

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL EPIDEMIK PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE DI PROVINSI NUSA TENGGARA BARAT

Aulia Syifa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia

e-mail: syifaaulia618@gmail.com

Muhammad Rijal Alfian

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia

e-mail: rijal_alfian@unram.ac.id

Nuzla Af'idatur Robbaniyyah

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia

e-mail: nuzla@unram.ac.id*

Abstrak

Demam berdarah *dengue* (DBD) merupakan salah satu penyakit yang berbahaya dan berisiko tinggi di Indonesia. Provinsi Nusa Tenggara Barat (NTB) merupakan salah satu wilayah di Indonesia yang sering dilaporkan memiliki jumlah kasus DBD yang cukup tinggi. Pada penelitian ini dikonstruksi model penyebaran penyakit DBD SIR-SI dengan kontrol berupa program 3M dan pengobatan. Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah untuk meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi dan meminimalkan biaya kontrol yang diberikan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah prinsip minimum Pontryagin untuk penyelesaian kontrol optimal dan *forward-backward* Runge-Kutta orde empat untuk penyelesaian solusi numerik. Berdasarkan hasil dan simulasi penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa sistem tidak stabil pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan stabil asimtotik pada titik ekuilibrium endemik. Selanjutnya, dengan adanya pemberian kontrol berupa program 3M dan pengobatan efektif dapat meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi dengan tetap mengendalikan biaya kontrol yang diberikan selama 90 hari.

Kata Kunci: demam berdarah *dengue*, model SIR-SI, kontrol optimal, prinsip minimum Pontryagin, *forward-backward* Runge-Kutta orde empat.

Abstract

Dengue haemorrhagic fever (DHF) is one of the dangerous and high-risk diseases in Indonesia. West Nusa Tenggara Province is one of the regions in Indonesia that is often reported to have a high number of DHF cases. In this research, SIR-SI disease transmission model of DHF is constructed with control in the form of the 3M program and treatment. The purpose of this research is to minimize the number of infected individuals and minimize the cost of control provided. The method used in this research is Pontryagin's minimum principle to determine the optimal control and forward-backward fourth order Runge-Kutta method to obtain the numerical solution. Based on the results and simulations research that has been conducted, it was obtained that the system is unstable at disease-free equilibrium point and asymptotically stable at endemic equilibrium point. Furthermore, with the implementation of control such as the 3M program and treatment effectively minimize the number of infected individuals while keeping the cost of control provided for 90 days.

Keywords: *dengue haemorrhagic fever, SIR-SI model, optimal control, Pontryagin's minimum principle, forward-backward fourth order Runge-Kutta.*

PENDAHULUAN

Sustainable Development Goals (SDGs) atau tujuan pembangunan berkelanjutan merupakan serangkaian tujuan yang ditetapkan oleh Perserikatan Bangsa-Bangsa (PBB) untuk mencapai kehidupan yang lebih baik. SDGs terdiri dari 17 tujuan dan 169 target spesifik, salah satunya tujuan ke-3, yaitu menjamin

kehidupan yang sehat dan meningkatkan kesejahteraan seluruh penduduk semua usia. Menurut Kementerian PPN/Bappenas yang berperan sebagai implementasi dan pemantauan pencapaian SDGs di Indonesia, terdapat target 3.3 SDGs, yaitu mengakhiri epidemi AIDS, tuberkulosis, malaria, dan penyakit tropis yang terabaikan, dan memerangi hepatitis, penyakit bersumber air, serta penyakit

menular lainnya. Salah satu penyakit yang termasuk dalam kategori penyakit tropis dan penyakit menular lainnya adalah demam berdarah *dengue* (DBD) (Imro'ah *et al.*, 2022).

Demam berdarah *dengue* (DBD) merupakan masalah kesehatan masyarakat global yang serius untuk segera ditemukan penyelesaian dan pencegahannya. Penyakit DBD merupakan penyakit infeksi yang disebabkan virus *dengue* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* dan *Aedes albopictus* (Aji *et al.*, 2022). Penyebaran penyakit ini begitu cepat dan menyebabkan risiko kematian. Penyebaran DBD biasanya berkembang pada daerah tropis dan subtropis. Indonesia termasuk dalam penyebaran DBD yang akut.

Indonesia adalah negara yang memiliki iklim tropis dan mempunyai kadar curah hujan yang tinggi. Penyakit DBD merupakan salah satu penyakit yang berbahaya dan berisiko tinggi di Indonesia. Jumlah kasus di Indonesia tercatat tahun 2024 pada periode Januari-April terdapat 88.593 kasus DBD dan kematian DBD sebanyak 621 kematian (Kemenkes Ditjen P2P, 2024). Jumlah kasus DBD pada periode Januari-April 2023 sebesar 28.579 kasus, jika dibandingkan maka terjadi kenaikan hingga 209 % atau tiga kali lipat. Salah satu wilayah di Indonesia yang sering dilaporkan memiliki jumlah kasus yang cukup tinggi adalah Nusa Tenggara Barat (NTB). Kasus DBD seringkali mengalami peningkatan pada musim hujan dan musim panas. Berdasarkan data Kemenkes RI pada tahun 2021, wilayah NTB termasuk dalam 10 Provinsi tertinggi kasus DBD di Indonesia tahun 2020. NTB berada di urutan kedepalan dengan jumlah kasus 3.919 kasus DBD.

Berdasarkan kondisi tersebut, perlu dilakukan upaya untuk memberantas perkembangan penyakit DBD terutama di wilayah NTB. Upaya yang dilakukan dapat dijadikan sebagai kontrol terhadap penyebaran penyakit DBD. Upaya yang dapat dilakukan untuk memberantas perkembangan penyakit ini di antaranya dengan program 3M (menguras, menutup, dan mengubur), pemberantasan populasi vektor dengan insektisida, dan pengobatan pada individu terinfeksi (Lestari *et al.*, 2015). Dengan dilakukannya kontrol untuk membatasi penyebaran penyakit DBD, diharapkan mampu membatasi populasi nyamuk sebagai vektor penyebaran virus serta mengobati populasi manusia yang terinfeksi virus *dengue*.

Upaya pencegahan penyakit DBD tidak hanya didapat dari bidang kedokteran saja, tetapi bidang matematika juga mempunyai peranan penting dalam pencegahannya. Dalam rangkaantisipasi terhadap kejadian DBD perlu suatu model matematika untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit dan teknik optimasi untuk menemukan strategi kontrol sehingga dapat digunakan sebagai peringatan dini terhadap kejadian DBD. Pemodelan matematika dapat digunakan untuk merancang program pengendalian penyakit DBD. Salah satu model matematika yang digunakan untuk menganalisis penularan penyakit adalah model SIR (Susceptible, Infected, Recovered) (Sani *et al.*, 2023).

