MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika **Volume 14 No 01**
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 ***Tahun 2026***

PENDEKATAN INTEGRAL FRAKSIONAL RIEMANN-LIOUVILLE PADA FUNGSI EKSPONENSIAL

Syifaul Janan
Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta
e-mail: syifaul.janan@upnvj.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini menganalisis integral fraksional Riemann-Liouville pada fungsi eksponensial menggunakan pendekatan deret Maclaurin. Fungsi eksponensial direpresentasikan dalam bentuk deret pangkat, kemudian operator integral fraksional diterapkan pada setiap suku menggunakan sifat fungsi gamma. Hasil analisis menunjukkan bahwa integral fraksional fungsi eksponensial dapat dinyatakan sebagai deret tak hingga yang melibatkan rasio fungsi gamma. Melalui uji rasio, diperoleh bahwa deret ini konvergen untuk seluruh bilangan real, sama dengan interval konvergensi fungsi eksponensial aslinya. Simulasi numerik menggunakan MATLAB memverifikasi hasil analitis dan menunjukkan bahwa operator integral fraksional tidak mengubah sifat konvergensi global fungsi eksponensial, namun memodifikasi struktur dan skalanya bergantung pada orde fraksional. Penelitian ini memberikan pemahaman mendalam tentang perilaku fungsi eksponensial di bawah operasi integral fraksional dan dapat menjadi dasar penerapan metode serupa pada fungsi-fungsi lain.
Kata Kunci: deret Maclaurin, fungsi eksponensial, integral fraksional, Riemann-Liouville, selang konvergensi

Abstract

This study analyzes the Riemann-Liouville fractional integral of the exponential function using the Maclaurin series approach. The exponential function is represented in power series form, then the fractional integral operator is applied to each term using the properties of the gamma function. The analysis results show that the fractional integral of the exponential function can be expressed as an infinite series involving the gamma function ratio. Through the ratio test, it is obtained that this series converges for all real numbers, identical to the convergence interval of the original exponential function. Numerical simulations using MATLAB verify the analytical results and demonstrate that the fractional integral operator does not alter the global convergence property of the exponential function, but modifies its structure and scale depending on the fractional order. This research provides in-depth understanding of the behavior of exponential functions under fractional integral operations and can serve as a foundation for applying similar methods to other functions.
Keywords: *Maclaurin series, exponential function, fractional integral, Riemann-Liouville, interval of convergence*

PENDAHULUAN

Fungsi eksponensial e^x merupakan salah satu fungsi fundamental yang memiliki peranan sangat penting dalam berbagai bidang sains dan teknologi. Keistimewaan utama fungsi ini terletak pada sifatnya yang invarian terhadap operasi diferensiasi maupun integrasi, di mana turunan dan integralnya tetap menghasilkan fungsi eksponensial itu sendiri. Karakteristik unik tersebut menjadikan fungsi eksponensial sebagai model matematis yang banyak digunakan untuk merepresentasikan fenomena pertumbuhan dan peluruhan dengan laju yang bersifat kontinu dan proporsional terhadap keadaan saat ini. Fungsi eksponensial dapat direpresentasikan dalam bentuk deret pangkat Maclaurin, yaitu deret tak hingga yang konvergen untuk seluruh bilangan riil (Almoneef et al., 2025). Representasi ini memungkinkan analisis matematis yang lebih mendalam terhadap sifat-sifat fungsi eksponensial.

Dalam matematika klasik, konsep turunan dan integral umumnya dibatasi pada orde bilangan bulat, seperti turunan pertama, turunan kedua, serta integral satu kali dan dua kali. Namun, perkembangan teori matematika memunculkan pertanyaan mengenai kemungkinan mendefinisikan turunan dan integral untuk orde non-integer, seperti setengah atau seperempat. Kajian ini melahirkan suatu cabang matematika yang dikenal sebagai kalkulus fraksional, yang memperluas konsep diferensiasi dan integrasi ke orde fraksional.

