

MODEL SIKLUS BISNIS IS-LM DENGAN TUNDAAN

Ratna Dwiningtias

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, email : ratnadwi@gmail.com

Abadi

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, email : abadi4@yahoo.com

Abstrak

Perekonomian yang ideal adalah perekonomian yang pertumbuhannya stabil. Tetapi kenyataannya perekonomian umumnya mengalami gelombang pasang surut. Dalam ilmu ekonomi, gerak naik turun tersebut dikenal dengan siklus bisnis. Salah satu model siklus bisnis yang direpresentasikan dalam bentuk sistem dinamik adalah model siklus bisnis IS-LM. Pada artikel ini akan dikaji ulang model siklus bisnis IS-LM dengan tundaan waktu yang diperkenalkan oleh Cai. Model tersebut terdiri dari tiga variabel tak bebas yang melambangkan pendapatan, suku bunga, dan stok modal. Parameter tundaan τ diberikan dengan asumsi bahwa investasi bergantung pada pendapatan saat investasi pertama kali dilakukan dan juga pada stok modal pada saat waktu untuk berinvestasi berakhir. Analisis dinamik seperti penentuan titik kritis, kestabilan titik kritis, dan analisis bifurkasi Hopf, pada bagian akhir akan disimulasikan secara numerik. Sehingga diperoleh kondisi-kondisi kestabilan model siklus bisnis IS-LM dengan tundaan waktu.

Kata Kunci: model IS-LM, siklus bisnis, bifurkasi Hopf, tundaan

Abstract

An ideal economy is an economy with stable growth. However, in reality the growth of economy is up and down and usually called business cycles. One of business cycle models that can be represented by a dynamical system is IS-LM business cycle model. This article studies about IS-LM business cycle model with time delay proposed by Cai. The model consists of three independent variables representing, income, interest rates, and capital stock. Delay parameter τ is given by assuming that the investment is depend on income which was invested and depended on capital stock. The equilibrium points, and there stability including Hopf bifurcation, the analysis is also elaborated by numerical simulation. To obtain conditions of the stability of IS-LM business cycle model with time delay.

Keywords: IS-LM model, business cycle, Hopf bifurcation, time delay

PENDAHULUAN

Perekonomian yang ideal adalah perekonomian yang pertumbuhannya stabil. Perekonomian seperti ini dipercaya akan mampu memberikan kemakmuran dan keadilan bagi rakyatnya dari generasi ke generasi.

Dalam perekonomian mengalami gelombang pasang surut merupakan hal yang biasa terjadi, dan Gelombang naik turun tersebut relatif teratur dan terjadi berulang-ulang dengan rentang waktu yang bervariasi. Ada yang berdurasi pendek, panjang dan sangat panjang. Dalam ilmu ekonomi, gerak naik turun tersebut dikenal dengan siklus ekonomi atau siklus bisnis (*business cycle*).

Di dalam ilmu ekonomi banyak teori yang menjelaskan mengenai adanya siklus ekonomi salah satunya adalah model siklus bisnis IS-LM yang merupakan model siklus bisnis yang direpresentasikan

dalam bentuk sistem dinamik. Model siklus bisnis IS-LM yang melibatkan fungsi *Investment* (investasi), fungsi *Saving* (tabungan), fungsi *Liquidity preference* (permintaan akan uang), dan *Money suplay* (persediaan uang).

Model siklus bisnis pernah diperkenalkan oleh Gabisch dan Lorenz pada tahun 1989. Dalam model siklus bisnis Kalecki (1935), Kalecki mengasumsikan bahwa bagian yang disimpan dari keuntungan adalah investasi dan pertumbuhan modal bergantung pada keputusan investasi sebelumnya. Dengan menggunakan ide dari Kalecki maka Cai (2005) memberikan tundaan pada model sebelumnya dengan mempertimbangkan asumsi bahwa investasi bergantung pada pendapatan saat investasi pertama kali dilakukan dan juga pada stok modal pada saat waktu untuk berinvestasi berakhir.