Dengan adanya model matematika, dapat memberikan pemahaman bagaimana penyakit menyebar dalam suatu populasi sehingga sering digunakan untuk membentuk strategi pengendaliannya. Model yang akurat dapat digunakan untuk memprediksi dan mengendalikan wabah penyakit secara efektif. Bentuk pengendalian penyakit telah banyak dilakukan oleh penelitian sebelumnya. Terdapat penelitian terkait penyebaran penyakit DBD dilakukan oleh Andiraja *et al.* (2022) yang membahas mengenai strategi pengendalian berupa vaksinasi pada manusia yang terinfeksi DBD. Selain itu, terdapat penelitian yang dilakukan oleh Aziim dan Arif (2022) yang membahas mengenai pengendalian penyakit DBD dengan kontrol berupa penyemprotan insektisida dan pengobatan. Adapun penelitian terkait wabah penyakit lain menggunakan kontrol optimal model matematika dilakukan oleh Putri (2020) yang membahas mengenai desain kendali optimal pada model matematika penyebaran penyakit malaria dengan kontrol berupa pencegahan manusia, pengobatan manusia, dan penyemprotan insektisida terhadap nyamuk.

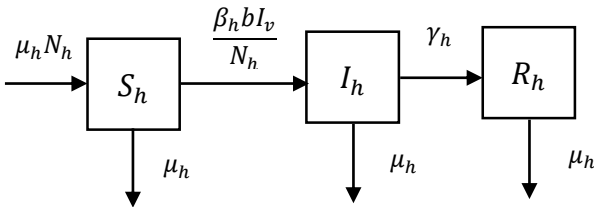
Berdasarkan uraian di atas, pencegahan pada penyebaran penyakit DBD dapat dikendalikan dengan diberikan kontrol sebagai bentuk pencegahannya. Untuk mengetahui penyebaran penyakit DBD maka diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi sehingga dapat mencegah penyebarannya. Oleh karena itu, dipilih topik penelitian, yaitu kontrol optimal pada model epidemik penyakit demam berdarah *dengue* di Provinsi Nusa Tenggara Barat. Adapun pemberian kontrol yang digunakan berupa program 3M

(menguras, menutup, dan mengubur) dan pengobatan pada manusia yang terinfeksi. Dengan adanya penelitian ini diharapkan mampu meminimalkan biaya kontrol yang diberikan dengan tetap mengendalikan jumlah individu yang terinfeksi.

KAJIAN TEORI

MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)

Model matematika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* (DBD) merupakan suatu model yang menggambarkan dinamika penyebaran penyakit DBD antara populasi manusia dan populasi nyamuk (perantara). Model ini dibagi menjadi dua populasi, yaitu populasi manusia (*host*) dan nyamuk (*vector*). Penyebaran penyakit DBD pada populasi manusia (N_h) yang digolongkan menjadi tiga subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S_h), *Infected* (I_h), dan *Recovered* (R_h) disajikan dalam gambar sebagai berikut (Nisa *et al.*, 2024).



Gambar 1. Dinamika Proses Penyebaran Penyakit DBD pada Populasi Manusia

Model matematika populasi manusia dapat dituliskan sebagai berikut (Nisa *et al.*, 2024).

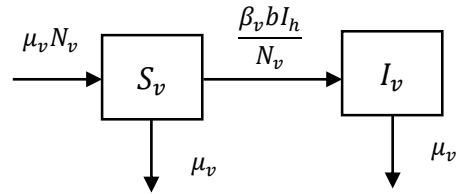
$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \frac{\beta_h b I_v}{N_h} S_h - \mu_h S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_h b I_v}{N_h} S_h - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \end{aligned} \tag{1}$$

Keterangan:

- S_h : jumlah populasi manusia yang rentan tertular virus *dengue*
- I_h : jumlah populasi manusia yang terinfeksi virus *dengue*
- R_h : jumlah populasi manusia yang sudah sembuh
- μ_h : laju kelahiran dan kematian pada populasi manusia
- β_h : peluang penyebaran virus *dengue* dari nyamuk ke manusia

- b : banyaknya gigitan yang diakibatkan satu ekor nyamuk
- γ_h : laju penyembuhan dari infeksi virus *dengue* pada populasi manusia

Kemudian pada populasi nyamuk (N_v) yang digolongkan menjadi dua subpopulasi, yaitu *Susceptible* (S_v), dan *Infected* (I_v) disajikan dalam gambar sebagai berikut (Nisa *et al.*, 2024).



Gambar 2. Dinamika Proses Penyebaran Penyakit DBD pada Populasi Nyamuk

Model matematika populasi nyamuk dapat dituliskan sebagai berikut (Nisa *et al.*, 2024).

$$\begin{aligned} \frac{dS_v}{dt} &= \mu_v N_v - \frac{\beta_v b I_h}{N_v} S_v - \mu_v S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \frac{\beta_v b I_h}{N_v} S_v - \mu_v I_v \end{aligned} \tag{2}$$

Keterangan:

- S_v : jumlah populasi nyamuk yang rentan terserang virus *dengue*
- I_v : jumlah populasi nyamuk yang terinfeksi virus *dengue*
- μ_v : laju kelahiran dan kematian pada populasi nyamuk
- β_v : peluang penyebaran virus *dengue* dari manusia ke nyamuk
- b : banyaknya gigitan yang diakibatkan satu ekor nyamuk

TITIK EKUILIBRIUM (KESETIMBANGAN)

Titik ekuilibrium (kesetimbangan) merupakan titik yang tidak berubah terhadap waktu. Artinya, pada saat $t = 1, 2, \dots, n$, nilai titik ekuilibrium tidak berubah atau akan tetap.

Definisi 1 Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 2001).

Dalam model penyebaran penyakit, titik ekuilibrium dibagi menjadi dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (*Disease-Free Equilibrium* atau DFE) dan titik ekuilibrium endemik (*Endemic Equilibrium* atau EE). Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) adalah suatu kondisi populasi terbebas dari penyakit atau tidak ada individu yang terinfeksi penyakit di dalam populasi, sedangkan titik

ekuilibrium endemik (E_1) adalah suatu kondisi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit di dalam populasi (Hamka *et al.*, 2023).

KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM (KESETIMBANGAN)

Kestabilan titik ekuilibrium dilakukan untuk memperoleh informasi yang menggambarkan perilaku sistem pada titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium dikatakan stabil jika solusi dari sistem persamaan pada saat t selalu berada pada jarak yang cukup dekat dengan titik ekuilibrium di dalam suatu sekitarnya. Titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik jika solusi sistem persamaan pada saat t konvergen ke titik ekuilibrium (asalkan titik awal adalah cukup dekat ke titik ekuilibrium). Titik ekuilibrium dikatakan tidak stabil jika solusi sistem persamaan pada saat t yang dimulai dari manapun dekatnya dengan titik ekuilibrium, tetapi akhirnya menjauh dari titik ekuilibrium (Olsder *et al.*, 2011).

Definisi 2 Diberikan persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($k \leq n$) (Subiono, 2013).

1. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik bila dan hanya bila $Re(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.
2. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah stabil bila dan hanya bila $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.
3. Titik asal $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil bila dan hanya bila $Re(\lambda_i) > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re(\lambda_i) = 0$ dan multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya.

KETERKONTROLAN

Keterkontrolan sistem merupakan suatu kondisi di mana sistem dapat dikontrol dari suatu keadaan menjadi keadaan lainnya sesuai dengan suatu tujuan yang diinginkan. Penyelesaian kontrol optimal tidak akan diperoleh jika sistem tidak terkontrol (Novita, 2018). Diberikan sistem linier kontinu sebagai berikut (Subiono, 2013).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (3)$$

Keterangan:

- A, B, C, D : matriks
- x : keadaan (*state*)
- y : output sistem
- u : input sistem

Syarat perlu dan cukup Sistem (3) terkontrol adalah:

1. $w(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$ non-singular
2. Matriks: $M_c = (B|AB|A^2B| \dots |A^{n-1}B)$ mempunyai *rank* yang sama dengan ukuran matriks $A_{n \times n}$.

MASALAH KONTROL OPTIMAL

Masalah kontrol optimal merupakan suatu persoalan yang memiliki tujuan untuk menyelesaikan kontrol $u(t)$ yang mampu mengoptimalkan (memaksimumkan ataupun meminimumkan). Tahapan yang perlu dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan kontrol optimal adalah sebagai berikut (Putri, 2020).

1. Mendeskripsikan model matematika dari sistem yang akan dikontrol (secara umum dalam bentuk variabel *state*).
2. Menentukan fungsi tujuan (*performance index*).
3. Menentukan kondisi batas dan kendala variabel *state* dan variabel kontrol.

Fungsi tujuan dapat dirumuskan sebagai berikut (Putri, 2020).

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt, \quad (4)$$

dengan fungsi kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (5)$$

dan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f. \quad (6)$$

Keterangan:

- t_0 : waktu awal
- t_f : waktu akhir
- V dan f : fungsi skalar

Jika disubstitusikan ke dalam sistem maka akan diperoleh keadaan optimal dan pada saat yang sama juga fungsi tujuan dapat dioptimalkan. Persamaan (4) merupakan fungsi tujuan yang berisi biaya integral $\left(\int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt\right)$ disebut sebagai bentuk Lagrange (Afnani, 2021).

PRINSIP MINIMUM PONTYAGIN

Prinsip minimum Pontryagin merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dikarenakan menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi optimal. Prinsip ini digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan meminimumkan fungsi tujuan dengan kendala dan diberikan fungsi kontrol $u(t)$. Tahapan penyelesaian untuk mendapatkan

kontrol optimal untuk sistem adalah sebagai berikut (Putri, 2020).

1. Merumuskan fungsi Hamiltonian (membentuk fungsi Pontryagin).

Bentuk umum persamaan H disebut fungsi Hamiltonian dengan V adalah bentuk Lagrange dan f adalah sebuah fungsi dari sebuah variabel $x(t)$ dan $u(t)$.

$$H(x(t), u(t), \varphi(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \varphi(t)g(x(t), u(t), t) \quad (7)$$

dengan $\varphi(t)$ adalah variabel *co-state*.

2. Menentukan kondisi stasioner untuk mendapatkan persamaan kontrol optimal.

Fungsi H pada Persamaan (7) diminimumkan terhadap semua variabel kontrol $u(t)$ sehingga dapat dituliskan menjadi:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0 \quad (8)$$

untuk mendapatkan $u^*(t) = u^*(x(t), \varphi(t), t)$.

3. Fungsi Hamiltonian (H^*) yang optimal diperoleh dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2, yaitu:

$$H^*(x(t), u(t), \varphi(t), t) = V(x(t), u^*(t), t) + \varphi(t)g(x(t), u^*(t), t) \quad (9)$$

4. Menentukan persamaan *state* dan *co-state*.

Persamaan *state* ditentukan dengan cara:

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)_* \quad (10)$$

dan persamaan *co-state* ditentukan dengan cara:

$$\dot{\varphi}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* \quad (11)$$

dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\varphi(t_f) = 0$.

5. Mensubstitusikan hasil $x^*(t)$ dan $\varphi^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 sehingga akan diperoleh hasil kontrol optimal.

FORWARD-BACKWARD RUNGE-KUTTA

Metode *sweep* maju-mundur atau biasa disebut sebagai metode *forward-backward* Runge-Kutta orde empat digunakan untuk memperoleh solusi persamaan *state* dan *co-state*. Solusi persamaan *state*, yaitu $x(t)$ diperoleh dengan metode *forward* Runge-Kutta, sedangkan solusi persamaan *co-state*, yaitu $\varphi(t)$ diperoleh dengan metode *backward* Runge-Kutta. Dalam penyelesaian *forward* Runge-Kutta, diberikan nilai awal $x(t_0)$ dan panjang interval h dalam penyelesaian persamaan *state*. Melalui pendekatan $x(t+h)$ dan $x(t)$, maka bentuk umum

metode *forward* Runge-Kutta adalah sebagai berikut (Hardiansyah H, 2023).

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (12)$$

dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x(t)), \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t+h, x(t) + hk_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Kemudian dalam penyelesaian *backward* Runge-Kutta, diberikan nilai akhir $\varphi(t_f)$ dan panjang interval h dalam penyelesaian persamaan *co-state*. Melalui pendekatan $\varphi(t-h)$ dan $\varphi(t)$, maka bentuk umum metode *backward* Runge-Kutta adalah sebagai berikut (Hardiansyah H, 2023).

$$\varphi(t-h) = \varphi(t) - \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (14)$$

dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \varphi(t)), \\ k_2 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \varphi(t) - \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t - \frac{h}{2}, \varphi(t) - \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t-h, \varphi(t) - hk_3). \end{aligned} \quad (15)$$

METODE

Jenis penelitian ini adalah jenis penelitian terapan yang bertujuan untuk menentukan model matematika dengan kontrol optimal, menentukan penyelesaian kontrol optimal dengan metode prinsip minimum Pontryagin, dan mensimulasikan model dengan metode Runge-Kutta orde empat. Penelitian ini menggunakan data sekunder berupa jumlah kasus penderita penyakit DBD serta jumlah populasi manusia dan nyamuk di Provinsi NTB. Data yang digunakan merupakan data dalam kurun waktu enam tahun, yaitu dari tahun 2018–2023. Data ini diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi NTB dan Dinas Kesehatan Provinsi NTB. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Melakukan studi literatur merupakan tahapan dalam menentukan topik penelitian sekaligus menjadi sumber kepustakaan yang berhubungan dengan persamaan diferensial dan pemodelan matematika.

