BILANGAN PRIMA FIBONACCI

Saiful Rizal
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya; Email: lazir.lufias@gmail.com

Agung Lukito
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya; Email: gung_lukito@yahoo.co.id

Abstrak

Dalam barisan bilangan Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,21,... dapat ditemukan bilangan Prima 2,3,5,13,... yang selanjutnya disebut bilangan Prima Fibonacci. Menariknya kebanyakan bilangan Prima Fibonacci tersebut muncul pada suku ke-p pada barisan Fibonacci, dengan p prima.
Kata Kunci: prima fibonacci.

Abstract

On the Fibonacci sequence 1,1,2,3,5,8,13,21,... can be found prime number 2,3,5,13,... called by Fibonacci Prime. Moreover Fibonacci Prime mostly appears on the p^{th} term of Fibonacci squence, where p is prime number.
Keywords: fibonacci prime.

PENDAHULUAN

Bilangan prima dan bilangan Fibonacci masih menjadi topik menarik dalam Matematika. Walaupun kedua topik tersebut tidak termasuk dalam Matematika modern, tetapi masih menyisakan beberapa misteri. Beberapa misteri mengenai bilangan prima dan bilangan Fibonacci masih belum terpecahkan sampai sekarang dan berumur ratusan tahun.

Bilangan prima adalah bilangan asli yang mempunyai tepat dua pembagi positif yaitu 1 dan dirinya sendiri, seperti 2, 3, 5, 7. 2 merupakan bilangan prima terkecil dan satu-satunya bilangan prima yang genap. Bilangan prima banyak digunakan dalam komputasi, salah satu penggunaan bilangan prima adalah kriptografi RSA. Sedangkan bilangan Fibonacci adalah bilangan cacah F_n yang didefinisikan secara rekursif $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$. Bilangan Fibonacci sering ditemui pada alam.

Meskipun bilangan prima dan bilangan Fibonacci mempunyai definisi yang berbeda, tetapi tidak menutup kemungkinan bahwa terdapat hubungan antara bilangan prima dan bilangan Fibonacci. Dalam skripsi ini akan dibahas beberapa hubungan antara bilangan prima dan bilangan Fibonacci yaitu bilangan Prima Fibonacci. Bilangan Prima Fibonacci adalah bilangan Prima sekaligus bilangan Fibonacci. Dalam tulisan ini akan dibahas hubungan antara bilangan prima dan bilangan Fibonacci.

PEMBAHASAN

Sebelum membahas bilangan prima Fibonacci, akan dibahas keterbagian pada bilangan Fibonacci terlebih dahulu. Digunakan simbol F_n untuk menyatakan bilangan Fibonacci ke-n.

Lemma 3.1.
$\forall d, k \in \mathbb{N},\ F_{d+k} = F_d F_{k+1} + F_{d-1} F_k.$

Bukti
Akan dibuktikan dengan induksi pada k karena induksi pada d hampir mirip. Untuk $k = 1$, $F_{d+1} = F_d F_{1+1} + F_{d-1} F_1 = F_d F_2 + F_{d-1} F_1 = F_d . 1 + F_{d-1} . 1 = F_d + F_{d-1}$ [benar]. Asumsikan $F_{d+k} = F_d F_{k+1} + F_{d-1} F_k$ benar untuk semua $1 \leq k \leq n,\ n \in \mathbb{N}, n > 1$, selanjutnya perhatikan bahwa untuk $k = n + 1$

$$\begin{aligned} F_{d+(n+1)} &= F_{d+n} + F_{d+n-1} \\ &= (F_d F_{n+1} + F_{d-1} F_n) + (F_d F_n + F_{d-1} F_{n-1}) \\ &= F_d (F_{n+1} + F_n) + F_{d-1} (F_n + F_{n-1}) \\ &= F_d F_{n+2} + F_{d-1} F_{n+1} = F_d F_{(n+1)+1} + F_{d-1} F_{(n+1)} \text{ [benar]}. \end{aligned}$$