Salah satu pendekatan yang paling banyak digunakan dalam perhitungan integral fraksional adalah formulasi Riemann–Liouville. Pendekatan ini memberikan kerangka matematis yang kuat untuk mendefinisikan integral berorde fraksional dan telah banyak diterapkan dalam berbagai permasalahan teoritis maupun terapan (W. Sun, 2021). Seiring perkembangan penelitian, formulasi ini mengalami berbagai modifikasi dan perluasan, termasuk pengenalan parameter tambahan untuk meningkatkan fleksibilitas dan cakupan aplikasinya dalam pemodelan fenomena fisika (Elgindy, 2025). Dalam perhitungan integral fraksional Riemann–Liouville, fungsi gamma memegang peranan yang sangat penting. Fungsi gamma dapat dipandang sebagai generalisasi dari fungsi faktorial, yang memungkinkan perluasan konsep faktorial ke bilangan real dan pecahan. Keberadaan fungsi gamma menjadi elemen kunci dalam hampir seluruh formulasi kalkulus fraksional.

Secara analitis, perhitungan integral fraksional sering kali melibatkan proses yang kompleks dan sulit dilakukan secara manual. Oleh karena itu, berbagai metode numerik dan komputasi telah dikembangkan untuk memungkinkan perhitungan integral fraksional secara efisien dan akurat dengan bantuan komputer. Beragam pendekatan numerik telah diperkenalkan, lengkap dengan analisis galat untuk mengukur tingkat akurasi hasil perhitungan (Feng et al., 2024). Selain itu, teknik-teknik khusus juga dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dan integral yang melibatkan operator fraksional (H. Sun et al., 2018). Perkembangan terbaru bahkan menunjukkan bahwa metode komputasi modern mampu menghasilkan solusi dengan tingkat ketelitian yang sangat tinggi (Suthar et al., 2025). Hal ini menegaskan bahwa kalkulus fraksional tidak hanya bersifat teoretis, tetapi juga memiliki relevansi praktis yang kuat dalam berbagai aplikasi ilmiah dan rekayasa.

Meskipun kajian mengenai integral maupun turunan fraksional telah banyak dilakukan untuk berbagai jenis fungsi, seperti yang dilakukan oleh (Janan, 2025), (Janan & Janan, 2024), dan (Janan et al., 2025), namun analisis yang komprehensif dan mendalam terhadap integral fraksional fungsi eksponensial dengan pendekatan deret masih relatif terbatas. Walaupun sifat-sifat dasar integral fraksional Riemann–Liouville telah dipahami dengan baik (Aljohani et al., 2024), perilaku fungsi eksponensial ketika dikenai operator integral berorde fraksional, khususnya melalui representasi deret, masih memerlukan kajian lebih lanjut. Oleh karena itu, penelitian ini memiliki urgensi untuk memberikan pemaparan yang sistematis dan mendetail mengenai integral fraksional Riemann-Liouville pada fungsi eksponensial dengan memanfaatkan representasi deret Maclaurin.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis integral fraksional fungsi eksponensial secara menyeluruh menggunakan formulasi Riemann–Liouville. Analisis dilakukan melalui beberapa tahapan. Pertama, fungsi eksponensial direpresentasikan dalam bentuk deret Maclaurin dan ditentukan interval konvergensinya. Kedua, dibuktikan rumus dasar integral fraksional untuk fungsi pangkat sederhana dengan memanfaatkan sifat-sifat fungsi gamma. Ketiga, rumus tersebut diterapkan pada setiap suku dalam deret untuk memperoleh bentuk umum integral fraksional fungsi eksponensial. Keempat, ditentukan daerah keberlakuan hasil integral fraksional menggunakan uji rasio. Terakhir, seluruh hasil analisis teoretis diverifikasi dan divisualisasikan menggunakan perangkat lunak MATLAB untuk mengamati karakteristik grafik yang dihasilkan. Diharapkan hasil penelitian ini dapat memperkaya pemahaman mengenai perilaku fungsi eksponensial di bawah operasi integral berorde fraksional, serta menjadi dasar bagi penerapan metode serupa pada fungsi-fungsi lain yang dapat direpresentasikan dalam bentuk deret.

KAJIAN TEORI

Akan dijelaskan beberapa definisi dan teorema penting terkait deret Maclaurin, integral fraksional, dan fungsi gamma.

Ekspansi Deret Maclaurin

Teorema 2.1 (Stewart, 2012b)

Untuk suatu fungsi riil $f(x)$, ekspansi deret Maclaurin dapat ditulis sebagai:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \tag{2.1}$$

di mana $f^{(p)}$ melambangkan turunan ke- p dari fungsi f, sementara $p!$ adalah notasi untuk faktorial dari bilangan p.