2. Mengidentifikasi masalah merupakan tahapan dalam penelitian yang dilakukan setelah dilakukan studi literatur.
3. Pengumpulan data dilakukan untuk mendukung model penyebaran penyakit DBD.
4. Mengkonstruksi model penyebaran penyakit DBD berupa dua kompartemen terhadap populasi manusia dan nyamuk sesuai dengan keadaan di Provinsi NTB.
5. Menentukan nilai parameter dapat ditentukan dengan menggunakan hasil estimasi dan dari data yang diperoleh dan asumsi berdasarkan referensi.
6. Menentukan titik ekuilibrium sistem dilakukan untuk mengetahui dua kondisi, yaitu titik ekuilibrium keadaan bebas penyakit (E_0) dan titik ekuilibrium keadaan terdapat penyakit atau endemik (E_1).
7. Linierisasi model penyebaran penyakit DBD persamaan diferensial dilakukan untuk mengubah persamaan nonlinier menjadi linier dengan menggunakan matriks Jacobian.
8. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui sistem tersebut stabil atau tidak stabil. Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar dilakukan untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit DBD di Provinsi NTB.
9. Analisis keterkontrolan dilakukan untuk menentukan sistem penyebaran penyakit DBD dapat dikendalikan menuju kondisi yang diinginkan dengan penerapan kontrol yang sesuai.
10. Penyelesaian kontrol optimal dilakukan dari model penyebaran penyakit DBD dengan membentuk fungsi objektif dan kondisi syarat batas yang harus dipenuhi kemudian penyelesaiannya menggunakan metode prinsip minimum Pontryagin
11. Simulasi numerik dilakukan dengan metode metode *forward-backward* Runge-Kutta orde empat.
12. Menarik kesimpulan dapat dilakukan setelah semua tahapan selesai.

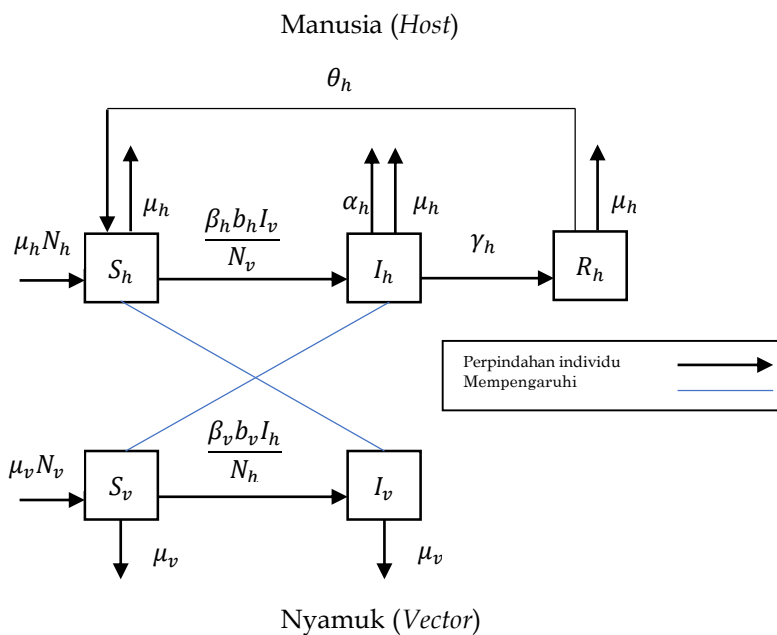
HASIL DAN PEMBAHASAN

MODEL EPIDEMIK PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD)

Model epidemik penyakit DBD tanpa kontrol dengan ukuran total populasi manusia dan nyamuk pada waktu t masing-masing dilambangkan sebagai $N_h(t)$ dan $N_v(t)$. Adapun beberapa asumsi yang digunakan pada model epidemik penyakit DBD dengan kontrol adalah sebagai berikut.

1. Populasi penduduk bersifat tertutup, artinya tidak ada individu yang masuk ke dalam populasi atau keluar dari populasi.
2. Populasi bersifat homogen, artinya setiap individu memiliki peluang yang sama untuk terinfeksi, menularkan, dan sembuh dari penyakit DBD.
3. Setiap individu yang lahir diasumsikan rentan terhadap penyakit DBD.
4. Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi, yaitu penyakit DBD.
5. Laju kelahiran dan kematian alami bernilai sama sehingga populasi konstan.

Berdasarkan Aziim dan Arif (2022) dan Wulandari (2022), diagram kompartemen model epidemik penyakit DBD digambarkan sebagai berikut.



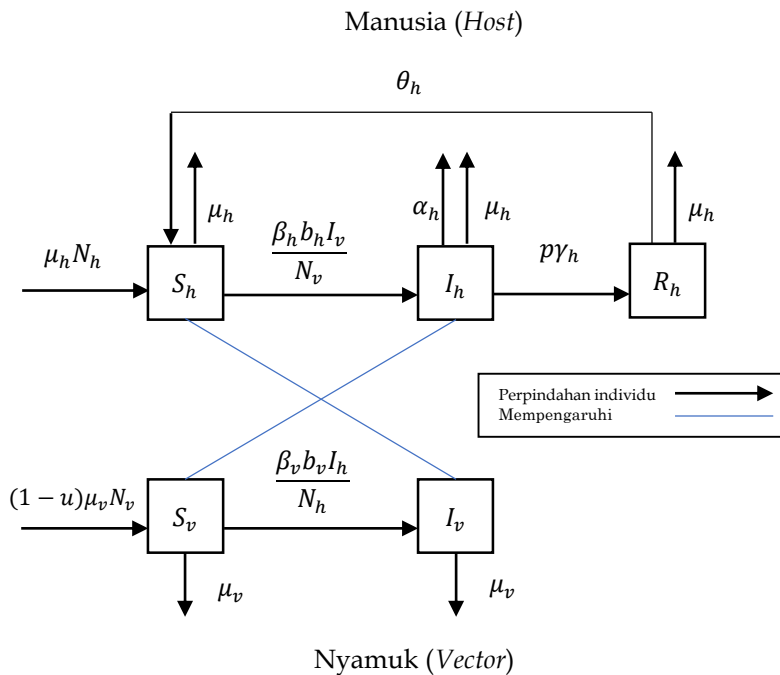
Gambar 3. Diagram Kompartemen Model Epidemik Penyakit DBD

MODEL EPIDEMIK PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE (DBD) DENGAN KONTROL OPTIMAL

Berikut ini diberikan beberapa asumsi yang digunakan dalam strategi kontrol pada model epidemik penyebaran penyakit DBD, yaitu:

1. Kontrol u adalah representasi usaha untuk memberantas nyamuk melalui pelaksanaan program 3M (menguras, menutup, dan mengubur). Tingkat reproduksi populasi nyamuk berkurang dengan faktor $1 - u$.
2. Kontrol p adalah representasi pengobatan DBD yang diberikan pada manusia terinfeksi.

