

ANALISIS TRAVELLING WAVE PADA MODEL DETERMINISTIK WABAH MONKEYPOX MENGGUNAKAN METODE CRANK- NICHOLSON

Elyin Fitrawati

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.
Jl. Majapahit No.62, Gomong, Kec. Selaparang, Kota Mataram, Nusa Tenggara Bar. 83115, Indonesia.
email: elyinfitrawati@gmail.com.

Nuzla Af'idatur Robbaniyyah

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.
Jl. Majapahit No.62, Gomong, Kec. Selaparang, Kota Mataram, Nusa Tenggara Bar. 83115, Indonesia.
email: nuzla@unram.ac.id

Muhammad Rijal Alfian

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram.
Jl. Majapahit No.62, Gomong, Kec. Selaparang, Kota Mataram, Nusa Tenggara Bar. 83115, Indonesia.
email: rijal_alfian@unram.ac.id

Abstrak

Masalah kesehatan hingga saat ini masih menjadi permasalahan global yang menjadi salah satu fokus dalam tujuan berkelanjutan yang dikenal sebagai SDGs. Monkeypox atau biasa disebut cacar monyet merupakan salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh *orthopoxvirus*. Penyakit ini pertama kali ditemukan pada tahun 1970 dan kembali merebak ke berbagai negara sejak tahun 2022 dengan munculnya cluster baru yang lebih berbahaya. Disebabkan kekhawatiran akan adanya penyebaran yang terus meluas dan tak terkendali seperti Covid-19, pada penelitian ini dilakukan analisis *travelling wave* pada model deterministik penyebaran monkeypox pada manusia dengan metode Crank-Nicholson. Persamaan difusi ditambahkan ke dalam model sehingga membentuk persamaan reaksi difusi yang akan diselesaikan untuk memperoleh solusi berupa *travelling wave*. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh hasil berupa kecepatan *travelling wave* monkeypox pada kompartemen terpapar dan terinfeksi di sekitar titik tetap bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan hasil simulasi menggunakan metode Crank-Nicholson diperoleh kesimpulan bahwa pola yang terbentuk menggambarkan wabah lokal yang bersifat sementara, tidak berkembang menjadi pandemi besar dan cenderung mereda setelah menyebar ke area tertentu.

Kata Kunci: Crank-Nicholson, Monkeypox, Orthopoxvirus, Persamaan difusi, Sustainable Development Goals, *Travelling wave*

Abstract

Health issues are still a global problem that is one of the focuses in the sustainable goals known as SDGs. Monkeypox or commonly called monkey pox is an infectious disease caused by *orthopoxvirus*. This disease was first discovered in 1970 and has returned to various countries since 2022 with the emergence of new, more dangerous clusters. Due to concerns about the widespread and uncontrollable spread of Covid-19, in this study, a traveling wave analysis was carried out on a deterministic model of the spread of monkeypox in humans using the Crank- Nicholson method. The diffusion equation is added to the model to form a diffusion reaction equation that will be solved to obtain a traveling wave solution. Based on the research that has been done, the results are obtained in the form of monkeypox traveling wave speed in the exposed and infected compartments around the disease-free and endemic fixed points. Based on the simulation results using the Crank-Nicholson method, it is concluded that the pattern formed describes a local outbreak that is temporary, does not develop into a large pandemic and tends to subside after spreading to a certain area..

Keywords: Crank-Nicholson, Monkeypox, Orthopoxvirus, Diffusion equation, Sustainable Development Goals, *Travelling wave*

PENDAHULUAN

Masalah kesehatan masih menjadi salah satu tantangan utama yang dihadapi masyarakat global

hingga saat ini. Akhir-akhir ini kita sering mendengar mengenai adanya wabah *monkeypox* yang kembali menjangkit dengan munculnya *cluster* baru. *Monkeypox* atau lebih dikenal dengan nama cacar