Kita terapkan rumus ekspansi (2.1) tersebut, maka, diperoleh:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Dengan demikian, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, dapat dituliskan bahwa (Stewart, 2012a)

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} x^p \qquad (2.2)$$

Lalu dimisalkan:

$$C_p = \frac{1}{p!}$$

dan

$$C_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.2), deret tersebut akan konvergen untuk setiap x, yang dapat dibuktikan melalui:

$$|x| < \lim_{p\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{p!}}{\frac{1}{(p+1)!}} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{p!} \times \frac{(p+1)!}{1} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left| \frac{(p+1)p!}{p!} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} |p+1|$$

$$= \infty$$

Berdasarkan hasil tersebut, didapat bahwa $|x| < \infty$, yang berarti $-\infty < x < \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa deret yang dimaksud bersifat konvergen untuk seluruh nilai x pada himpunan bilangan real, atau dengan kata lain, interval konvergensi deret ini mencakup semua bilangan real x.

Integral Fraksional
Definisi 2.2 (Daraghmeh et al., 2020)

Integral fraksional Riemann-Liouville fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai:

$$I^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, & \alpha > 0 \\ f(x), & \alpha = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

dengan $\Gamma(\alpha)$ merupakan fungsi gamma.

Fungsi Gamma
Definisi 2.3 (Artin, 2015)
Fungsi gamma $\Gamma(y)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt \quad (\Re e(y) > 0)$$

dengan $t^{y-1} = e^{(y-1)\log(t)}$. Integral tersebut konvergen untuk setiap $y \in \mathbb{C}$ dengan $\Re e(y) > 0$
Fungsi gamma juga memenuhi relasi rekursif:

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y) \quad (\Re e(y) > 0)$$

dan jika $y = n \in \mathbb{N}_0$, berlaku

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dengan ketentuan bahwa $0! = 1$.

METODE

Pada penelitian ini digunakan metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur mengenai fungsi eksponensial, deret Maclaurin, selang konvergensi, integral fraksional, dan fungsi gamma.
2. Melakukan pembuktian teorema integral fraksional.
3. Melakukan analisis perhitungan integral fraksional Riemann-Liouville pada fungsi eksponensial.
4. Menghitung kekonvergenan dari deret yang terbentuk.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, fungsi eksponensial akan direpresentasikan dalam bentuk deret Maclaurin. Selanjutnya fungsi tersebut akan diubah menjadi bentuk integral fraksional Riemann-Liouville.

Pembuktian Teorema Integral Fraksional
Teorema 4.1
Jika $f(x) = x^p$, dengan $p \geq 0$, maka

$$I^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} x^{\alpha+p} \tag{4.1}$$

Bukti:
Berdasarkan definisi pada persamaan (2.3), untuk $\alpha > 0$ berlaku:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds$$

$$I^\alpha x^p = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} s^p\, ds$$

Dimisalkan $s = xu$, $0 \leq u \leq 1$, maka $ds = x\, du$, diperoleh

$$I^\alpha x^p = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} (xu)^p x\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha+p} (1-u)^{\alpha-1} u^p\, du$$

$$= \frac{x^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^p\, du$$

$$= \frac{x^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, p+1)$$

$$= \frac{x^{\alpha+p}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} x^{\alpha+p}$$

Terbukti bahwa

$$I^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} x^{\alpha+p}$$

Contoh 4.2:
Tentukan hasil integral fraksional dari $f(x) = x^{2026}$ dengan $\alpha = 1$.
Solusi:
Berdasarkan (4.1), kita peroleh:

$$I^1 x^{2026} = \frac{\Gamma(2026+1)}{\Gamma(1+2026+1)} x^{1+2026}$$

$$= \frac{\Gamma(2027)}{\Gamma(2028)} x^{2027}$$

$$= \frac{\Gamma(2027)}{2027\,\Gamma(2027)} x^{2027}$$

$$= \frac{1}{2027} x^{2027}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa ketika $\alpha = 1$ (integral berorde bulat), formula integral fraksional tereduksi menjadi integral biasa, yaitu

$$\int x^{2026}\, dx = \frac{1}{2027} x^{2027} + C$$

yang memvalidasi konsistensi formula (4.1) dengan kalkulus klasik.

