MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 14 No 01
Tahun 2026

PEWARNAAN LOKAL SISI ANTI-AJAIB TOTAL PADA GRAF PAYUNG

Khusnul Rosyidah
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
e-mail: khusnulrosyidah787@gmail.com

Desi Febriani Putri
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
corresponding author: desifebrianip@fmipa.unmul.ac.id*

Hardina Sandariria
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mulawarman, Samarinda, Indonesia
e-mail: hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id

Abstrak

Graf G adalah pasangan terurut yang terdiri dari himpunan titik terhingga $V(G)$ dan himpunan sisi terhingga $E(G)$. Pewarnaan graf yaitu proses memberikan warna pada setiap titik, sisi, atau wilayah pada graf sedemikian rupa sehingga tidak ada dua titik, sisi, atau wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama. Pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada suatu graf G didefinisikan sebagai suatu fungsi bijektif f memetakan himpunan titik dan sisi pada graf G ke dalam himpunan bilangan bulat positif dari satu hingga banyaknya titik dan sisi pada graf G. Sedemikian sehingga setiap dua sisi yang bertetangga, seperti uv_1 dan uv_2, harus memiliki bobot yang berbeda. Bobot suatu sisi uv ditentukan dari penjumlahan label titik u, label sisi uv, dan label titik v. Jumlah warna minimum yang diambil dari semua pewarnaan yang diinduksi oleh pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total dari graf G disebut dengan Bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi_{leat}(G)$. Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola untuk menentukan pola pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total, sehingga diperoleh bentuk pola umum beserta rumus fungsi pelabelan titik, sisi, dan bobot sisi. Penelitian ini membahas pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn}. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada graf yang diteliti. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh bilangan kromatik dari pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn}, yaitu $\chi_{leat}(U_{mn}) = n + 2$ jika m dan n ganjil dan $\chi_{leat}(U_{mn}) = n + 1$ jika m genap dan n ganjil.
Kata Kunci: bilangan kromatik, Graf Payung U_{mn}, pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total.

Abstract

A graph G is an ordered pair consisting of a finite set of vertices $V(G)$ and a finite set of edges $E(G)$. Graph coloring is the process of assigning colors to vertices, edges, or regions of a graph in such a way that no two adjacent vertices, edges, or regions share the same color. A local edge antimagic total coloring of a graph G is defined as a bijective function f that maps the set of vertices and edges of G to the set of positive integers from 1 to the total number of vertices and edges of G. This labeling is assigned such that any two adjacent edges, for example uv_1 and uv_2, have distinct weights. The weight of an edge uv is defined as the sum of the labels of vertex u, edge uv, and vertex v. The minimum number of colors induced by all local edge antimagic total colorings of a graph G is called the local edge antimagic total chromatic number, denoted by $\chi_{leat}(G)$. This research employs a pattern detection method to determine the labeling patterns of local edge antimagic total colorings, resulting in general forms and formulas for vertex labels, edge labels, and edge weights. The study focuses on the local edge antimagic total coloring of the umbrella graph U_{mn}. The objective of this research is to determine the local edge antimagic total chromatic number of the investigated graph. Based on the analysis, it is obtained that the local edge antimagic total chromatic number of the umbrella graph U_{mn} is $\chi_{leat}(U_{mn}) = n + 2$ when both m and n are odd, and $\chi_{leat}(U_{mn}) = n + 1$ when m is even and n is odd.
Keywords: *chromatic number, Umbrella Graph U_{mn}, local edge antimagic total coloring.*

PENDAHULUAN

Matematika adalah bahasa universal dan fondasi penting bagi berbagai disiplin ilmu. Ia tidak hanya berfungsi sebagai alat hitung, namun juga sebagai cara untuk memahami pola, struktur, dan hubungan di dunia. Salah satu cabang matematika yang menarik adalah matematika diskrit, yang mempelajari objek-objek diskrit seperti bilangan bulat dan graf. Salah satu konsep yang digunakan dalam penelitian ini adalah teori graf.

Teori Graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss, yakni Leonhard Euler. Melalui karyanya yang melibatkan usahanya untuk memecahkan masalah jembatan Königsberg menggunakan graf. Teori Graf mewakili objek diskrit visual sebagai titik. Objek ini kemudian dihubungkan antara objek titik diskrit lainnya yang di representasikan sebagai sisi. Graf adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan yang mungkin kosong yang tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Teori graf itu sendiri sangat luas dan memiliki berbagai konsep serta aplikasi yang menarik. Dua di antaranya adalah pelabelan dan pewarnaan graf (Waluyo dkk., 2024).

Pelabelan graf merupakan pemberian label atau nilai pada titik, sisi, atau wilayah dari graf menggunakan bilangan bulat positif. Pelabelan graf memiliki bobot yang diperoleh dari penjumlahan label-label pada setiap elemen graf baik titik maupun sisi. Pelabelan secara umum dibagi menjadi beberapa jenis yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total (Slamin dkk., 2006).

