chemical Ecology*, 47, 789–798.
- Lin, T., Kuo, Y., & Yang, E. C. (2018). Biological control of aphids by lady beetles: Predator-prey interactions and implications for pest management. *Biological Control*, 120, 60–67.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer.
- Parker, G. A., & Stuart, R. A. (1976). Animal behavior as a strategy optimizer: Evolution of resource assessment strategies and optimal emigration thresholds. *The American Naturalist*, 110(976), 1055–1076.
- Putri, L. K. M., Savitri, D., and Abadi, (2023). Dynamical Behavior in Prey Predator Model with Mutualistic Protection for Prey. *Jambura J. Biomath*, vol. 4, no. 2, pp. 103–109, 2023, <https://doi.org/10.37905/jjbm.v4i2.21541>
- Revilla, T. A., & Křivan, V. (2022). Prey-predator dynamics with adaptive protection mutualism. *Applied Mathematics and Computation*. 433. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127368>
- Savary, S., Willocquet, L., Pethybridge, S. J., Esker, P., McRoberts, N., & Nelson, A. (2019). The global burden of pathogens and pests on major food crops. *Nature Ecology & Evolution*, 3, 430–439. <https://doi.org/10.1038/s41559-018-0793-y>
- Stadler, B., & Dixon, A. F. G. (2005). Ecology and evolution of aphid-ant interactions. *Annual Review of Ecology, Evolution, and Systematics*, 36, 345–372. <https://doi.org/10.1146/annurev.ecolsys.36.102003.152617>
- Vela, J. M., Ruiz, M., & Tena, A. (2023). Ant-aphid mutualism and its effects on predator efficiency in agricultural ecosystems. *Ecological Entomology*, 48, 215–226.