KAJIAN PUSTAKA

1. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial orde satu dalam beberapa variabel yang dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), x \in R^n$$

Sistem persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu persamaan yang harus konsisten serta trivial. Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, di mana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar atau sama dengan 2.

2. Persamaan Diferensial Tundaan

Persamaan diferensial tundaan adalah sebuah persamaan diferensial di mana turunan dari fungsi pada waktu tertentu misalnya t , diberikan dalam hal nilai-nilai fungsi pada waktu yang lebih awal misalkan $t - \tau$, dengan τ menyatakan besarnya tundaan waktu. Hal ini berbeda dengan sistem persamaan diferensial biasa di mana derivatif tergantung hanya pada nilai dari variabel bebas saat ini. Suatu persamaan diferensial tundaan mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n))$$

Dimana $x(t) \in R^n, \tau_1 > \dots > \tau_n \geq 0$

3. Titik Kritis

Diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x), x \in R^n \tag{1.1}$$

Titik x^* disebut titik kritis dalam persamaan (1.1), jika $f(x^*) = 0$. Titik kritis disebut titik tetap atau titik kesetimbangan.

4. Kriteria Routh-Hurwitz

Jika nilai eigen λ tidak dapat ditentukan dengan mudah, maka kestabilan titik kritis dapat ditentukan dengan kriteria Routh-Hurwitz. Nilai eigen dari matriks ditentukan melalui polynomial karakteristik yang diperoleh dari penyelesaian $|A - \lambda I| = 0$ yaitu:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_k = 0 \tag{1.2}$$

dengan a_1, a_2, \dots, a_k adalah bilangan real.

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

$$\text{dimana } \Delta_j = \begin{cases} a_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m < k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m, \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

(l, m) menyatakan baris ke- l , untuk $l = 1, 2, \dots, j$ dan kolom ke- m untuk $m = 1, 2, \dots, j$ pada matriks Δ_j .

Semua nilai eigen dari persamaan karakteristik (1.2) mempunyai bilangan real negatif (titik kritis x^* stabil) jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif yaitu $\det(\Delta_j) > 0$, untuk $j = 1, 2, \dots, k$ dan $k = 1, 2, 3, \dots$. berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, untuk nilai $k = 2, 3, 4$ titik kritis x^* stabil jika hanya jika:

$$k = 2: a_1 > 0 \quad a_2 > 0$$

$$k = 3: a_1 > 0 \quad a_3 > 0 \quad a_1 a_2 > a_3$$

$$k = 4: a_1 > 0 \quad a_3 > 0 \quad a_4 > 0 \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

5. Bifurkasi

Definisi :

Diberikan sistem dinamik yang bergantung suatu parameter,

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{1.3}$$

Dengan $x \in R^n$ dan $\mu \in R^m$.

Nilai parameter $\mu = \mu_0$ disebut nilai bifurkasi jika terdapat solusi non trivial pada sistem (1.3) yang terdefinisi di dalam persekitaran (x, μ_0) di $R^n \times R^m$

(Verhulst, 1990:184)

Dengan demikian bifurkasi dapat didefinisikan sebagai perubahan kualitatif yang terjadi pada penyelesaian persamaan diferensial. Perubahan kualitatif meliputi perubahan stabilitas dan perubahan jumlah titik setimbang yang diakibatkan perubahan parameter.

6. Bifurkasi Hopf

Diketahui sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Misalkan titik setimbang dari sistem (1.4) adalah (x_0, y_0) . Bifurkasi Hopf terjadi jika (x_0, y_0) mempunyai nilai eigen kompleks $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ dan terjadi perubahan kestabilan pada titik setimbang yang diakibatkan perubahan parameter μ . Nilai yang menyebabkan perubahan kestabilan disebut nilai bifurkasi (μ_0) yang menyebabkan nilai eigen menjadi imajiner murni (bagian real $\alpha(\mu_0) = 0$ dan bagian imajiner $\pm\beta(\mu_0 \neq 0)$ dan memenuhi kondisi transversal).