Pewarnaan graf merupakan konsep fundamental dalam teori graf yang melibatkan pemberian warna pada elemen-elemen graf yaitu titik, sisi, atau wilayah dengan tujuan memperoleh warna yang minimum. Pewarnaan graf secara umum terbagi menjadi tiga jenis, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*face coloring*) (Saputra dkk., 2024). Pewarnaan merupakan kombinasi antara konsep pelabelan anti-ajaib dan pewarnaan yang disebut pewarnaan lokal anti-ajaib.

Pewarnaan lokal anti-ajaib pertama kali diperkenalkan oleh Arumugam dkk. (2017) dalam penelitiannya tentang pewarnaan lokal titik anti-ajaib dan menjadi dasar pengembangan pewarnaan yang mengalami modifikasi dan perluasan. Pewarnaan lokal anti-ajaib adalah pelabelan bijektif sisi, titik, atau wilayah pada graf dengan bilangan bulat positif sehingga bobot setiap titik, sisi, atau wilayah yang bertetangga berbeda. Selanjutnya, pewarnaan lokal sisi anti-ajaib adalah pelabelan bijektif titik-titik pada graf dengan bilangan bulat positif sehingga bobot setiap sisi yang bertetangga berbeda. Bobot yang diperoleh diinisiasi sebagai warna. Pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total adalah jenis pewarnaan graf yang melibatkan pemberian label pada titik dan sisi graf sehingga setiap dua sisi yang bertetangga memiliki bobot yang berbeda. Bobot sisi dihitung berdasarkan label titik-titik yang terkait dengan sisi tersebut dan label sisi itu sendiri. Pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total menjadi menarik karena memiliki karakteristik unik dan menantang untuk dianalisis.

Penelitian terdahulu mengenai pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total masih terbatas, namun beberapa studi telah mengembangkan konsep ini pada berbagai jenis graf. Agustin dkk. (2017) memperkenalkan pewarnaan lokal sisi anti-ajaib melalui penelitiannya pada Graf Lintasan, Graf Siklus, Graf Lengkap, Graf Sahabat, Graf Bintang, Graf Tangga, Graf Roda, dan Graf Prisma dengan cara pemberian label pada seluruh titik kemudian mencari bobot dari sisi dengan menjumlahkan dua titik yang menghubungkan sisi tersebut. Bobot yang diperoleh oleh sisi tersebut tidak boleh sama dengan sisi yang bertetangga. Penelitian tentang pewarnaan lokal sisi anti-ajaib dikembangkan oleh Hadiputra dkk. (2019) menjadi pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total super pada Graf Lintasan serta turunan Graf Lintasan. Kemudian dilanjutkan oleh Kurniawati dkk. (2020) yang meneliti lebih lanjut tentang pelabelan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Tangga terkait.

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengeksplorasi pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung (U_{mn}) yang merupakan graf khusus dengan struktur unik. Penelitian ini bertujuan untuk memahami karakteristik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada graf tersebut, serta menemukan pola dan batasan terkait dengan pewarnaan ini. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam pengembangan teori graf dan aplikasinya di berbagai bidang. Oleh karena itu penulis memilih judul "Pewarnaan Lokal Sisi Anti-Ajaib Total pada Graf Payung".

KAJIAN TEORI

Teori graf berkembang setelah Leonhard Euler pada tahun 1736 menjawab masalah yang dihadapi orang-orang di Königsberg yang berusaha melewati tujuh jembatan yang berada di atas Sungai Pregel yang membagi Königsberg menjadi dua pulau dan dua tepi. Permasalahannya adalah masyarakat di Königsberg berangkat dari satu tempat dan berusaha melewati ketujuh jembatan tersebut masing-masing tepat sekali serta kembali ke tempat awal. Tidak ada seorang pun yang berhasil, sampai Euler membuktikan bahwa hal itu tidak mungkin. Dalam rangka memudahkan menjawab masalah tersebut, empat daerah yang berupa pulau dan tepi sungai tersebut direpresentasikan dengan titik, dan tujuh jembatan yang melintasi sungai direpresentasikan dengan sisi sehingga berbentuk sebuah graf. Dalam teori graf, hasil ini menyatakan bahwa suatu graf memiliki siklus Eulerian, maka graf tersebut terhubung dan derajat setiap titiknya adalah genap (Slamin, 2023).

Graf G adalah pasangan himpunan titik $(V(G))$ dan sisi $(E(G))$ atau $(V(G), E(G))$, dengan notasinya $G = (V(G), E(G))$ dan menyatakan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Dalam hal ini $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu (Munir, 2010). Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf kecil, bilangan asli, atau gabungan keduanya, sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan pasangan titik $(u, v), uv$, atau notasi sisi dapat diberi label baru misalkan $e_1, e_2, \ldots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$ atau $e = uv$ (Munir, 2020). Dalam penelitian ini, digunakan notasi uv untuk menyatakan sisi pada suatu graf.