Dengan demikian bukti selesai menurut induksi matematik. □

Lemma 3.2.
$\forall d, k \in \mathbb{N},\ F_d | F_{dk}.$

Bukti
Akan dibuktikan dengan induksi pada k. Untuk $k = 1$, $F_d | F_{d.1}$ [benar]. Asumsikan $F_d | F_{dk}$ benar untuk setiap

$1 \le k \le n, n \in \mathbb{N}, n > 1$, selanjutnya perhatikan bahwa untuk $k = n+1$

$$F_{d(n+1)} = F_{dn+d}$$
$$= F_{dn}F_{d+1} + F_{dn-1}F_d \quad \text{, menurut Lemma 3.1.}$$

Karena $F_d | F_{dn}$ maka $F_{dn} = c.F_d$ sehingga

$$F_{d(n+1)} = c.F_dF_{d+1} + F_{dn-1}F_d$$
$$= F_d(c.F_{d+1} + F_{dn-1})$$

Dengan kata lain $F_d | F_{d(n+1)}$ [benar]. Dengan demikian bukti selesai menurut induksi matematik. □

Lemma 3.3.
$\forall d \in \mathbb{N},\ \gcd(F_d, F_{d+1}) = 1.$
Bukti
Akan dibuktikan dengan induksi pada d. Untuk $d = 1$, $\gcd(F_d, F_{d+1}) = \gcd(F_1, F_2) = \gcd(1,1) = 1$ [benar]. Asumsikan $\gcd(F_d, F_{d+1}) = 1$ benar untuk setiap $1 \le d \le k, k \in \mathbb{N}, k > 1$, selanjutnya perhatikan bahwa untuk $d = k+1$

$$\gcd(F_{k+1}, F_{(k+1)+1}) = \gcd(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) = \gcd(F_{k+1}, F_k)$$
$$= \gcd(F_k, F_{k+1}) = 1 \quad \text{[benar]}$$

Dengan demikian bukti selesai menurut induksi matematik. □

Lemma 3.4.
$\forall d, k \in \mathbb{N},\ \gcd(F_d, F_k) = F_{\gcd(d,k)}.$

Bukti
Tanpa mengurangi keumuman asumsikan $d \ge k$ sehingga $d = kq + r$ atau $r = d \bmod k$ dengan $q, r \in \mathbb{N}$ dan $r < k$. Perhatikan bahwa

$$\gcd(F_d, F_k) = \gcd(F_k, F_d)$$
$$= \gcd(F_k, F_{kq+r})$$
$$= \gcd(F_k, F_{kq}F_{r+1} + F_{kq-1}F_r)$$

$F_k | F_{kq}F_{r+1}$ menurut Lemma 3.2 sehingga $\gcd(F_k, F_{kq}F_{r+1} + F_{kq-1}F_r) = \gcd(F_k, F_{kq-1}F_r)$. Karena $F_k | F_{kq}$ menurut Lemma 3.2 dan $\gcd(F_{kq}, F_{kq-1}) = 1$ menurut Lemma 3.3 maka $\gcd(F_k, F_{kq-1}F_r) = \gcd(F_k, F_r)$ sehingga $\gcd(F_d, F_k) = \gcd(F_k, F_r)$ dengan $r = d \bmod k$. Karena $\gcd(F_d, F_k) = \gcd(F_k, F_r)$ dengan $r = d \bmod k$ merupakan algoritma pembagian Euclid pada indeks bilangan Fibonacci maka $\gcd(F_d, F_k) = F_{\gcd(d,k)}$. □
Selanjutnya akan dibahas bilangan prima Fibonacci.

Definisi 3.5. (Bilangan Prima Fibonacci)
Bilangan prima Fibonacci adalah bilangan Fibonacci yang sekaligus bilangan prima.
Dari Definisi 3.5 tersebut yang termasuk bilangan prima Fibonacci antara lain $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_7 = 13$, $F_{11} = 89$, $F_{13} = 233$, dan $F_{17} = 1597$ sehingga dapat dibuat teorema berikut.