Dengan demikian, diagram kompartemen model kontrol optimal epidemik penyakit DBD di Provinsi NTB digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. Diagram Kompartemen Model Kontrol Optimal Epidemik Penyakit DBD dengan Kontrol u dan p

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4 di atas, model matematika epidemik penyakit DBD dengan kontrol optimal disajikan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \frac{\beta_h b_h I_v}{N_v} S_h - \mu_h S_h + \theta_h R_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_h b_h I_v}{N_v} S_h - p \gamma_h I_h - \alpha_h I_h - \mu_h I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= p \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \theta_h R_h \\
 \frac{dS_v}{dt} &= (1 - u) \mu_v N_v - \frac{\beta_v b_v I_h}{N_h} S_v - \mu_v S_v
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{\beta_v b_v I_h}{N_h} S_v - \mu_v I_v$$

dengan syarat awal $S_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, R_h(0) \geq 0, S_v(0) \geq 0, I_v(0) \geq 0$.

Total populasi manusia dan nyamuk dapat dinyatakan sebagai $N_h = S_h + I_h + R_h$ dan $N_v = S_v + I_v$.

Jika dilakukan normalisasi model, maka variabel S_h, I_h, R_h, S_v, I_v dapat diproporsikan menjadi variabel baru, yaitu:

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_h &= \mu_h - \beta_h b_h i_v s_h - \mu_h s_h + \theta_h r_h \\
 \dot{i}_h &= \beta_h b_h i_v s_h - p \gamma_h i_h - \alpha_h i_h - \mu_h i_h \\
 \dot{r}_h &= p \gamma_h i_h - \mu_h r_h - \theta_h r_h \\
 \dot{s}_v &= (1 - u) \mu_v - \beta_v b_v i_h s_v - \mu_v s_v \\
 \dot{i}_v &= \beta_v b_v i_h s_v - \mu_v i_v
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Keterangan:

- S_h : jumlah populasi manusia yang rentan tertular virus dengue
- I_h : jumlah populasi manusia yang terinfeksi virus dengue
- R_h : jumlah populasi manusia yang sudah sembuh
- S_v : jumlah populasi nyamuk yang rentan terserang virus dengue
- I_v : jumlah populasi nyamuk yang terinfeksi virus dengue
- μ_h : laju kelahiran dan kematian pada populasi manusia
- β_h : peluang penyebaran virus dengue dari nyamuk ke manusia
- b_h : jumlah rata-rata gigitan per nyamuk yang terinfeksi
- θ_h : laju penurunan kekebalan terhadap penyakit pada populasi manusia
- γ_h : laju penyembuhan dari infeksi virus dengue pada populasi manusia
- α_h : laju kematian karena penyakit DBD pada populasi manusia
- μ_v : laju kelahiran dan kematian pada populasi nyamuk
- β_v : peluang penyebaran virus dengue dari manusia ke nyamuk
- b_v : jumlah rata-rata gigitan per nyamuk yang rentan

PENENTUAN NILAI PARAMETER

Nilai parameter pada penelitian ini diperoleh menggunakan estimasi dan asumsi dalam

penentuannya. Dalam model epidemik penyakit penyakit DBD, digunakan dua populasi manusia (*host*) dan populasi nyamuk *Aedes aegypti* (*vector*) sehingga dilakukan penentuan nilai parameter pada setiap populasi. Jumlah seluruh populasi manusia dan nyamuk yang digunakan dalam penelitian ini adalah $N_h = 5.306.486$ jiwa dan $N_v = 55.458$. Berdasarkan data dari *website* Badan Pusat Statistik Provinsi NTB dan Dinas Kesehatan Provinsi NTB dari tahun 2018–2023, berikut adalah rincian nilai awal untuk setiap variabel pada model SIR-SI penyakit DBD.

Tabel 1. Nilai Awal Model SIR-SI Penyakit DBD

Variabel	Nilai	Nilai Proporsi	Satuan	Sumber
s_{h_0}	5.300.891	0,99895	Jiwa	BPS Provinsi NTB
i_{h_0}	2.805	0,00053	Jiwa	Dinkes Provinsi NTB
r_{h_0}	2.790	0,00053	Jiwa	Dinkes Provinsi NTB
s_{v_0}	36.972	0,66667	Ekor	Asumsi
i_{v_0}	18.486	0,33333	Ekor	Asumsi

Adapun rincian nilai parameter yang digunakan pada model SIR-SI penyakit DBD adalah sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai Parameter Model SIR-SI Penyakit DBD

Parameter	Nilai	Satuan	Sumber
μ_h	0,01484	Pertahun	Estimasi
μ_v	0,16438	Pertahun	Estimasi
b_h	1	Pertahun	Asumsi
b_v	0,5	Pertahun	Asumsi
β_h	0,75	Pertahun	Asumsi
β_v	0,75	Pertahun	Asumsi
θ_h	0,00274	Pertahun	Estimasi
γ_h	0,99477	Pertahun	Estimasi
α_h	0,00523	Pertahun	Estimasi

Tabel 1 dan Tabel 2 memberikan informasi mengenai nilai awal variabel dan parameter yang digunakan dalam model SIR-SI untuk penyakit DBD. Tabel 1 menunjukkan nilai awal dari setiap variabel

yang menggambarkan kondisi awal populasi individu dalam model. Nilai-nilai ini digunakan sebagai titik awal simulasi atau analisis matematis untuk memahami bagaimana penyakit menyebar dalam populasi dari waktu ke waktu. Tabel 2 menunjukkan nilai parameter yang mempengaruhi dinamika sistem. Nilai-nilai ini digunakan untuk menentukan laju perubahan dalam sistem dan berperan penting dalam analisis kestabilan serta penentuan strategi pengendalian penyakit DBD di Provinsi NTB.

PENENTUAN TITIK EKUILIBRIUM

Titik ekuilibrium dari sistem diperoleh jika $\dot{s}_h = 0$, $\dot{i}_h = 0$, $\dot{r}_h = 0$, $\dot{s}_v = 0$, dan $\dot{i}_v = 0$. Dalam penelitian ini digunakan dua titik ekuilibrium, yaitu bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan perhitungan, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dari model epidemik penyakit DBD adalah $E_0 = (s_h'; i_h'; r_h'; s_v'; i_v') = (1; 0; 0; 1; 0)$ dan titik ekuilibrium endemik dari model epidemik penyakit DBD adalah $E_1 = (s_h^*; i_h^*; r_h^*; s_v^*; i_v^*) = (0,60242; 0,00686; 0,3883; 0,98459; 0,01541)$.

LINIERISASI MODEL

Linierisasi sistem persamaan pada model epidemik penyakit DBD dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian. Linierisasi digunakan untuk analisis kestabilan titik ekuilibrium. Persamaan nonlinier dari model epidemik penyakit DBD dilinierisasi dan hasil dari linierisasi merupakan matriks Jacobian J adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_h b_h i_v - \mu_h & 0 & \theta_h & 0 & -\beta_h b_h s_h \\ \beta_h b_h i_v & -\gamma_h - \alpha_h - \mu_h & 0 & 0 & \beta_h b_h s_h \\ 0 & \gamma_h & -\mu_h - \theta_h & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_v b_v s_v & 0 & -\beta_v b_v i_h - \mu_v & 0 \\ 0 & \beta_v b_v s_v & 0 & \beta_v b_v i_h & -\mu_v \end{pmatrix} \quad (18)$$

ANALISIS KESTABILAN MODEL

Analisis kestabilan model digunakan untuk memperoleh informasi yang menggambarkan perilaku sistem pada titik ekuilibrium. Kestabilan model dapat dilihat dari nilai eigen yang dihasilkan. Berdasarkan perhitungan, diperoleh kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dari model epidemik penyakit DBD bersifat tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik dari model epidemik penyakit DBD bersifat stabil asimtotik.