Graf Payung (*umbrella*) adalah struktur graf yang dibentuk dengan menggabungkan Graf Lintasan P_m dan Graf Kipas F_n melalui titik tertentu, menghasilkan graf baru yang dinotasikan dengan U_{mn} . Graf Payung U_{mn} memiliki himpunan titik $V(U_{mn})$, yaitu $\{u_i | 1 \leq i \leq m\}$ dan $\{v_j | 1 \leq j \leq n\}$, serta himpunan sisi $E(U_{mn})$ yang menghubungkan titik-titik tersebut. Secara spesifik, sisi-sisi Graf Payung terdiri dari sisi-sisi Graf Lintasan $\{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m - 1\}$, sisi-sisi Graf Kipas $\{v_j v_{j+1} | 1 \leq j \leq n - 1\}$, dan sisi sisi yang menghubungkan kedua graf $\{u_m v_j | 1 \leq j \leq n\}$. Kardinalitas himpunan sisi dan himpunan titik Graf Payung masing-masing adalah $|E(U_{mn})| = 2m + n - 2$, dan $|V(U_{mn})| = n + m$ (Adawiyah dkk., 2023).

Pelabelan graf adalah suatu fungsi pemetaan dari himpunan sisi, himpunan titik, atau keduanya, yang diterapkan pada sebuah graf, dengan hasil pemetaan berupa himpunan bilangan bulat yang memenuhi kondisi tertentu. Jika domain pelabelan adalah himpunan titik atau himpunan sisi dalam suatu graf, maka disebut sebagai pelabelan titik atau pelabelan sisi. Jika domain pelabelan meliputi kedua himpunan sisi dan himpunan titik, maka disebut sebagai pelabelan total (Ulaganathan dkk., 2016).

Secara matematis, misalkan W merupakan himpunan bobot titik pada G, sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dikatakan pelabelan total titik ajaib pada graf G jika semua anggota himpunan W adalah sama. Dengan, $W = \{w(u) \mid w(u) = f(u) + \sum_{v \in N_u} f(uv), \forall\, u \in V(G)\}$, dengan N_u merupakan himpunan sisi yang terkait dengan u (Saputra dkk., 2021).

Pewarnaan graf adalah proses memberikan warna pada setiap titik, sisi, atau wilayah di graf. Dalam pewarnaan graf, setiap titik, sisi, dan wilayah diberikan warna sedemikian rupa sehingga tidak ada dua titik, sisi, dan wilayah yang bertetangga memiliki warna yang sama. Pewarnaan graf dibagi menjadi tiga jenis yaitu pewarnaan titik, sisi, dan wilayah (Waluyo dkk., 2024).

Jumlah warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai graf G disebut bilangan kromatik graf G, disimbolkan dengan $\chi(G)$. Suatu graf G yang mempunyai bilangan kromatik k dilambangkan dengan $\chi(G) = k$ (Munir, 2010).

Pewarnaan lokal sisi anti-ajaib adalah pengembangan dari pewarnaan lokal titik anti-ajaib, dengan setiap titik pada graf diberi label dengan bilangan positif, dan bobot sisinya dihitung dari jumlah label titik-titik yang terhubung dengan sisi tersebut (Agustin dkk., 2017). Secara singkat, pewarnaan lokal sisi anti-ajaib adalah pemberian label pada titik-titik graf sehingga setiap sisi memiliki bobot yang berbeda, dengan bobot sisi dihitung dari jumlah label titik-titik yang terhubung dengan sisi tersebut.

Pelabelan lokal sisi anti-ajaib total pada suatu graf G dengan $|V(G)| = p$ titik dan $|E(G)| = q$ sisi didefinisikan sebagai suatu pemetaan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p + q\}$ sedemikian sehingga bobot dari setiap sisi yang bertetangga, yaitu $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v), uv \in E(G)$, bersifat berbeda (Agustin dkk., 2017).

Setiap pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total (*local edge antimagic total labeling* atau disingkat LEAT) menginduksi pewarnaan sisi yang tepat pada graf G, dengan sisi uv diberi warna $w(uv)$. Bilangan kromatik pelabelan lokal sisi anti-ajaib total, yang dinotasikan dengan $\chi_{leat}(G)$, adalah jumlah warna minimum yang diambil dari semua pewarnaan yang diinduksi oleh pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total dari G. Untuk setiap graf G, berlaku $\chi_{leat}(G) \geq \chi(G)$. Jika titik-titik pada graf G menerima label terkecil, yaitu $1, 2, \ldots, |V(G)|$, maka pewarnaan lokal sisi antiajaib total tersebut disebut sebagai pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total super. Setiap pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total super juga menginduksi pewarnaan sisi yang tepat pada graf G (Agustin dkk., 2017).