Teorema 3.6.
(1) F_4 adalah bilangan prima Fibonacci.
(2) Jika F_p prima Fibonacci maka $p = 4$ atau p prima ganjil.

Bukti
(1) $F_4 = 3$ adalah bilangan prima Fibonacci menurut Definisi 3.5.
(2) Cukup dibuktikan "jika F_p prima Fibonacci dan $p \ne 4$ maka p prima ganjil" karena Teorema 3.6(1). Andaikan p bukan bilangan prima. Karena p bukan bilangan prima maka $p = ab > 4$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $1 < a, b < p$. Karena $p = ab$ maka $F_a | F_p$ dan $F_b | F_p$. Tanpa mengurangi keumuman asumsikan salah satu dari $2 < a < p$ atau $2 < b < p$. Karena $F_a | F_p$, $F_b | F_p$ serta $2 < a < p$ atau $2 < b < p$ maka F_p komposit [kontradiksi dengan hipotesis teorema]. Untuk p prima genap yaitu $p = 2$, $F_p = F_2 = 1$ bukan prima. Dengan demikian bukti selesai. □

Tetapi $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$ sebagai contoh penyangkal terkecil dari konvers Teorema 3.6(2). Selanjutnya akan dibahas karakteristik bilangan prima p yang menyebabkan F_p komposit.

Lemma 3.7.
Jika $n \in \mathbb{N},\ n > 7$ maka $F_n > 2n - 1$.
Bukti
Akan dibuktikan dengan induksi pada n. Untuk $n = 8$, $F_8 = 21 > 15 = 2.8 - 1$ [benar]. Asumsikan $F_n > 2n - 1$ benar untuk setiap $1 \le n \le k, k \in \mathbb{N}, k > 8$, selanjutnya perhatikan bahwa untuk $n = k+1$
$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} > (2k-1) + (2k-3) = 4k - 4 > 2k + 1 = 2(k+1) - 1$ [benar]. Dengan demikian bukti selesai menurut induksi matematik. □

Lemma 3.8.
$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$

Bukti
Akan dibuktikan dengan induksi pada n. Untuk $n = 1$, $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = 1 = F_1$ [benar]. Asumsikan $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ benar untuk setiap $0 \le n \le k,\ k \in \mathbb{N}, k > 1$, selanjutnya perhatikan bahwa untuk $n = k+1$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) \text{ [benar].}$$

Dengan demikian bukti selesai menurut induksi matematik. □

Teorema 3.9.
Misalkan $p > 7$ prima, $p \equiv 2(mod\ 5)$ atau $p \equiv 4(mod\ 5)$. Jika $2p-1$ prima maka $(2p-1)|F_p$ dan F_p komposit.

Bukti

Perhatikan bahwa $F_p = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p}\right)$ kemudian

$$F_p\sqrt{5} = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p}\right)$$

Setelah dikuadratkan kedua ruas didapat

$$5\left(F_p\right)^2 = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2p} - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p}\right) \text{ atau}$$

$$2^{2p-1}.5\left(F_p\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^{2p} + \left(1-\sqrt{5}\right)^{2p}\right) + 2^{2p}$$

Dengan menggunakan teorema koefisien binomial didapat

$$2^{2p-1}.5\left(F_p\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k\left(\sqrt{5}\right)^k\right) + 2^{2p}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2\binom{2p}{2}5 + 2\binom{2p}{4}5^2 + 2\binom{2p}{6}5^3 + \cdots + 2.5^p\right) + 2^{2p}$$

$$= 1 + \binom{2p}{2}5 + \binom{2p}{4}5^2 + \cdots + \binom{2p}{2p-2}5^{p-1} + 5^p + 2^{2p}$$