Integral Fraksional Riemann-Liouville pada Fungsi Eksponensial

Integral fraksional pada persamaan (4.1) diterapkan pada fungsi eksponensial melalui representasi dari deret Maclaurin, diperoleh:

$$I^\alpha e^x = I^\alpha \Big(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} x^p \Big)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} I^\alpha x^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} x^{\alpha+p} \tag{4.2}$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa integral fraksional pada fungsi eksponensial dapat dinyatakan sebagai jumlah tak hingga dari suku-suku yang melibatkan fungsi gamma. Terdapatnya rasio $\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}$ dalam setiap suku merupakan karakteristik khas dari operator integral fraksional Riemann-Liouville.

Analisis Konvergensi
Untuk menentukan interval konvergensi deret (4.2), dimisalkan

$$C_p = \frac{1}{p!} \frac{\Gamma(\mathrm{p}+1)}{\Gamma(\alpha+\mathrm{p}+1)}$$

dan

$$C_{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\Gamma(\mathrm{p}+2)}{\Gamma(\alpha+\mathrm{p}+2)}$$

Menggunakan uji rasio, deret (4.2) konvergen untuk setiap x apabila

$$|x| < \lim_{p\to\infty} \left| \frac{C_p}{C_{p+1}} \right|$$

Dengan melakukan perhitungan:

$$|x| < \lim_{p\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{p!}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}}{\frac{1}{(p+1)!}\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(\alpha+p+2)}} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left| \frac{(p+1)p!}{p!} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)} \frac{\Gamma(\alpha+p+2)}{\Gamma(p+2)} \right|$$

Menggunakan sifat $\Gamma(p+2) = (p+1)\Gamma(p+1)$ dan $\Gamma(\alpha+p+2) = (\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+p+1)$, diperoleh:

$$= \lim_{p\to\infty} \left| (p+1)\frac{\Gamma(p+1)}{1} \frac{(\alpha+p+1)}{(p+1)\Gamma(p+1)} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left| (p+1)\frac{(\alpha+p+1)}{(p+1)} \right|$$

$$= \lim_{p\to\infty} |(\alpha+p+1)|$$

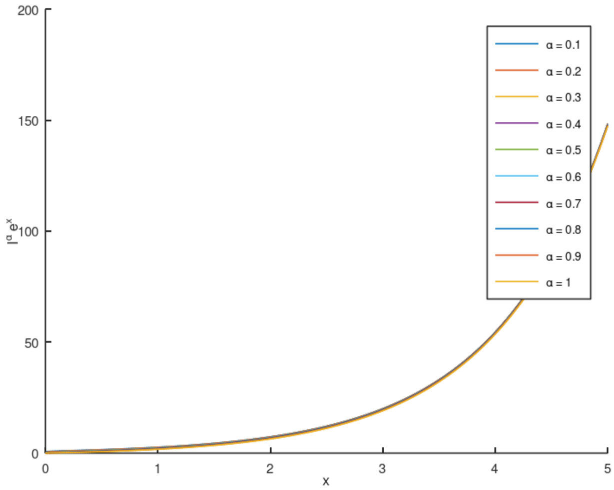
$$= \infty$$

Berdasarkan hasil tersebut, didapat bahwa $|x| < \infty$, yang berarti $-\infty < x < \infty$. Hal ini menunjukkan bahwa deret (4.2) bersifat konvergen untuk seluruh nilai x pada himpunan bilangan real. Dengan kata lain, interval konvergensi integral fraksional fungsi eksponensial mencakup semua bilangan real x, sama seperti interval konvergensi fungsi eksponensial aslinya.

Hasil ini sangat penting karena menunjukkan bahwa operasi integral fraksional Riemann-Liouville tidak mengubah karakteristik dinamis dari fungsi eksponensial. Hal ini memperkuat kedudukan fungsi eksponensial sebagai fungsi yang sangat stabil di bawah berbagai operasi matematika, termasuk integrasi berorde fraksional. Sifat invarian ini menjadikan fungsi eksponensial sebagai fungsi fundamental dalam teori kalkulus fraksional, serupa dengan peranannya dalam kalkulus klasik.