Teorema 1. (Agustin dkk., 2017) Jika $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari graf G, maka kita memiliki $\chi_{leat}(G) \geq \Delta(G)$.

Bukti. Misalkan f adalah suatu pelabelan anti-ajaib total dari G. Untuk pewarnaan yang diinduksi oleh f, warna suatu sisi uv diberikan oleh $f(u) + f(uv) + f(v)$. Jika v adalah titik yang berderajat maksimum $\Delta(G)$, maka harus ada setidaknya $\Delta(G)$ warna sisi yang berbeda agar pewarnaan sisi tersebut menjadi pewarnaan yang benar. Dengan demikian, semua sisi harus menerima warna yang berbeda-beda. Oleh karena itu, kita memperoleh $\chi_{leat}(G) \geq \Delta(G)$. ■

METODE

Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola yaitu metode penelitian yang menentukan pola pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total sedemikian rupa sehingga diperoleh bentuk pola umumnya. Selanjutnya, ditentukan rumus fungsi pelabelan titik dan sisi, serta rumus fungsi bobot sisi pada pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung.

Tahapan penelitian ini disusun untuk memberikan gambaran secara sistematis mengenai penelitian yang dilakukan. Berikut ini adalah tahapan penelitian pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total.

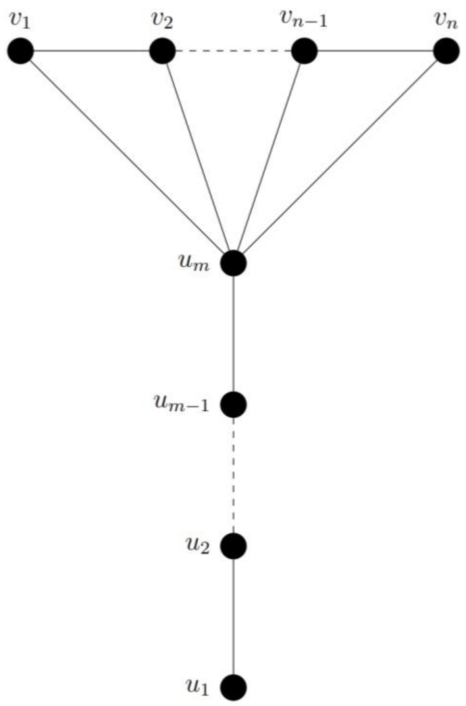
1. Menentukan graf yang diteliti
   Pada penelitian ini jenis graf yang dipilih adalah Graf Payung U_{mn}.
2. Pemberian notasi pada graf yang diteliti
   Pada tahapan ini, titik dan sisi dari graf yang diteliti diberi notasi.
3. Penentuan pelabelan titik dan sisi pada graf
   Pelabelan diawali dari bilangan bulat positif 1 hingga seluruh titik dan sisi pada graf telah dilabeli.
4. Menentukan fungsi pada graf
   Selanjutnya menentukan fungsi pelabelan titik, fungsi pelabelan sisi, dan fungsi hasil bobot sisi pada graf.
5. Menghitung bobot sisi pada graf
   Pada tahapan ini, bobot suatu sisi diperoleh dengan menjumlahkan label sisi itu sendiri dengan label kedua titik yang bersisian dengan sisi tersebut.
6. Mencari bilangan kromatik
   Kemudian menentukan warna minimum berdasarkan bobot yang telah diperoleh.
7. Menentukan teorema
   Langkah terakhir adalah menentukan teorema bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada graf.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan membahas hasil penelitian mengenai pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung (U_{mn}). Dari penelitian ini, hasil yang diperoleh berupa teorema bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total dari graf yang telah diteliti.

1) Pewarnaan Lokal Sisi Anti-Ajaib Total pada Graf Payung U_{mn}

Definisi 1. Graf Payung adalah struktur graf yang dibentuk dengan menggabungkan Graf Lintasan (P_m) dan Graf Kipas (F_n) melalui titik tertentu, menghasilkan graf baru yang dilambangkan dengan U_{mn} . Bentuk umum dari Graf Payung U_{mn} dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Payung U_{mn}

Teorema 2. Graf Payung U_{mn} untuk $m, n \in N$ serta $m \geq 3, n \geq 3, m$ ganjil genap, dan n ganjil mempunyai bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total:

$$\chi_{leat}(U_{mn}) = \begin{cases} n+2; & \text{jika } m \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ n+1; & \text{jika } m \text{ genap dan } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti. Diberikan Graf Payung U_{mn} untuk $m, n \in N$ serta $m \geq 3, n \geq 3, m$ ganjil genap, dan n ganjil memiliki himpunan titik dan himpunan sisi yang dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$V(U_{mn}) = \{u_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{v_j | 1 \leq j \leq n\} \text{ dan}$$
$$E(U_{mn}) = \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{v_j v_{j+1} | 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{u_m v_j | 1 \leq j \leq n\}.$$