PENENTUAN BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diturunkan dengan memperhatikan persamaan kompartemen

terinfeksi virus *dengue* saja, yaitu i_h dan i_v . Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat ditentukan dengan matriks generasi selanjutnya (*next generation matrix*) pada titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0). Berdasarkan perhitungan, diperoleh $R_0 = 1,68595 > 1$.

ANALISIS KETERKONTROLAN

Keterkontrolan sistem dilakukan untuk menentukan apakah sistem dapat dikontrol menuju kondisi tanpa infeksi. Keterkontrolan sistem dilakukan menggunakan matriks Jacobian di sekitar titik kesetimbangan. Berdasarkan Persamaan (3), dimisalkan matriks A . Kemudian matriks B sebagai berikut.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{s}_h(t)}{\partial u} & \frac{\partial \dot{s}_h(t)}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{i}_h(t)}{\partial u} & \frac{\partial \dot{i}_h(t)}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{r}_h(t)}{\partial u} & \frac{\partial \dot{r}_h(t)}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{s}_v(t)}{\partial u} & \frac{\partial \dot{s}_v(t)}{\partial p} \\ \frac{\partial \dot{i}_v(t)}{\partial u} & \frac{\partial \dot{i}_v(t)}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_h i_h \\ 0 & \gamma_h i_h \\ -\mu_v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

sehingga didapatkan matriks keterkontrolan, yaitu

$$M_c = (B|AB|A^2B|A^3B|A^4B) \quad (20)$$

Berdasarkan perhitungan, diperoleh bahwa keterkontrolan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dari model epidemik penyakit DBD bersifat tidak terkontrol dan titik ekuilibrium endemik dari model epidemik penyakit DBD bersifat terkontrol.

PENYELESAIAN KONTROL OPTIMAL

Penyelesaian kontrol optimal model epidemik penyakit DBD menggunakan prinsip minimum Pontryagin dan fungsi objektif untuk model diberikan sebagai berikut.

$$J(u, p) = \min \int_{t_0}^{t_f} \left(A_1 i_h + A_2 s_v + \left(\frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 p^2}{2} \right) \right) dt \quad (21)$$

dengan:

- A_1 : bobot dari manusia terinfeksi
- A_2 : bobot dari nyamuk rentan
- m_1 : bobot biaya pada kontrol program 3M untuk nyamuk
- m_2 : bobot biaya pada kontrol pengobatan untuk manusia terinfeksi

dengan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir yang sudah ditetapkan. Variabel u dan p

adalah kontrol yang akan diminimumkan. Selanjutnya, penyelesaian kontrol optimal dapat diselesaikan dengan beberapa langkah sebagai berikut.

1. Merumuskan fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \varphi(t), t) &= V(x(t), u(t), t) + \varphi(t)g(x(t), u(t), t) \\ \Leftrightarrow H &= A_1 i_h + A_2 s_v + \left(\frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 p^2}{2} \right) \\ &\quad + \varphi_{s_h}(\mu_h - \beta_h b_h i_v s_h - \mu_h s_h + \theta_h r_h) \\ &\quad + \varphi_{i_h}(\beta_h b_h i_v s_h - p \gamma_h i_h - \alpha_h i_h \\ &\quad - \mu_h i_h) + \varphi_{r_h}(p \gamma_h i_h - \mu_h r_h - \theta_h r_h) \\ &\quad + \varphi_{s_v}((1-u)\mu_v - \beta_v b_v i_h s_v \\ &\quad - \mu_v s_v) + \varphi_{i_v}(\beta_v b_v i_h s_v - \mu_v i_v) \end{aligned} \quad (22)$$

2. Menentukan kondisi stasioner Persamaan (22) untuk mendapatkan nilai kontrol optimal. Persamaan (22) diturunkan terhadap u dan p sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} u^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\varphi_{s_v} \mu_v}{m_1} \right\}, 1 \right\} \\ p^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{(\varphi_{i_h} - \varphi_{r_h}) \gamma_h i_h}{m_2} \right\}, 1 \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

3. Menentukan H^* yang optimal

$$\begin{aligned} H^*(x(t), u(t), \varphi(t), t) &= V(x(t), u^*(t), t) \\ &\quad + \varphi(t)g(x(t), u^*(t), t) \\ \Leftrightarrow H^* &= A_1 i_h + A_2 s_v + \left(\frac{m_1 (u^*)^2}{2} + \frac{m_2 (p^*)^2}{2} \right) \\ &\quad + \varphi_{s_h}(\mu_h - \beta_h b_h i_v s_h - \mu_h s_h + \theta_h r_h) \\ &\quad + \varphi_{i_h}(\beta_h b_h i_v s_h - p^* \gamma_h i_h - \alpha_h i_h \\ &\quad - \mu_h i_h) + \varphi_{r_h}(p^* \gamma_h i_h - \mu_h r_h - \theta_h r_h) \\ &\quad + \varphi_{s_v}((1-u^*)\mu_v - \beta_v b_v i_h s_v - \mu_v s_v) \\ &\quad + \varphi_{i_v}(\beta_v b_v i_h s_v - \mu_v i_v) \end{aligned} \quad (24)$$

4. Menentukan persamaan *state* dan *co-state* untuk memperoleh sistem yang optimal.

a. Persamaan *State*

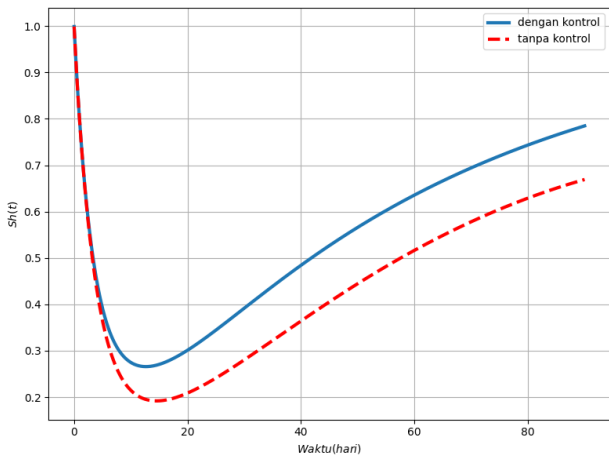
$$\begin{aligned} \dot{x}_{s_h}^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial \varphi_{s_h}} \right) = \mu_h - \beta_h b_h i_v s_h - \mu_h s_h + \theta_h r_h \\ \dot{x}_{i_h}^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial \varphi_{i_h}} \right) = \beta_h b_h i_v s_h - p^* \gamma_h i_h - \alpha_h i_h - \mu_h i_h \\ \dot{x}_{r_h}^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial \varphi_{r_h}} \right) = p^* \gamma_h i_h - \mu_h r_h - \theta_h r_h \\ \dot{x}_{s_v}^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial \varphi_{s_v}} \right) = (1-u^*)\mu_v - \beta_v b_v i_h s_v - \mu_v s_v \\ \dot{x}_{i_v}^* &= \left(\frac{\partial H^*}{\partial \varphi_{i_v}} \right) = \beta_v b_v i_h s_v - \mu_v i_v \end{aligned} \quad (25)$$