7. Siklus Bisnis IS-LM

Teori siklus bisnis adalah suatu penjelasan terhadap fluktuasi ekonomi jangka pendek yang dibangun berdasarkan asumsi model klasik, termasuk fleksibilitas upah dan harga. Sedangkan model IS-LM adalah model yang digunakan untuk melakukan analisis yang menghubungkan perubahan tingkat bunga dengan pendapatan nasional.

Model IS-LM terdiri dari dua bagian yaitu kurva IS dan kurva LM. Kurva IS menjelaskan kombinasi dari tingkat pendapatan Y dan tingkat bunga r yang memenuhi kondisi kesetimbangan pasar barang dan jasa, dengan menganggap tingkat bunga r dan tingkat pendapatan nasional Y adalah sebagai variable endogen, dan menganggap kebijakan fiskal yaitu belanja pemerintah G dan pajak T , kebijakan moneter M , dan tingkat harga P sebagai variable eksogen. Berikut ini persamaan kurva IS: $Y = C(Y - T) + I(r) + G$

Kurva IS juga menyatakan investasi dan tabungan. Sedangkan kurva LM menggambarkan hubungan antara tingkat pendapatan dan tingkat bunga yang muncul di pasar uang. Kurva LM menjelaskan kombinasi pendapatan Y dan tingkat suku bunga r yang memenuhi kondisi keseimbangan pasar uang. Persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{M}{P} = L(r, Y)$$

Jika M menyatakan persediaan uang dan P menyatakan tingkat harga, maka M/P adalah penawaran dari keseimbangan uang riil.

Jadi seluruh bagian dari model IS-LM. Dua persamaannya dari model tersebut adalah:

$$Y = C(Y - T) + I(r) + G \quad (\text{IS})$$

$$\frac{M}{P} = L(r, Y) \quad (\text{LM})$$

Keseimbangan perekonomian adalah titik di mana kurva IS dan kurva LM berpotongan. Titik ini memberikan tingkat suku bunga r dan tingkat pendapatan Y yang memenuhi kondisi untuk kesetimbangannya baik dalam pasar barang maupun pasar uang. Dengan kata lain pada pemotongan ini pengeluaran aktual sama dengan pengeluaran yang direncanakan, dan permintaan terhadap keseimbangan uang riil sama dengan penawarannya.

METODE PENELITIAN

1. Jenis Penelitian

Penulis menggunakan jenis penelitian kepustakaan (*Library Research*), yaitu penelusuran literatur yang bersumber dari buku, media, pakar ataupun dari hasil penelitian orang lain yang bertujuan untuk menyusun dasar teori yang kita gunakan dalam melakukan penelitian.

2. Rancangan Penelitian

- Penelusuran literatur mengenai model siklus bisnis IS-LM, persamaan diferensial delay, dan bifurkasi Hopf. Penelusuran literatur ini berasal dari buku maupun dari internet,
- Kemudian mempelajari model IS-LM dengan tundaan yang dimodelkan oleh Cai,
- Setelah itu akan menentukan titik kesetimbangan dari model IS-LM,
- Menganalisis kestabilan sistem dengan menganalisis bifurkasi Hopf,
- Kemudian melakukan analisis dan simulasi sistem menggunakan *software Matlab* dan *Maple*, dengan mengubah nilai parameter tundaan dalam sistem.
- Menyimpulkan hasil analisis yang diperoleh dari model siklus bisnis IS-LM dan bagaimana pengaruh parameter tundaan dalam model IS-LM.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Matematika

Model siklus bisnis IS-LM yang dimodelkan Gabisch dan Lorenz (1989) adalah

$$\dot{Y}(t) = \alpha[I(Y(t), r(t)) - S(Y(t), r(t))]$$

$$\dot{r}(t) = \beta[L(Y(t), r(t)) - \bar{M}]$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t), K(t), r(t)) - \delta K(t)$$

dengan Y adalah pendapatan, r adalah suku bunga, K adalah stok modal, I adalah investasi, S adalah simpanan, \bar{M} adalah persediaan uang, L adalah permintaan akan uang, α adalah penyesuaian dipasar barang, β adalah koefisien penyesuaian pasar uang, dan δ adalah tingkat depresiasi stok modal.