Graf Payung U_{mn} memiliki kardinalitas titik $|V(G)| = m + n$ dan kardinalitas sisi $|E(G)| = m + 2n - 2$. Didefinisikan fungsi bijektif pelabelan Graf Payung U_{mn} yaitu:

$$f: (V(U_{mn}) \cup E(U_{mn})) \to \{1, 2, 3, \ldots, 2m + 3n - 2\}.$$

Mengingat bahwa $m \geq 3, n \geq 3, m$ ganjil genap, dan n ganjil, maka pembuktian pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total dibagi menjadi 2 kasus, yaitu:

Kasus 1. m ganjil dan n ganjil

Langkah pertama, menentukan label pada himpunan titik Graf Payung U_{mn} dengan himpunan titik tersebut terdiri atas himpunan titik $\{u_i | 1 \leq i \leq m, i$ genap$\}$, $\{v_j | 1 \leq j \leq n, j$ ganjil$\}$, $\{u_i | 1 \leq i \leq m, i$ ganjil$\}$, dan $\{v_j | 1 \leq j \leq n, j$ genap$\}$. Pelabelan titik didefinisikan sebagai fungsi bijektif f dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas titik Graf Payung U_{mn}. Fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{m+n+i+1}{2} & \text{untuk } v = u_i,\ 1 \leq i \leq m,\ i \text{ ganjil} \\ \frac{i}{2} & \text{untuk } v = u_i,\ 1 \leq i \leq m,\ i \text{ genap} \\ \frac{m+j}{2} & \text{untuk } v = v_j,\ 1 \leq j \leq n,\ j \text{ ganjil} \\ \frac{2m+n+j+1}{2} & \text{untuk } v = v_j,\ 1 \leq j \leq n,\ j \text{ genap.} \end{cases}$$

Langkah kedua, menentukan label pada himpunan sisi Graf Payung U_{mn} dengan himpunan sisi terdiri atas himpunan sisi $\{v_j v_{j+1} | 1 \leq j \leq n-1, j$ ganjil$\}$, $\{v_j v_{j+1} | 1 \leq j \leq n-1, j$ genap$\}$, $\{u_i u_{i+1} | 2 \leq i \leq m-1, i$ genap$\}$, $\{u_m v_1\}$, $\{u_i u_{i+1} | 2 \leq i \leq m-1, i$ ganjil$\}$, $\{u_i u_{i+1} | i = 1\}$, $\{u_m v_j | 2 \leq j \leq n, j$ ganjil$\}$, dan $\{u_m v_j | 2 \leq j \leq n, j$ genap$\}$. Pelabelan sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif f dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas sisi Graf Payung U_{mn}. Fungsi pelabelan sisi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(e) = \begin{cases} 2m+2n-1 & \text{untuk } e = u_i u_{i+1},\ i = 1 \\ 2m+2n-i+1 & \text{untuk } e = u_i u_{i+1},\ 2 \leq i \leq m-1,\ i \text{ ganjil} \\ 2m+2n-i-1 & \text{untuk } e = u_i u_{i+1},\ 2 \leq i \leq m-1,\ i \text{ genap} \\ m+2n-j-1 & \text{untuk } e = v_j v_{j+1},\ 1 \leq j \leq n-1,\ j \text{ ganjil} \\ m+2n-j+1 & \text{untuk } e = v_j v_{j+1},\ 1 \leq j \leq n-1,\ j \text{ genap} \\ m+2n+1 & \text{untuk } e = u_m v_1 \\ 2m+2n+\frac{j+1}{2}-2 & \text{untuk } e = u_m v_j,\ 2 \leq j \leq n,\ j \text{ ganjil} \\ 2m+\frac{5n-3+j}{2} & \text{untuk } e = u_m v_j,\ 2 \leq j \leq n,\ j \text{ genap.} \end{cases}$$

Lebih lanjut, akan dicari bobot sisi pada Graf Payung U_{mn} untuk $m, n \in N$ serta $m \geq 3, n \geq 3$, dan m, n ganjil. Rumus bobot sisi diperoleh dari penjumlahan label sisi itu sendiri dengan label dua titik yang bersisian dengan sisi tersebut. Rumus bobot sisi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(e)=\begin{cases}\frac{5m+5n+4i}{2}-1 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ i=1\\ \frac{5m+5n}{2}+2 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\\ & i \text{ ganjil}\\ \frac{5m+5n}{2} & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\\ & i \text{ genap}\\ \frac{5m+5n}{2} & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\\ & j \text{ ganjil}\\ \frac{5m+5n}{2}+2 & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\\ & j \text{ genap}\\ \frac{5m+5n+4}{2} & \text{untuk } e=u_mv_1\\ \frac{7m+5n+2j-2}{2} & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\\ & j \text{ ganjil}\\ \frac{8m+7n+2j-1}{2} & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\\ & j \text{ genap.}\end{cases}$$

Syarat pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total, setiap sisi yang bertetangga harus memiliki bobot dengan warna yang berbeda. Maka, untuk bobot $w(e)$, pada Graf Payung U_{mn} untuk $m,n\in N$ serta $m\ge 3, n\ge 3$, dan m,n ganjil diketahui bahwa graf tersebut memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total $\chi_{leat}(U_{mn})\le n+2$.