monyet adalah penyakit zoonosis yang menyebabkan ruam dan demam pada manusia yang mirip dengan cacar. Penyakit ini pertama kali menginfeksi manusia pada tahun 1970 di Republik Demokratik Kongo, Afrika. Penyakit ini disebabkan oleh virus *monkeypox* dari genus *Orthopoxvirus* (World Health Organization, 2018). *Monkeypox* bisa ditularkan dari hewan ke manusia dan dari manusia ke manusia yang menyebabkan pembengkakan kelenjar getah bening yang parah, terutama di leher, ketiak, dan selangkangan (Susanto et al., 2023). Tanda-tanda klinis *monkeypox* pada manusia antara lain adanya ruam pada kulit (lesi), demam, menggigil, sakit kepala, sakit tenggorokan, sakit punggung, mual, muntah, dan batuk. Ruam berkembang mulai dari bintik merah seperti cacar, lepuh berisi cairan bening, lepuh berisi nanah, kemudian mengeras lalu rontok (Spickler, 2020). Penyakit ini dianggap berpotensi menimbulkan masalah di luar wilayah Afrika (Hutson, et al., 2009). Ini dibuktikan dengan adanya penemuan kasus di negara lain. Berdasarkan laporan WHO, jumlah kasus *monkeypox* meningkat secara global, sebanyak 110 negara telah teridentifikasi terinfeksi *monkeypox*. The Centers for Disease Control and Prevention (CDC) melaporkan terdapat lebih dari 85.716 kasus di 110 negara, dengan 83.511 kasus diantaranya terjadi di 103 negara yang belum pernah melaporkan adanya temuan kasus *monkeypox* termasuk Indonesia (Prah et al., 2023). Berdasarkan data dari kementerian Kesehatan Republik Indonesia, jumlah kasus terkonfirmasi *monkeypox* hingga September 2024 sebanyak 88 kasus sejak konfirmasi pertama pada Agustus 2022. Meskipun demikian, pemerintah telah menetapkan *monkeypox* sebagai penyakit *emerging* tertentu yang berpotensi menimbulkan wabah. Hal ini sesuai dengan Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Tahun 2022. Di sisi lain, pada 14 Agustus 2024, WHO kembali menetapkan *monkeypox* sebagai *Public Health Emergency of International Concern* disebabkan terjadi peningkatan kasus *monkeypox* pada Juni- Juli 2024 di wilayah Afrika dan beberapa negara sekitar, serta munculnya *clade* baru virus *monkeypox* (Caloh, 2024).

Seiring berkembangnya zaman masyarakat semakin sadar akan pentingnya kesehatan. Terlebih setelah adanya wabah pandemi covid 19 beberapa tahun belakangan yang banyak memakan korban jiwa. Tentunya kita tidak menginginkan hal serupa terulang kembali dengan adanya gelombang

penyebaran (*travelling wave*) *monkeypox* secara masif. *Travelling wave* adalah gelombang yang bergerak tanpa mengubah bentuk hanya bergeser seiring waktu dengan kecepatan c (Murray, 2002). Beberapa penelitian sebelumnya mengenai *travelling wave* dan *monkeypox* antara lain, pada tahun 2021 Euchalypta, et al melakukan penelitian mengenai eksistensi *travelling wave* pada model SIR penyebaran penyakit covid-19 dengan menggunakan persamaan difusi. Selanjutnya Qomarudin et al (2020) meneliti mengenai “Analisis Kestabilan dan *Travelling wave* pada Model Penyebaran Virus Ebola” dengan membagi populasi menjadi kompartemen S, E, I, dan R. Berdasarkan penelitian, diperoleh kecepatan minimum pada kompartemen E, dan I di titik bebas penyakit dan titik endemik. Salah satu metode yang bisa digunakan untuk mensimulasikan *travelling wave* adalah metode Crank-Nicholson yang menggabungkan skema beda hingga implisit dengan eksplisit (Chapra & Canale, 2015). Laili dan Kusumastuti (2014) melakukan penelitian mengenai keakuratan solusi pada persamaan difusi menggunakan skema Crank-Nicholson. Dari hasil penelitian yang dilakukan diperoleh kesimpulan bahwa solusi yang dihasilkan mendekati solusi analitiknya. Oleh karena itu, sebagai langkah antisipasi jika di waktu mendatang penyebaran semakin meluas pada penelitian ini melanjutkan penelitian dari Prah et al tahun 2023 mengenai kontrol optimal terhadap penularan virus *monkeypox* menggunakan metode maksimum pontryagin. Dalam penelitian ini akan dilakukan analisis gelombang penyebaran (*travelling wave*) wabah *monkeypox* menggunakan model deterministik pada populasi manusia dengan menambahkan persamaan difusi untuk mengetahui kecepatan minimum penyebarannya. Selanjutnya, akan dilakukan simulasi numerik menggunakan metode beda hingga skema Crank-Nicholson untuk melihat dinamika penyebaran termasuk pola dan arah penyebaran.