Kemudian Cai (2005) mengembangkan model diatas dengan memberikan tundaan dalam model. Sehingga diperoleh:

$$\dot{Y} = \alpha((\eta - l_1)Y - (\beta_1 + \beta_2)r - \delta_1 K)$$

$$\dot{r} = \beta(l_2 Y - \beta_3 r - \bar{M}) \quad (1.5)$$

$$\dot{K} = \eta Y(t - \tau) - \beta_1 r - (\delta + \delta_1) K$$

2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem (1.5) diperoleh pada saat $\dot{Y} = \dot{r} = \dot{K} = 0$ dan $\tau = 0$. Maka diperoleh titik kesetimbangan sistem (1.5) $E^* = (Y^*, r^*, K^*)$ dengan

$$Y^* = \frac{-((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}}{\theta}, \quad r^* = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\theta},$$

$$K^* = \frac{-(\beta_1 l_1 + \beta_2 \eta)\bar{M}}{\theta}, \text{ dan}$$

$\theta = \delta(\beta_3 \eta - \beta_1 l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2 l_2 + \beta_3 l_1)$. Karena semua parameter merupakan kostanta positif, maka E^* eksis jika $\theta < 0$; dan $((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta) \leq 0$.

3. Kestabilan titik Kesetimbangan E^*

Kestabilan dari titik kesetimbangan sistem (1.5) dari menyelesaikan persamaan karakteristiknya. Persamaan karakteristik dari sistem (1.5) yaitu

$$G(\lambda, \tau) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C + D\lambda e^{-\lambda\tau} + Ee^{-\lambda\tau} \quad (1.6)$$

Dengan

$$\begin{aligned} A &= \delta + \delta_1 + \beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1) \\ B &= (\delta + \delta_1)(\beta\beta_3 - \alpha(\eta - l_1)) + \alpha\beta l_2(\beta_1 + \beta_3) - \alpha\beta\beta_3(\eta - l_1), \\ C &= -\alpha\beta\beta_1 l_2 \delta_1 - (\delta + \delta_1)\alpha\beta(\beta_3(\eta - l_1) - l_2(\beta_1 + \beta_2)), \\ D &= \alpha\eta\delta_1, E = \alpha\beta\beta_3\eta\delta_1 \end{aligned}$$

3.1 Kestabilan titik Kesetimbangan E^* untuk $\tau = 0$

Persamaan karakteristik $\tau = 0$ adalah

$$D(\lambda, 0) = \lambda^3 + A\lambda^2 + (B + D)\lambda + (C + E) = 0$$

Dengan menggunakan kriteria Routh-hurwitz diperoleh Kestabilan titik Kesetimbangan E^* bersifat stabil asimtotik jika $A > 0$, $B + D > 0$, $A(B + D) - (C + E) > 0$.

3.2 Kestabilan titik Kesetimbangan E^* untuk $\tau \neq 0$

Substitusikan $\lambda = \sigma + i\omega$ ke persamaan (1.6) sehingga diperoleh bagian realnya

$$\begin{aligned} \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 + A\sigma^2 - A\omega^2 + B\sigma + C + \\ e^{-\sigma\tau}(D\sigma \cos \omega\tau + D\omega \sin \omega\tau + E \cos \omega\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dan bagian imajineranya

$$\begin{aligned} 3\sigma^2\omega - \omega^3 + 2A\sigma\omega + B\omega + \\ e^{-\sigma\tau}(D\omega \cos \omega\tau + D\sigma \sin \omega\tau - E \sin \omega\tau) = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Untuk mengetahui perubahan kestabilan dari sistem (1.5), maka substitusikan $\sigma = 0$ ke persamaan (1.7) dan (1.8), sehingga diperoleh

$$-A\omega^2 + C + D\omega \sin \omega\tau + E \cos \omega\tau = 0 \quad (1.9)$$

$$-\omega^3 + B\omega + D\omega \cos \omega\tau - E \sin \omega\tau = 0 \quad (1.10)$$

Kemudian untuk mengeliminasi τ , persamaan (1.9) dan (1.10) dikuadratkan, lalu hasilnya dijumlahkan sehingga diperoleh

$$\omega^6 + p\omega^4 + q\omega^2 + r = 0 \quad (1.11)$$

Dengan $p = (A^2 - 2B)$, $q = (B^2 - 2AC - D^2)$, $r = (C^2 - E^2)$.