b. Persamaan *Co-state*

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{s_h}^* &= - \left(\frac{\partial H^*}{\partial s_h} \right) = (\varphi_{s_h} - \varphi_{i_h}) \beta_h b_h i_v + \varphi_{s_h} \mu_h \\ \dot{\varphi}_{i_h}^* &= - \left(\frac{\partial H^*}{\partial i_h} \right) = -A_1 + (\varphi_{i_h} - \varphi_{r_h}) p^* \gamma_h \\ &\quad + (\varphi_{s_v} - \varphi_{i_v}) \beta_v b_v s_v \\ &\quad + \varphi_{i_h} (\alpha_h + \mu_h) \\ \dot{\varphi}_{r_h}^* &= - \left(\frac{\partial H^*}{\partial r_h} \right) = (\varphi_{r_h} - \varphi_{s_h}) \theta_h + \varphi_{r_h} \mu_h \\ \dot{\varphi}_{s_v}^* &= - \left(\frac{\partial H^*}{\partial s_v} \right) = -A_2 + (\varphi_{s_v} - \varphi_{i_v}) \beta_v b_v i_h \\ &\quad + \varphi_{s_v} \mu_v \\ \dot{\varphi}_{i_v}^* &= - \left(\frac{\partial H^*}{\partial i_v} \right) = (\varphi_{s_h} - \varphi_{i_h}) \beta_h b_h s_h + \varphi_{i_v} \mu_v \end{aligned} \quad (26)$$

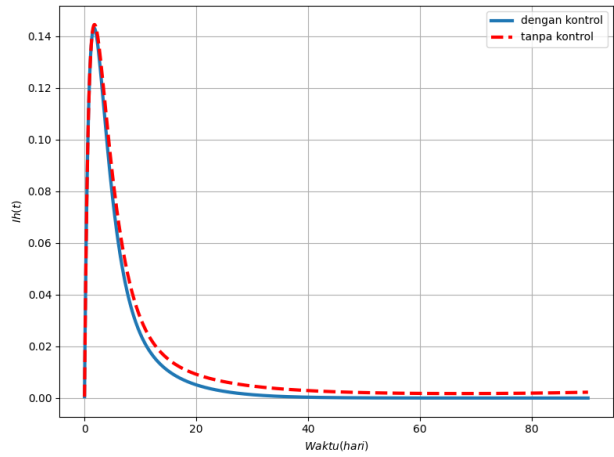
SIMULASI NUMERIK

Persamaan *state* (25) dan *co-state* (26) diselesaikan secara numerik menggunakan metode *forward-backward* Runge-Kutta orde empat. Tujuan dilakukan simulasi numerik, yaitu untuk mengetahui pengaruh pelaksanaan program 3M dan pemberian pengobatan pada masing-masing populasi terhadap waktu. Simulasi numerik menggunakan bobot individu $A_1 = 0,2$ dan $A_2 = 0,002$ dalam meminimumkan setiap populasi yang terinfeksi, kemudian $m_1 = 0,00003$ adalah bobot biaya untuk program 3M dan $m_2 = 0,004$ merupakan bobot biaya pengobatan untuk manusia terinfeksi. Hasil simulasi kontrol optimal model epidemik penyakit DBD dengan program 3M dan pengobatan digambarkan pada grafik berikut.



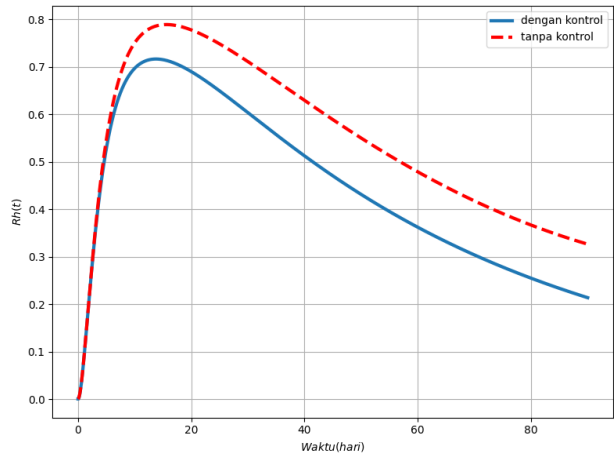
Gambar 5. Grafik Simulasi Manusia Rentan atau *Susceptible Host*

Pada Gambar 5 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan manusia yang rentan sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi manusia yang rentan akan meningkat dilihat dari model epidemik penyakit DBD.



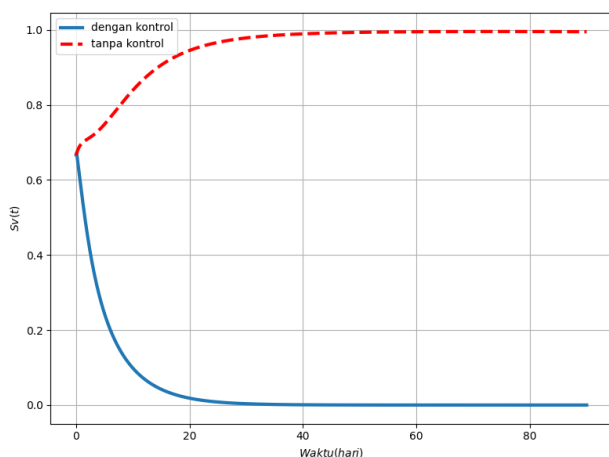
Gambar 6. Grafik Simulasi Manusia Terinfeksi atau *Infected Host*

Pada Gambar 6 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan manusia yang terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi manusia yang terinfeksi mengalami penurunan.



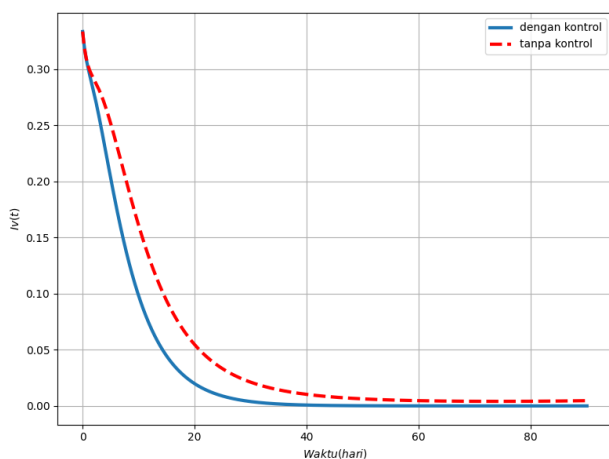
Gambar 7. Grafik Simulasi Manusia Sembuh atau *Recovered Host*

Pada Gambar 7 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan manusia yang sembuh sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi manusia yang sembuh juga akan menurun dikarenakan penurunan populasi yang terinfeksi.