Kasus 2. m genap dan n ganjil

Langkah pertama, menentukan label pada himpunan titik Graf Payung U_{mn} dengan himpunan titik tersebut terdiri atas himpunan titik $\{u_i|1\le i\le m, i \text{ genap}\}$, $\{v_j|1\le j\le n, j \text{ ganjil}\}$, $\{u_i|1\le i\le m, i \text{ ganjil}\}$, dan $\{v_j|1\le j\le n, j \text{ genap}\}$. Pelabelan titik didefinisikan sebagai fungsi bijektif f dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas titik Graf Payung U_{mn}. Fungsi pelabelan titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(v)=\begin{cases}\frac{m+n+i+1}{2} & \text{untuk } v=u_i,\ 1\le i\le m,\ i \text{ ganjil}\\ \frac{i}{2} & \text{untuk } v=u_i,\ 1\le i\le m,\ i \text{ genap}\\ \frac{m+j}{2} & \text{untuk } v=v_j,\ 1\le j\le n,\ j \text{ ganjil}\\ \frac{2m+n+j+1}{2} & \text{untuk } v=v_j,\ 1\le j\le n,\ j \text{ genap.}\end{cases}$$

Langkah kedua, menentukan label pada himpunan sisi Graf Payung U_{mn} dengan himpunan sisi terdiri atas himpunan sisi $\{v_jv_{j+1}|1\le j\le n-1, j \text{ ganjil}\}$, $\{v_jv_{j+1}|1\le j\le n-1, j \text{ genap}\}$, $\{u_iu_{i+1}|2\le i\le m-1, i \text{ genap}\}$, $\{u_mv_1\}$, $\{u_iu_{i+1}|2\le i\le m-1, i \text{ ganjil}\}$, $\{u_iu_{i+1}|i=1\}$, $\{u_mv_j|2\le j\le n, j \text{ ganjil}\}$, dan $\{u_mv_j|2\le j\le n, j \text{ genap}\}$. Pelabelan sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif f dari himpunan bilangan asli hingga jumlah kardinalitas sisi Graf Payung U_{mn}. Fungsi pelabelan sisi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(e)=\begin{cases}2m+2n-1 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ i=1\\ 2m+2n-i+1 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\ i \text{ ganjil}\\ 2m+2n-i-1 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\ i \text{ genap}\\ m+2n-j-1 & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\ j \text{ ganjil}\\ m+2n-j+1 & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\ j \text{ genap}\\ m+2n+1 & \text{untuk } e=u_mv_1\\ 2m+2n+\frac{j+1}{2}-2 & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\ j \text{ ganjil}\\ 2m+\frac{5n-3+j}{2} & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\ j \text{ genap.}\end{cases}$$

Lebih lanjut, akan dicari bobot sisi pada Graf Payung U_{mn} untuk $m,n\in N$ serta $m\ge 4, n\ge 3$, m genap, dan n ganjil. Rumus bobot sisi diperoleh dari penjumlahan label sisi itu sendiri dengan label dua titik yang bersisian dengan sisi tersebut. Rumus bobot sisi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w(e)=\begin{cases}\frac{5m+5n+4i}{2}-1 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ i=1\\ \frac{5m+5n}{2}+2 & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\\ & i \text{ ganjil}\\ \frac{5m+5n}{2} & \text{untuk } e=u_iu_{i+1},\ 2\le i\le m-1,\\ & i \text{ genap}\\ \frac{5m+5n}{2} & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\\ & j \text{ ganjil}\\ \frac{5m+5n}{2}+2 & \text{untuk } e=v_jv_{j+1},\ 1\le j\le n-1,\\ & j \text{ genap}\\ \frac{5m+5n+4}{2} & \text{untuk } e=u_mv_1\\ \frac{7m+5n+2j-2}{2} & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\\ & j \text{ ganjil}\\ \frac{8m+7n+2j-1}{2} & \text{untuk } e=u_mv_j,\ 2\le j\le n,\\ & j \text{ genap.}\end{cases}$$

Syarat pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total, setiap sisi yang bertetangga harus memiliki bobot dengan warna yang berbeda. Maka, untuk bobot $w(e)$, pada Graf Payung U_{mn} untuk $m,n\in N$ serta $m\ge 4, n\ge 3$, m genap, dan n ganjil diketahui bahwa graf tersebut memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total $\chi_{leat}(U_{mn})\le n+1$.