Untuk mempermudah perhitungan maka dimisalkan $z = \omega^2$ sehingga persamaan (1.11) menjadi

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0 \quad (1.12)$$

Menurut Ruan dan Wei, nilai akar dari persamaan (1.12) ditentukan dengan lemma 1 sebagai berikut

Lemma 1 Didefinisikan $\psi = p^2 - 3q$

- 1) Jika $r < 0$, maka persamaan (1.12) paling memiliki satu akar positif
- 2) Jika $r \geq 0$ dan $\psi < 0$, maka persamaan (1.12) tidak memiliki akar positif
- 3) Jika $r \geq 0$, dan $\psi \geq 0$, maka persamaan (1.12) mempunyai akar-akar positif jika dan hanya jika $z_1 = \frac{1}{3}(-p + \sqrt{\psi}) > 0$ dan $h(z_1) \leq 0$.

Misalkan persamaan (1.12) memiliki akar positif yang dilambangkan dengan z_1, z_2, z_3 . Maka persamaan (1.11) memiliki akar positif yaitu $\omega_1 = \sqrt{z_1}; \omega_2 = \sqrt{z_2}; \omega_3 = \sqrt{z_3}$.

Maka

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} = \frac{1}{\omega_l} \left[\arccos \left(\frac{(A\omega_l^2 - C)(E) + (\omega_l^3 - B\omega_l)(D\omega_l)}{D^2\omega_l^2 + E^2} \right) + 2j\pi \right], \\ l = 1, 2, 3; j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Lemma 2 Misalkan kestabilan titik kesetimbangan E^* terpenuhi, dan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz terpenuhi

- i) Jika $r \geq 0$ dan $\psi \leq 0$ maka semua akar dari persamaan (2.12) mempunyai bagian real yang bernilai negatif untuk semua $\tau \geq 0$
- ii) Jika $r < 0$, atau $r \geq 0, \psi > 0, z_1 > 0$, dan $h(z_1) \leq 0$, maka semua akar dari persamaan (2.12) mempunyai bagian akar real yang bernilai negatif pada $\tau \in [0, \tau_0)$.

Kemudian perlu dibuktikan apakah persamaan (1.6) memenuhi kondisi transversal sebagai syarat terjadinya bifurkasi Hopf. Kondisi transversal sebagai berikut

$$\text{Re} \left(\frac{d}{d\tau} (\lambda(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) \neq 0, \quad (1.14)$$

Menurut Ruan dan Wei kondisi (1.14) terpenuhi jika memenuhi lemma 3 sebagai berikut

Lemma 3

Andaikan $h'(z_0) \neq 0$. Jika $\tau = \tau_0$, maka $\pm i\omega_0$ adalah sepasang akar imajiner murni dari persamaan (2.12), dan jika $r < 0$, atau $r \geq 0, \psi > 0, z_1 > 0$, dan $h(z_1) < 0$ terpenuhi, maka:

$$\text{Re} \left(\frac{d}{dT} (\lambda(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0} \right) > 0$$

Bukti:

Misal

$$H(\lambda(\tau), \tau) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C + D\lambda e^{-\lambda\tau} + Ee^{-\lambda\tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\frac{\partial(H(\lambda(\tau), \tau))}{\partial\tau}}{\frac{\partial(H(\lambda(\tau), \tau))}{\partial\lambda}} \\ &= -\frac{(D\lambda^2 + E\lambda)e^{-\lambda\tau}}{3\lambda^2 + 2A\lambda + B + (D - D\tau\lambda - E\tau)e^{-\lambda\tau}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Kemudian akan dihitung turunan $H(\lambda(\tau), \tau)$ pada saat $\tau = \tau_0$ dan $\lambda = i\omega_0$

$$\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0}$$

Selanjutnya kalikan dengan pembilang dan penyebut dengan konjugate dari penyebut, kemudian diperoleh bagian real dari persamaan (1.15), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0}\right) &= \frac{\omega_0^2(3\omega_0^4 + 2\omega_0^2(A^2 - 2B) + B^2 - 2AC - D^2)}{P_1^2 + Q_1^2} \end{aligned}$$