KAJIAN TEORI

1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih fungsi sebarang (variabel terikat) terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross S. L., 1984). Berdasarkan jumlah

variabel bebasnya, persamaaan diferensial dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang memuat satu variabel bebas. Secara umum PDB orde n memiliki bentuk (Ross S. L., 1984)

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right] = 0. \quad (1)$$

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas (Ross S. L., 1984). Secara umum PDP memiliki bentuk:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^n}, \frac{\partial^n u}{\partial x_2^n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_n^n}\right) = 0. \quad (2)$$

Berdasarkan linieritasnya PDB dibedakan menjadi dua yakni PDB linier dan nonlinier. Beberapa kriteria PD dikatakan linier, yakni variabel terikat dan atau turunannya berpangkat satu, tidak ada perkalian dengan variabel terikat dan atau turunannya, variabel terikat dan atau turunannya tidak hadir dalam bentuk fungsi transenden (Ross S. L., 1984). Seringkali ditemukan kesulitan dalam menyelesaikan sebuah persamaan nonlinier karena persamaannya yang lebih kompleks, sehingga diperlukan sebuah metode yang bisa digunakan untuk menyederhanakan persamaan nonlinier. Metode yang bisa digunakan salah satunya adalah dengan linierisasi, yakni proses mendekati persamaan nonlinier dengan persamaan linier. Sebuah sistem

$$\dot{x} = Ax \quad (3)$$

disebut linierisasi atau pelinieran dari sistem $\dot{x} = f(x)$ pada titik x_0 dengan

$A = Df(x_0)$ dan fungsi $Ax = Df(x_0)x$ disebut bagian linier dari f di titik x_0 (Perko, 2001).

Dalam persamaan (3), A disebut matriks Jacobian yakni sebuah matriks yang elemen-elemennya adalah derivatif pertama dari sistem $\dot{x} = f(x)$.

2. Sistem Dinamik

Secara umum sistem dinamik adalah pemodelan sebuah permasalahan nyata secara matematis menggunakan persamaan diferensial yang mengandung parameter yang saling berkaitan (Sinaga, Kartika, & Nasution, 2021). Secara matematis sistem dinamik didefinisikan sebagai sebuah fungsi $\varphi(t, x)$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$ dan $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, yang menggambarkan bagaimana $x \in E$ bergerak seiring waktu.

Dalam sistem dinamik dikenal sebuah titik yang nilainya tidak berubah seiring berjalannya waktu. Titik ini disebut titik ekuilibrium atau titik tetap. Titik $x_0 \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium atau titik kritis dari sistem yang dinyatakan dengan persamaan diferensial

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

jika memenuhi $f(x_0) = 0$ (Perko, 2001).

3. Persamaan Difusi

Difusi adalah proses di mana materi diangkut dari satu bagian sistem ke bagian lain sebagai hasil dari gerakan molekul acak. Difusi bisa dipahami dengan konsep gerak acak (*random walk*), di mana partikel bergerak secara acak ke segala arah. Misalnya, jika kita memiliki dua daerah dengan konsentrasi zat yang berbeda, zat tersebut akan bergerak menuju daerah dengan konsentrasi lebih rendah hingga tercapai kesetimbangan (Murray, 2002). Hukum difusi pertama Fick menyatakan bahwa laju transfer zat melalui unit area sebanding dengan gradien konsentrasi. Gradien konsentrasi adalah perubahan konsentrasi zat per satuan panjang. Dalam istilah matematis, gradien konsentrasi diukur dengan cara menghitung selisih konsentrasi antara dua titik dalam ruang, dibagi dengan jarak antara titik-titik tersebut. Gradien ini memberikan informasi tentang arah dan laju perubahan konsentrasi zat. Gradien konsentrasi dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Gradien Konsentrasi} = \frac{du}{dx} \quad (5)$$

sehingga hukum difusi pertama Fick secara matematis adalah

$$F = -D \frac{du}{dx}. \quad (6)$$

- F adalah laju transfer zat per unit area

- D adalah koefisien difusi yang memberikan informasi tentang seberapa cepat partikel dapat menyebar melalui medium.
- u adalah konsentrasi zat,
- x adalah koordinat ruang yang diukur normal terhadap area transfer (Crank, 1975).

Persamaan diferensial fundamental untuk difusi dalam medium isotropik (di mana sifat difusi sama dalam semua arah) dapat diturunkan dari hukum Fick. Dengan mempertimbangkan elemen volume, kita dapat menuliskan perubahan konsentrasi dalam elemen tersebut sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

adalah persamaan difusi satu dimensi, yaitu jika ada gradien konsentrasi hanya di sepanjang sumbu x yang menggambarkan bagaimana konsentrasi zat berubah seiring waktu, dipengaruhi oleh distribusi konsentrasi di sekitarnya (Crank, 1975).