Simulasi Numerik dan Visualisasi

Selanjutnya, hasil analisis perhitungan integral fraksional tersebut disimulasikan dengan menggunakan *software* Matlab untuk berbagai nilai $0 < \alpha \leq 1$. Simulasi dilakukan dengan menghitung sejumlah suku terbatas dari deret (4.2) untuk menghampiri nilai integral fraksional.



Gambar 1. Grafik $f(x) = I^\alpha e^x$

Dari Gambar 1, dapat diamati bahwa integral orde $0 < \alpha \leq 1$ pada fungsi eksponensial, tetap menghasilkan fungsi eksponensial itu sendiri. Sehingga, integral fraksional pada fungsi eksponensial akan berada pada sekitar nilai dari fungsi eksponensial tersebut.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa integral fraksional Riemann–Liouville pada fungsi eksponensial dapat direpresentasikan dalam bentuk deret tak hingga berbasis fungsi gamma melalui pendekatan deret Maclaurin. Deret hasil integral fraksional tersebut memiliki selang konvergensi tak hingga, sama seperti fungsi eksponensial aslinya.

Meskipun hasil integral fraksional tidak identik dengan fungsi eksponensial klasik, simulasi numerik menunjukkan bahwa perilaku grafiknya tetap memperlihatkan pola pertumbuhan yang menyerupai eksponensial, dengan perbedaan yang dipengaruhi oleh orde fraksional. Hal ini menunjukkan bahwa operator integral fraksional Riemann–Liouville tidak mengubah sifat konvergensi global fungsi eksponensial, namun memodifikasi struktur dan skala fungsinya.

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi kajian lanjutan mengenai penerapan integral fraksional pada fungsi-fungsi lain yang dapat direpresentasikan dalam bentuk deret, serta pengembangannya dalam konteks persamaan diferensial fraksional dan aplikasi numerik. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam pemahaman perilaku fungsi eksponensial di bawah operasi integral berorde fraksional dan dapat menjadi dasar bagi penerapan metode serupa pada fungsi-fungsi lain yang dapat direpresentasikan dalam bentuk deret, seperti fungsi trigonometri dan fungsi logaritma.

DAFTAR PUSTAKA

Aljohani, A. F., Althobaiti, A., & Althobaiti, S. (2024). Research on New Interval-Valued Fractional Integrals with Exponential Kernel and Their Applications. *Axioms*, *13*(9), 616.

Almoneef, A. A., Hyder, A.-A., Hezenci, F., & Budak, H. (2025). Weighted fractional Euler–Maclaurin inequalities for convex and bounded variation functions via Riemann–Liouville integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, *2025*(1), 82. https://doi.org/10.1186/s13660-025-03333-3

Artin, E. (2015). *The gamma function*. Courier Dover Publications.

Daraghmeh, A., Qatanani, N., & Saadeh, A. (2020). Numerical solution of fractional differential equations. *Applied Mathematics*, *11*(11), 1100–1115.

Elgindy, K. T. (2025). Super-Exponential Approximation of the Riemann-Liouville Fractional Integral via Gegenbauer-Based Fractional Approximation Methods. *ArXiv Preprint ArXiv:2504.09526*.

Feng, Y.-Y., Wang, Y.-M., Xu, X.-R., Li, Y.-H., Wei, Z.-Z., & Jin, S.-B. (2024). General fractional calculus with respect to exponential function used in fundamental viscoelastic models. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2440032.

Janan, S. (2025). INTEGRAL FRAKSIONAL DARI FUNGSI HIPERBOLIK. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *13*(2), 37–42.

Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *21*(1), 267–284.

Janan, S., Susanti, S., & Harlianto, D. (2025). Analisis Fungsi Eksponensial dengan Turunan Fraksional. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *13*(3), 77-81.

Stewart, J. (2012a). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.

Stewart, J. (2012b). *Essential calculus*. Cengage Learning.

Sun, H., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., & Chen, Y. (2018). A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *64*, 213–231. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019

Sun, W. (2021). Hermite–Hadamard type local fractional integral inequalities with Mittag-Leffler kernel for generalized preinvex functions. *Fractals*, *29*(08), 2150253.

Suthar, D. L., Abeye, N., Shimelis, B., & Gidaf, F. (2025). Generalized fractional integral operators pertaining to the p R q (λ, ϑ; x)-function. *Research in Mathematics*, *12*(1), 2505280.