Dengan $P_1 = -3\omega_0^2 + B + \tau_0(-A\omega_0^2 + C) + D\cos\omega_0\tau_0$,

$$Q_1 = 2A\omega_0 + \tau_0(-\omega_0^2 - B\omega_0) - D\sin\omega_0\tau_0$$

Kemudian diperoleh

$$\operatorname{Re}\left(\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0}\right) = \frac{\omega_0^2 f'(\omega_0^2)}{P_1^2 + Q_1^2}$$

Jika $h'(\omega_0^2) \neq 0$, maka diperoleh

$$\operatorname{Re}\left(\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0}\right) \neq 0$$

Berdasarkan Lemma 2 maka berlaku

$$\operatorname{Re}\left(\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0, \lambda=i\omega_0}\right) > 0$$

Jadi telah terpenuhi syarat transversal yang berti terjadi bifurkasi Hopf pada saat τ melewati τ_0 , sehingga pada sistem terjadi perubahan kestabilan.

Teorema 1 Asumsikan kestabilan titik kesetimbangan E^* terpenuhi, dan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz terpenuhi

- Jika terpenuhi, maka titik kesetimbangan E^* dalam sistem (2.18) adalah bersifat stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$.
- Jika $r < 0$ atau $r \geq 0$, $z_1 > 0$, dan $h(z_1) < 0$, sehingga semua akar-akar dari persamaan (2.18) mempunyai bagian real negatif ketika $\tau \in [0, \tau_0)$, maka titik kesetimbangan sistem bersifat stabil asimtotik.

Jika kondisi (b) terpenuhi, $\tau = \tau_0$ dan $h'(z_0) \neq 0$ maka $\pm i\omega$ adalah sepasang akar imajiner murni dari persamaan

(2.18) dan semua akar-akar yang lain mempunyai bagian real negatif. Terlebih memenuhi syarat transversal $\operatorname{Re}\left(\left. \frac{d}{d\tau}(\lambda(\tau)) \right|_{\tau=\tau_0}\right) > 0$, sehingga terjadi bifurkasi Hopf pada saat τ melewati τ_0 .

4. Simulasi Sistem

Untuk memudahkan menganalisis sistem, diberikan nilai parameter yang diperoleh dari Kaddar dan Tailibi (2008) adalah

$$\alpha = 1.5; \beta = 2; \delta = 0.2; \delta_1 = 0.5; \bar{M} = 0.05; l_1 = 0.1;$$

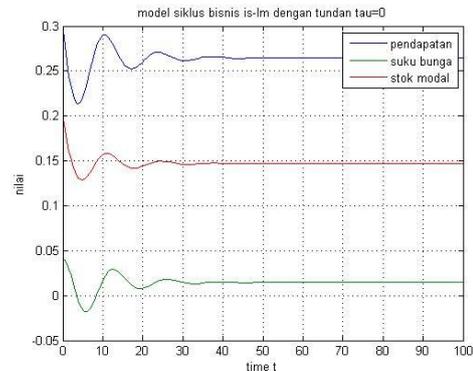
$$l_2 = 0.2; \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.2; \eta = 0.4$$