4. Travelling wave

Disebabkan difusi sederhana tidak efektif untuk memodelkan banyak proses biologis maka diperkenalkanlah reaksi kimia ke dalam persamaan difusi. Reaksi kimia ini memungkinkan zat untuk bereaksi secara lokal dan mempercepat perubahan konsentrasi di tempat, sehingga persamaan (7) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (8)$$

yang disebut persamaan reaksi-difusi. Solusi yang muncul dari persamaan (8) inilah yang selanjutnya disebut sebagai gelombang berjalan (*travelling wave*).

Gelombang berjalan (*travelling wave*) adalah gelombang yang bergerak tanpa mengubah bentuk hanya bergeser sepanjang sumbu x seiring waktu, dan gelombang bergerak dengan kecepatan c . Secara matematis dinyatakan sebagai

$$u(x, t) = u(x - ct) = u(z), z = x - ct. \quad (9)$$

Jika $x - ct$ adalah konstan, maka u juga tetap konstan. Ini juga berarti sistem koordinat bergerak dengan kecepatan c . Kecepatan gelombang c biasanya perlu ditentukan sebagai bagian dari solusi. Variabel dependen z sering disebut sebagai variabel gelombang.

Ketika mencari solusi *travelling wave* untuk persamaan atau sistem persamaan dalam x dan t (seperti dalam Persamaan (7)), turunan $\frac{\partial u}{\partial t}$ dan $\frac{\partial u}{\partial x}$ menjadi turunan biasa terhadap z , sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{du}{dz} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dz}. \quad (10)$$

Jadi persamaan diferensial parsial dalam x dan t menjadi persamaan diferensial biasa dalam z (Murray, 2002).

Dalam terminologi sistem dinamis, solusi *travelling wave* dari model menghubungkan titik tetap pelana tidak stabil ke titik tetap stabil. Untuk mencari kecepatan *travelling wave*, perlu dipastikan bahwa matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium semuanya memiliki nilai eigen bernilai riil dan setidaknya terdapat satu nilai eigen bernilai riil positif, sehingga solusi dari sistem menjauh dari titik keseimbangan bebas penyakit dengan tidak terisolasi (Murray, 2002). Untuk memastikan solusi *travelling wave* dari model menghubungkan dua keadaan kesetimbangan (*steady state*), maka solusi $u(z)$ harus memenuhi

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} u(z) = 0 \quad (11)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} u(z) = 1 \quad (12)$$

dalam konteks penyebaran penyakit $u = 0$ (titik tetap bebas penyakit) dan $u = 1$ (titik tetap endemik). Di titik $u = 0$, sistem dalam keadaan tidak stabil sehingga solusi dari sistem menjauhi titik tersebut yang menandakan jika sistem di sekitar titik tersebut diganggu akan memicu terbentuknya *travelling wave* sedangkan di titik $u = 1$ sistem dalam keadaan stabil. sehingga terdapat solusi *travelling wave* dengan kecepatan c (Murray J. , 2002). c adalah kecepatan minimal *travelling wave*, secara biologis penyakit dapat menyebar dengan kecepatan c , namun penyakit tidak dapat menyebar jika kecepatannya lebih kecil dari c (Li, Tong Li, & Lin, 2015). Agar solusi *travelling wave* memiliki arti nyata maka harus memenuhi syarat (11) dan $u(z) > 0$, sehingga jika

$u(z) = e^{\lambda z}$ adalah solusi dari persamaan (9) maka syarat di tersebut akan terpenuhi jika dan hanya jika

- $\lambda < 0$
- λ bilangan riil (Murray J. , 2002).

5. Metode Crank-Nicholson

Metode Crank-Nicholson adalah teknik numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, terutama persamaan parabolik seperti persamaan difusi. Metode ini menggunakan skema beda hingga semi-implisit yang akurat hingga ordo kedua dalam waktu dan ruang. Langkah-langkah dalam metode ini melibatkan pendekatan turunan pertama terhadap waktu dan turunan kedua terhadap ruang di titik tengah selang waktu. Pendekatan turunan pertama terhadap waktu diambil pada titik tengah selang waktu, yakni pada $t^{l+\frac{1}{2}}$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{T^{l+\frac{1}{2}} - T^l}{\Delta t} \quad (13)$$