Gambar 8. Grafik Simulasi Nyamuk Rentan atau *Susceptible Vector*

Pada Gambar 8 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan nyamuk yang rentan sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi nyamuk yang rentan akan mengalami penurunan.



Gambar 9. Grafik Simulasi Nyamuk Terinfeksi atau *Infected Vector*

Pada Gambar 9 menunjukkan bahwa terlihat perbedaan nyamuk yang terinfeksi sebelum dan sesudah diberikan kontrol dimana setelah diberikan kontrol maka populasi nyamuk yang terinfeksi mengalami penurunan.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi model epidemik penyakit demam berdarah *dengue* di Provinsi Nusa Tenggara Barat setelah diberikan kontrol optimal diperoleh bahwa pemberian kontrol berupa program 3M dan pengobatan efektif dapat meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi dengan tetap

mengendalikan biaya kontrol yang diberikan selama 90 hari yang mengakibatkan penyakit DBD dapat diturunkan.

SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya, yaitu penulis dapat menambahkan atau memodifikasi kontrol yang berpengaruh langsung terhadap kompartemennya. Misalnya, kontrol dapat ditambahkan dengan kampanye program 3M pada kompartemen manusia yang rentan terkena virus *dengue* maupun penyemprotan insektisida untuk meminimalkan jumlah nyamuk yang rentan virus *dengue* sesuai dengan keadaan yang terjadi di Provinsi Nusa Tenggara Barat. Dengan demikian, diharapkan upaya kontrol yang diterapkan memiliki efektivitas yang tinggi sehingga individu yang rentan maupun terinfeksi virus *dengue* dapat berkurang dan penyakit DBD dapat lebih terkendali.

DAFTAR PUSTAKA

- Afnani, L.H.N. (2021). Desain Kendali Optimal pada Model Penyebaran Penyakit Difteri Menggunakan Metode Prinsip Minimum Pontryagin. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya
- Aji, R., Agussalim, & Yamisdata, G. (2022). Model Alat Ovitrap Pengendali Nyamuk Keperawatan Komunitas Efektifitas Modifikasi Ovitrap Perangkat Nyamuk. *Zifatama Jawara*. Sidoarjo.
- Al Aziim, S.A. & Arif, D.K. (2022). Kontrol Optimal Penyebaran Penyakit Demam Berdarah dengan Pengaruh Penyemprotan Insektisida dan Pengobatan. *Jurnal Sains dan Seni ITS*, 11(2), A7-A12
- Andiraja, N., Basriati, S., Safitri, E., Rahmadeni, R., & Martino, A. (2022). Optimal Control of Vaccination for *Dengue* Fever in SIR Model. *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, 7(2), 106-113
- Badan Pusat Statistik Provinsi Nusa Tenggara Barat. (2023). Jumlah Penduduk Kabupaten/Kota (Jiwa) Provinsi Nusa Tenggara Barat Tahun 2018-2023, website: <https://ntb.bps.go.id/id/statistics-table/2/MjkiMg==/penduduk-kabupaten-kota.html>

- Dinas Kesehatan Provinsi NTB. (2021). Mengenal Nyamuk Penular Demam Berdarah, website: <https://dinkes.ntbprov.go.id/artikel/mengenal-nyamuk-penular-demam-berdarah/>
- Dinas Kesehatan Provinsi Nusa Tenggara Barat. Profil Kesehatan Provinsi Nusa Tenggara Barat Tahun 2018–2023. Mataram, website: <https://dinkes.ntbprov.go.id/profil-kesehatan/>
- Hamka, M., Sani, A., & Cahyono, E. (2023). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Corona Virus Disease (2019) dengan Model SIS: Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Corona. *Jurnal Matematika Komputasi dan Statistika*, 3(1), 263-270
- Hardiansyah H, M. (2023). Kontrol Optimal Model Dinamika Populasi Penderita Diabetes Melalui Empat Pilar Penatalaksanaan Diabetes serta Pengobatan Komplikasi. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Hasanuddin. Makassar
- Imro'ah, S., Fitria, D., & Hasanatuludhhiyah, N. (2022). Membangun Kesadaran Cegah DBD dengan Sosialisasi, Pelatihan Jumantik, dan Pemberantasan Sarang Nyamuk di Desa Candirejo. Blitar. *Jurnal Layanan Masyarakat*, 6(1), 119-128
- Kemendes Ditjen P2P Dit P2PM. (2024). Info DBD Sampai dengan Minggu ke 17, website: <https://p2pm.kemkes.go.id/publikasi/infografis/info-dbd-sampai-dengan-minggu-ke-17>
- Kementerian PPN/Bappenas. (2020). Pedoman Teknis Penyusunan Rencana Aksi - Edisi II Tujuan Pembangunan Berkelanjutan/ Sustainable Development Goals, website: <https://sdgs.bappenas.go.id/website/wp-content/uploads/2023/11/Buku-Pedoman-Rencana-Aksi-SDGs-Edisi-2.pdf>
- Kemendes RI dan Gerakan Masyarakat Hidup Sehat. (2021). Data DBD Indonesia, website: https://p2pm.kemkes.go.id/storage/publikasi/media/file_1619447946.pdf
- Lestari, T.I., Kartono, K., & Tjahjana, R. (2015). Strategi Kontrol Optimal dan Solusi Numerik untuk Epidemik DBD pada Populasi Manusia dan Vektor. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Diponegoro. Semarang, 12 September 2015
- Nisa, S., Irwan, I., & Syata, I. (2024). Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 Model Penyebaran Demam Berdarah *Dengue* di Kota Makassar, Al-Aqlu: *Jurnal Matematika*, 2(1), 52-61. <https://jurnal.yalamqa.com/index.php/aqlu>
- Novita, N. E. (2018). Analisis Perilaku Sistem dan Pengendalian Optimal Model Pengobatan Penyakit Kanker dengan Mengombinasikan *Cryosurgery* dan Imunoterapi. Skripsi. Departemen Matematika Fakultas Matematika. Komputasi dan Sains Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya
- Olsder, G.J., Woude, J.W., Maks, J.G., & Jeltsema, D. (2011). *Mathematical System Theory Fourth Edition*. VSSD. Netherlands
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd, Springer. New York
- Putri, N.A. (2020). Desain Kendali Optimal pada Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya
- Subiono. (2013). *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya
- Wulandari, Y. (2022). Kontrol Optimal pada Model Epidemik SEIR Penyakit Demam Berdarah. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Pekanbaru