titik kesetimbangan sistem adalah

$$E^* = (0.2647, 0.0147, 0.14705)$$

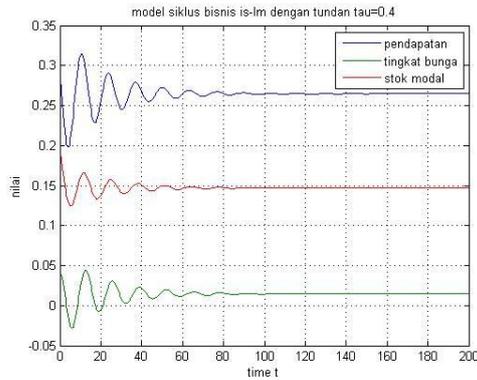
dan diperoleh $\tau_0 = 0.74289$

dari teorema 1 diperoleh, jika $\tau < 0.74289$ kestabilan titik kritis E^* bersifat stabil asimtotik (lihat pada Gambar 1 dan Gambar 2) jika $\tau = \tau_0 = 0.74289$ terjadi bifurkasi Hopf dan solusi periodik muncul (lihat pada Gambar 3), dan jika $\tau > 0.74289$ titik kritis E^* bersifat tidak stabil (lihat pada Gambar 4).



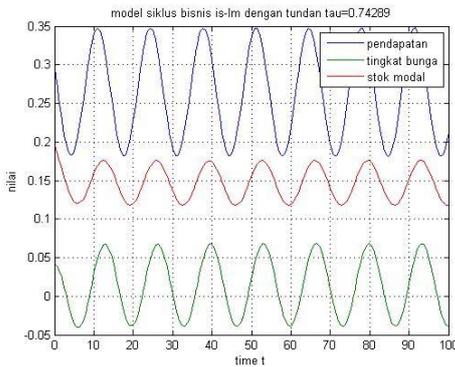
Gambar 1 kestabilan model IS-LM pada saat $\tau = 0$

Gambar 1 pada saat $\tau = 0$ model IS-LM menunjukkan bahwa kestabilan titik kritis E^* bersifat stabil asimtotik



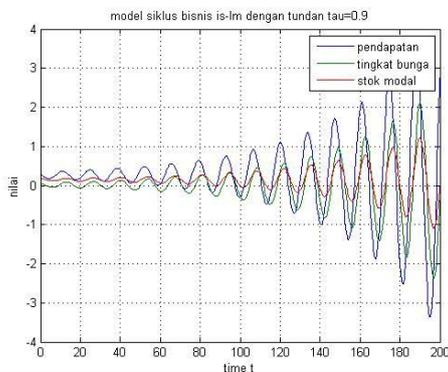
Gambar 2 kestabilan model IS-LM pada saat $\tau = 0.4$

Gambar 2 pada saat $\tau = 0.4$ model IS-LM menunjukkan bahwa kestabilan titik kritis E^* bersifat stabil asimtotik.



Gambar 3 kestabilan model IS-LM pada saat $\tau = 0.74289$

Gambar 3 pada saat $\tau = \tau_0 = 0.74289$, bifurkasi Hopf terjadi dan solusi periodik muncul dengan periode $T(0) = 13.3999$.



Gambar 4 kestabilan model IS-LM pada saat $\tau = 0.9$

Gambar 4 pada saat $\tau = 0.9$ model IS-LM menunjukkan kestabilan titik kritis E^* bersifat tidak stabil.

KESIMPULAN DAN SARAN

1. Kesimpulan

1. Diperoleh titik kritisnya adalah $E^* = (Y^*, r^*, K^*)$ dengan :

$$Y^* = \frac{-((\beta_1 + \beta_2)\delta + \beta_2\delta_1)\bar{M}}{\theta}$$

$$r^* = \frac{((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta)\bar{M}}{\theta}$$

$$K^* = \frac{-(\beta_1l_1 + \beta_2\eta)\bar{M}}{\theta}$$

Dimana

$$\theta = \delta(\beta_3\eta - \beta_1l_2) - (\delta + \delta_1)(\beta_2l_2 + \beta_3l_1)$$

keberadaan titik kesetimbangan eksis jika $\theta < 0$; dan $((\delta + \delta_1)l_1 - \delta\eta) \leq 0$.