Berdasarkan Kasus 1, Graf Payung U_{mn} untuk $m,n\in N$ serta $m,n\ge 3$ dan m,n ganjil memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total $\chi_{leat}(U_{mn})\le n+2$. Berdasarkan Teorema 1. batas bawahnya adalah $\chi_{leat}(G)\ge\Delta(G)$. Derajat maksimum dari Graf Payung adalah $\Delta(U_{mn})=n+1$.

Namun batas bawah tersebut tidak dicapai, alasannya dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Karena m dan n keduanya ganjil, maka jumlah lintasan yang terbentuk dari penggabungan Graf Lintasan dengan lintasan yang ada pada Graf Kipas menghasilkan jumlah lintasan yang genap. Pada pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total, pelabelan menjadi lebih kompleks karena harus melibatkan pelabelan titik sekaligus sisi.

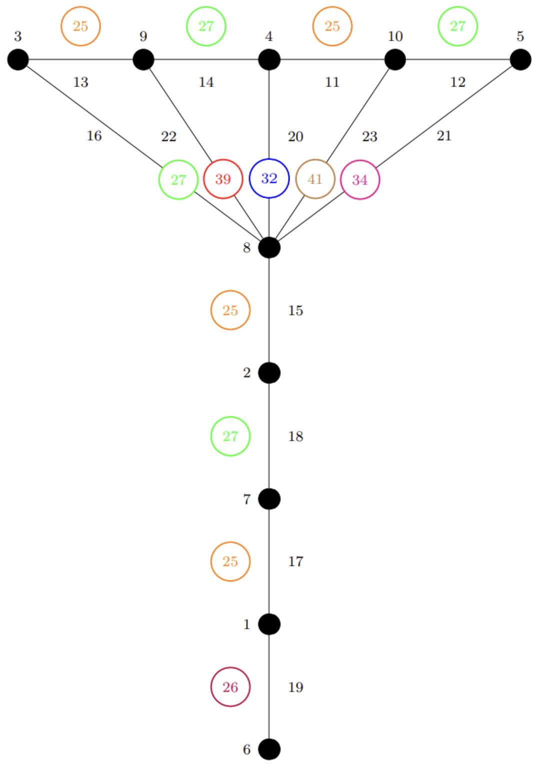
b. Berdasarkan poin (a.), Untuk lintasan dengan jumlah genap tersebut, tidak mungkin diperoleh bilangan kromatik sebesar 2, sehingga nilai minimal bilangan kromatik untuk lintasan adalah 3 agar tidak ada warna yang sama pada 2 sisi yang saling bertetangga. Sisi yang menghubungkan simpul pusat payung u_m dengan simpul pertama v_1 pada Graf Kipas F_n akan memperoleh bobot tertentu seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Selanjutnya, sisi-sisi lain yang menghubungkan titik pusat u_m dengan titik-titik $v_j (j = 2, 3, \dots, n)$ memerlukan pewarnaan tambahan. Hal ini menyebabkan bilangan kromatik yang dibutuhkan untuk sisi $u_m v_j$ menjadi $n - 1$.

c. Dengan demikian, bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn} dengan m dan n ganjil diperoleh sebesar $(3 + (n - 1)) = n + 2$. Hal ini menunjukkan bahwa batas bawah $\chi_{leat}(G) \geq \Delta(G)$ tidak dapat dicapai, dan pewarnaan yang memenuhi pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total membutuhkan tepat $n + 2$ warna.

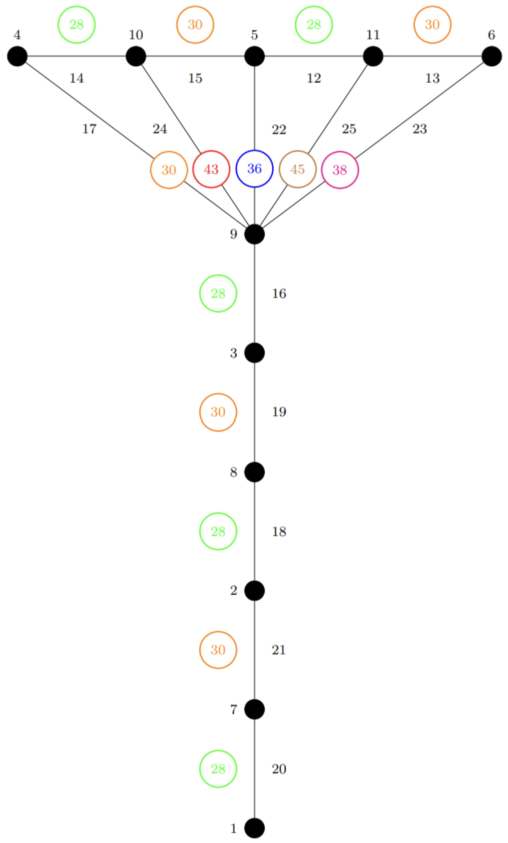
Berdasarkan ketiga alasan tersebut, diperoleh bahwa batas bawah dari pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn} dengan m dan n ganjil adalah $\chi_{leat}(U_{mn}) \geq n + 2$ dan diperoleh batas atas adalah $\chi_{leat}(U_{mn}) \leq n + 2$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi antiajaib total pada Graf Payung U_{mn} dengan m dan n ganjil adalah $\chi_{leat}(U_{mn}) = n + 2$.