Karena $2p-1$ prima maka $2^{2p-1} \equiv 2(mod\ 2p-1)$ menurut Fermat's Little Theorem dan $\binom{2p}{k} \equiv 0(mod\ 2p-1), 2 \le k \le 2p-2$ sehingga

$$2^{2p-1}.5\left(F_p\right)^2 \equiv 2.5\left(F_p\right)^2(mod\ 2p-1) \equiv 1 + 5^p + 4(mod\ 2p-1) \text{ atau}$$

$$2.\left(F_p\right)^2 \equiv 5^{p-1} + 1(mod\ 2p-1) \quad (1)$$

Misalkan $\left(\frac{a}{b}\right)$ adalah simbol Legendre. Menurut kriteria Euler

$$\left(\frac{5}{2p-1}\right) \equiv 5^{p-1}(mod\ 2p-1) \quad (2)$$

Karena $5 \equiv 1(mod\ 4)$ dan $2p-1$ prima maka $\left(\frac{5}{2p-1}\right) = \left(\frac{2p-1}{5}\right)$ menurut Gauss's Reciprocity Theorem. Karena $p \equiv 2(mod\ 5)$ atau $p \equiv 4(mod\ 5)$ maka $2p-1 \equiv 3(mod\ 5)$ atau $2p-1 \equiv 7(mod\ 5)$ sehingga

$$\left(\frac{5}{2p-1}\right) = \left(\frac{2p-1}{5}\right) = \begin{cases}\left(\frac{5k+3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1 \\ \left(\frac{5k+7}{5}\right) = \left(\frac{7}{5}\right) = -1\end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Karena $\left(\frac{5}{2p-1}\right) = -1$, (1), dan (2) maka $2.\left(F_p\right)^2 \equiv 0(mod\ 2p-1)$ sehingga $(2p-1)|F_p$. Karena $p > 7$ maka $F_p > 2p-1$. Karena $F_p > 2p-1 > 0$ dan $(2p-1)|F_p$ maka F_p komposit. □

Teorema 3.9 tersebut mengakibatkan F_{19} komposit seperti yang dibahas sebelumnya. Sampai saat ini masih diketahui sebanyak 33 bilangan prima Fibonacci yaitu $F_3, F_4, F_5, F_7, F_{11}, F_{13}, F_{17}, F_{23}, F_{29}, F_{43}, F_{47}, F_{83}, F_{131}, F_{137}, F_{359}, F_{431}, F_{433}, F_{449}, F_{509}, F_{569}, F_{571}, F_{2971}, F_{4723}, F_{5387}, F_{9311}, F_{9677}, F_{14431}, F_{25561}, F_{30757}, F_{35999}, F_{37511}, F_{50833}, F_{81839}$.

F_{81839} dengan tujuh belas ribu digit lebih adalah bilangan prima Fibonacci terbesar yang diketahui saat ini, keprimaannya dibuktikan oleh David Broadbent and Bouk de Water pada April 2001. Mengenai uji keprimaan bilangan Fibonacci yang efektif dan kehinggaan bilangan prima Fibonacci masih menjadi misteri.

PENUTUP

Simpulan

Dari pembahasan dalam bab 3 dapat disimpulkan:

1. Syarat perlu agar bilangan Fibonacci ke-p prima adalah $p = 4$ atau p prima ganjil.
2. Misalkan $p > 7$ prima, $p \equiv 2(mod\ 5)$ atau $p \equiv 4(mod\ 5)$. Syarat cukup agar bilangan Fibonacci ke-p komposit adalah $2p-1$ prima.

Masalah Terbuka

Sampai saat ini masih ada beberapa masalah terbuka, yaitu:

1. Apakah bilangan Prima Fibonacci berhingga?.
2. Adakah uji keprimaan yang efektif untuk bilangan Prima Fibonacci?.

DAFTAR PUSTAKA

Drobot, Vladimir. 2000. "On Primes in the Fibonacci Sequence". *The Fibonacci Quarterly 38.1*, halaman 71-72.

Schneider, Christina L.. 2008. "Discovering Connections: The Prime Numbers and the Fibonacci Numbers". Department of Mathematics and Computer Science-Ripon College Summation, halaman 20-25.