Sedangkan turunan kedua terhadap ruang dihitung dengan merata-ratakan pendekatan beda pada awal (t^l) dan akhir (t^{l+1}) dari increment waktu, sehingga persamaan diformulasikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{(\Delta x)^2} \right]. \quad (14)$$

6. Monkeypox

Monkeypox atau cacar monyet adalah penyakit virus zoonosis yang endemik di Afrika bagian Barat dan Afrika Tengah yang bersirkulasi pada hewan liar dan muncul secara berkala menyerang manusia, primata bukan manusia, dan spesies lainnya terutama hewan pengerat. Monkeypox disebabkan oleh infeksi virus cacar monyet anggota genus Orthopoxvirus dalam keluarga Poxviridae (Spickler, 2020). Ada dua clade berbeda dari virus ini yakni clade Afrika Barat (clade II) dengan tingkat kematian pada individu yang tidak divaksinasi kurang dari 1% dan clade Afrika Tengah atau Congo Basin (clade I) dengan tingkat kematian hingga 11% (World Health Organization, 2018). Virus monkeypox memiliki gejala yang mirip dengan penyakit cacar dan cacar air. Penyakit cacar (smallpox) dan cacar air (chickenpox) ditularkan dari orang ke orang hanya dengan gejala seperti gatal, kemerahan, dan lecet pada kulit. Sementara itu, kasus monkeypox yang ditularkan dari hewan ke manusia dan dari manusia ke manusia menyebabkan pembengkakan kelenjar

getah bening yang parah, terutama di leher, ketiak, dan selangkangan (Susanto et al., 2023).

Masa inkubasi virus pada manusia berdasarkan yang dilaporkan berkisar antara 7 hingga 24 hari dengan rata-rata 12 hari di Afrika dan 14,5 di Amerika Serikat. Tanda-tanda klinis *monkeypox* pada manusia antara lain adanya ruam pada kulit (lesi), demam, menggigil, sakit kepala, sakit tenggorokan, sakit punggung, mual, muntah, dan batuk. Ruam berkembang mulai dari bintik merah seperti cacar, lepuh berisi cairan bening, lepuh berisi nanah, kemudian mengeras lalu rontok (Spickler, 2020). *Monkeypox* bisa ditularkan melalui kontak dekat dengan penderita seperti bersentuhan kulit, darah, cairan tubuh, hubungan seksual, droplet dan kontak fisik lainnya (Caloh, 2024). Hingga saat ini vaksin khusus *monkeypox* masih dalam tahap uji klinis, sehingga pencegahan dilakukan dengan memberikan vaksinasi cacar. Akan tetapi, pemberian vaksin hanya diperuntukkan bagi orang-orang yang memiliki resiko tinggi terpapar *monkeypox* dan orang-orang yang sudah terpapar saja. Vaksin tidak bisa diberikan kepada orang dengan gangguan kekebalan dan vaksin juga belum bisa diberikan secara massal disebabkan biaya dan risiko efek samping yang serius (Spickler, 2020)

METODE

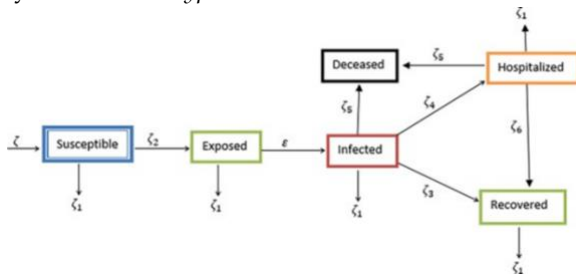
Penelitian ini merupakan penelitian terapan menggunakan model deterministik penyebaran *monkeypox* yang diperoleh dari penelitian Prah et al., 2023 yang terbagi menjadi enam kompartemen, yakni *susceptible* (*S*), *exposed* (*E*), *infected* (*I*), *recovery* (*R*), dan *hospitalized* (*Q*) dan *individu yang meninggal karena penyakit* (*D*) dengan populasi manusia. Total populasi dirumuskan dengan $N(t) = S + E + I + Q + R + D$, dengan asumsi berikut:

- Tidak ada kekebalan alami dalam populasi
- Populasi bersifat homogen
- Penularan virus terjadi melalui kontak langsung dengan orang yang terinfeksi
- Tidak ada mutasi virus
- Tidak ada infeksi ulang
- Laju kematian akibat penyakit, laju pemulihan alami, serta laju pemulihan di rumah sakit diasumsikan konstan.