Berdasarkan Kasus 2, Graf Payung U_{mn} untuk $m, n \in N$ serta $m \geq 4, n \geq 3, m$ genap dan n ganjil memiliki bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total $\chi_{leat}(U_{mn}) \leq n + 1$. Sementara itu, berdasarkan Teorema 1. batas bawahnya adalah $\chi_{leat}(G) \geq \Delta(G)$. Derajat maksimum dari Graf Payung adalah $\Delta(U_{mn}) = n + 1$. Karena nilai batas atas dan batas bawah sama, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total dari Graf Payung U_{mn} dengan m genap dan n ganjil tersebut tepat sama dengan derajat maksimumnya, sehingga $\chi_{leat}(U_{mn}) = \Delta(U_{mn}) = n + 1$. ■

Ilustrasi hasil pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn} dengan m dan n ganjil dapat dilihat pada Gambar 2. dan contoh penerapan pewarnaan lokal sisi anti-ajaib pada Graf Payung U_{mn} dengan m genap dan n ganjil dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 2. Pewarnaan Lokal Sisi Anti-ajaib Total pada Graf Payung $U_{5,5}$



Gambar 3. Pewarnaan Lokal Sisi Anti-ajaib Total pada Graf Payung $U_{6,5}$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian pada pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn} dapat diambil kesimpulan bilangan kromatik yang memenuhi pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada Graf Payung U_{mn} dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ adalah:

$$\chi_{leat}(U_{mn}) = \begin{cases} n+2; & \text{jika } m \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ n+1; & \text{jika } m \text{ genap dan } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengembangkan mengenai pewarnaan lokal sisi anti-ajaib total pada jenis graf yang lebih beragam. Selain itu, disarankan untuk menggunakan berbagai jenis operasi graf dalam pengembangannya, seperti operasi graf *comb product*, operasi graf *corona*, operasi graf amalgamasi, maupun operasi graf *shackle* dengan menggunakan graf lainnya yang lebih beragam.

DAFTAR PUSTAKA

Adawiyah, R., Makhfudloh, I. I., dan Prihandini, R. M. (2023). Local Edge (A, D) –Antimagic Coloring on Sunflower, Umbrella Graph and its Application. *Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika*. 5(1), 70-81.

Agustin, I. H., Hasan, M., Dafik, Ridho, A., dan Prihandini, R. M. (2017). Local Edge Antimagic Coloring of Graphs. *Far East Journal Of Mathematical Science* (FJMS), 102(9).

Arumugam, S., Premalatha, K., Baca, M., dan Fenovcikova, A. F. (2017). Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graph and Combinatorics*, 33, 275- 285.

Hadiputra, F. F., Silaban, D. R., dan Maryati, T. K. (2019). Super Local Anti-magic Total Coloring of Paths and its Derivation. *Indonesian Journal Combinatorics*, 3(2), 126-139.

Kurniawati, E. Y., Agustin, I. H., Dafik, dan Marsidi. (2020). On the Super Edge Local Antimagic Total Labeling of Related Ladder Graph. *Journal of Physics: Conference Series*, 1465.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Munir, R. (2020). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Saputra, G., Kristiana, A. I., Adawiyah, R., Pujiyanto, A., 'Aini, L. N., Laila, I., dan Dila, R. (2024). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Pensil. *Jurnal Axioma: Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, 9(1), 97-105.

Slamin, Prihandoko, A. C., Setiawan, T. B., Rosita, F., dan Shaleh, B. (2006). Vertex-Magic Total Labeling of Disconnected Graphs. *Journal of Prime Research in Mathematics, to appear*.

Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya (Edisi Kedua)*. Jawa Timur: Rumpun Dua Belas.

Ulaganathan, P. P., Selvam, B., dan Kumar, P. V. (2016). Signed Product Cordial Labeling in Duplicate Graphs of Bistar, Double Star and Triangular Ladder Graph. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 33(1), 19–24.

Waluyo, E., Wahab, A. A., dan Rudi, M. (2024). Pewarnaan Graceful pada Graf Hasil Comb Siklus dan Graf Star. *Jurnal Kadikma*, 14(2).