Untuk nilai parameter tundaan $\tau = 0$, titik kritis E^* bersifat stabil asimtotik apabila memenuhi $A > 0$, $(C + E) > 0$, dan $A(B + D) - (C + E) > 0$. Sedangkan untuk nilai parameter tundaan $\tau > 0$, kestabilan titik kritis E^* bersifat stabil asimtotik untuk $\tau \in [0, \tau_0)$ yaitu sesuai dengan teorema 2.4, saat $\tau > \tau_0$ titik kritis E^* bersifat tidak stabil, dan akan terjadi bifurkasi Hopf pada saat τ melewati τ_0 yang menjamin adanya limit cycle pada nilai $\tau = 0.74289$.

2. Pemberian waktu tunda pada keputusan investasi menyebabkan terjadinya limit cycle pada saat $\tau = 0.74289$ yang mengakibatkan pertumbuhan pendapatan, pertumbuhan suku bunga, dan pertumbuhan stok modal tidak menuju pada titik kestabilannya tetapi pertumbuhan perekonomian ini dikatakan stabil. Pada saat pemberian waktu tunda $\tau < \tau_0$ pertumbuhan perekonomian selalu menuju ke titik kestabilannya, sedangkan pada saat pemberian waktu tunda $\tau > \tau_0$ yang mengakibatkan pertumbuhan pendapatan, pertumbuhan suku bunga, dan pertumbuhan stok modal tidak akan menuju pada titik kestabilannya, dan pertumbuhan perekonomian akan mengalami fluktuasi yang semakin melebar. Sehingga, dalam mengambil keputusan saat berinvestasi harus memperhitungkan panjang pendeknya pemberian waktu tunda pada komponen perekonomian .

2. Saran

Bagi pembuat kebijakan perlu lebih mempertimbangkan untuk memberikan waktu tunda pada

variabel-variabel perekonomian yang lain, panjang pendeknya penundaan serta dampak yang akan terjadi dalam sistem perekonomian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cai, J. P. 2005. *Hopf Bifurcation in the IS-LM Business Cycle Model with Time Delay*: Electronic Journal of Differential Equations, hal. 1-6.
- [2] Gabisch, G. dan Lorenz, H.W. 1987. *Business Cycle Theory A survey of methods and concepts*: Springer-Verlag, 1989 edition Berlin.
- [3] A.Kaddar dan H.Talibi Alaoui. 2008.*Fluctuations in a mixed IS-LM business cycle model*: Applied Mathematical Sciences, no.134, 1-9.
- [4] Ruan, S. dan Wei, J.2001. *On the Zeros of a Third Degree Exponential Polynomial with Applications to a Delayed Model for the Control of Testosterone Secretion*: IMA journal of Applied in Medicine and Biology, 18, hal. 41-52.
- [5] Mankiw, N, Gregory. 2007. *Makroekonomi, Edisi keenam*. Jakarta: Erlangga.
- [6] TU PNV. 1994. *Dinamical System, An Introduction with Applications in Economics and Biologi*.: Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.
- [7] Braun, M. 1983. *Differential Equations and Their Applications*. New York: Springer-Verlag.
- [8] Edelstein, Keshe L. 1988. *Mathematical Models in Biology*. New York: Random House.
- [8] Finizio dan Ladas. 1998. *Penerapan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern, Edisi Kedua*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.
- [9] Wiggins, S. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- [10] Verhulst, F. 1990. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*. New York. Springer-verlag.
- [11] Forde, J. 2005. *Delay Differential Equation Model in Mathematical Biologi*. University of Michigan.
- [12] Szydłowski, M.A, dan Krawiec, A. 2001. *The Kaldor-Kalecki Model of Business Cycle as A two Dimensional Dynamical System*. J.Nonlinear Math.Phys, Vol.8, hal.266-271.
- [13] Roussel, M,R. 2005. *Delay-differential equations*.
- [14] Shampine, L.F. and S. Thompson, "Solving DDEs in MATLAB, " *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 37, 2001, pp. 441-458.
- [15] Kierzenka, J., L.F. Shampine, and S. Thompson, "Solving Delay Differential Equations with DDE23," available at [www.mathworks.com/dde tutorial](http://www.mathworks.com/dde_tutorial).