Dari asumsi-asumsi di atas diperoleh model berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \zeta - \zeta_2 \frac{IS}{N} - \zeta_1 S \\
 \frac{dE}{dt} &= \zeta_2 \frac{IS}{N} - (\varepsilon + \zeta_1) E \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \zeta_4 I - (\zeta_6 + \zeta_5 + \zeta_1) Q \\
 \frac{dR}{dt} &= \zeta_6 Q + \zeta_3 I - \zeta_1 R \\
 \frac{dD}{dt} &= \zeta_5 (I + Q).
 \end{aligned} \quad (15)$$

Berikut disajikan diagram kompartemen model penyebaran *monkeypox* di atas.



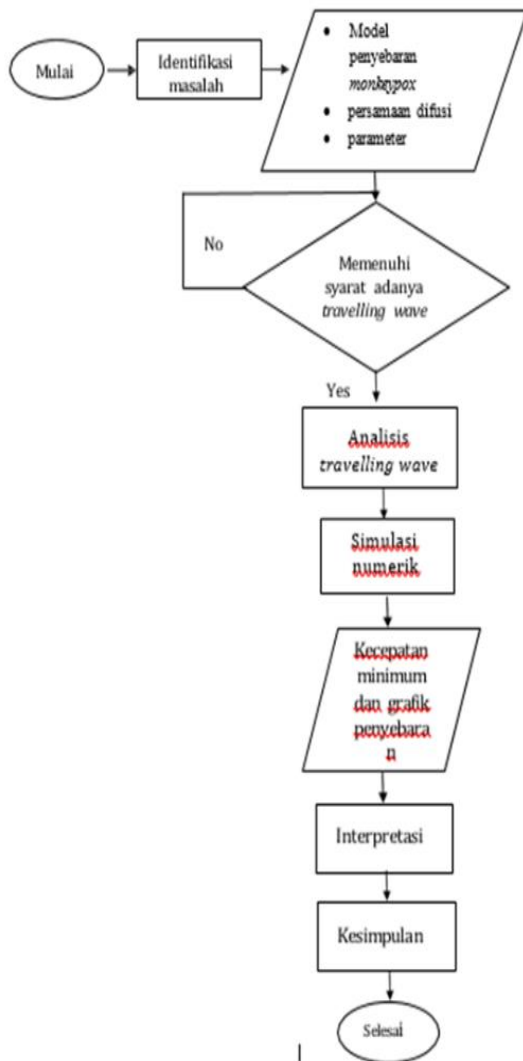
Gambar 1. Diagram kompartemen model penyebaran monkeypox

Nilai parameter model yang digunakan diperoleh dari penelitian Peter et al, 2023. Sementara nilai parameter insiden kontak antara orang yang terinfeksi dan orang yang rentan diperoleh dengan trial and error. Parameter model disajikan dalam tabel 1 berikut:

Tabel 1. Parameter model

Parameter	Keterangan	Nilai
ζ	Perekrutan orang-orang yang rentan	65.850
ζ_1	Tingkat kematian alami	0,000303
ζ_2	Insiden kontak antara orang yang terinfeksi dan orang yang rentan	0,65
ζ_3	Frekuensi pemulihan yang disebabkan oleh kekebalan alami pada orang yang sakit	0,088366
ζ_4	Kemungkinan orang yang terinfeksi menjadi sangat sakit	0,5
ζ_5	Kematian akibat penyakit yang disebabkan oleh <i>monkeypox</i>	0,003286
ζ_6	Kecepatan pemulihan bagi orang yang berada dalam kondisi kritis	0,036246
ε	Frekuensi orang yang terpapar tertular infeksi	0,016744
N	Total populasi	214.028.300

Alur dari penelitian yang akan dilakukan disajikan dalam diagram alir berikut:



Gambar 2. Alur penelitian

Langkah- langkah penelitian tersebut bisa dijelaskan sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah

Tahapan ini bertujuan untuk merumuskan masalah yang akan menjadi fokus penelitian. Hal ini dilakukan untuk menentukan masalah-masalah apa saja yang terdapat pada objek penelitian dan memberikan batasan pada permasalahan yang akan diteliti termasuk juga memahami metode yang akan digunakan.

2. Analisis sistem dinamik

Sebelum menganalisis *travelling wave* dari model, akan dilakukan analisis sistem dinamik terlebih dahulu untuk memastikan apakah sistem telah

memenuhi syarat adanya *travelling wave* yakni sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit berada dalam keadaan tidak stabil sementara sistem di sekitar titik tetap endemik berada dalam keadaan stabil untuk memastikan *travelling wave* eksis. Analisis yang dilakukan adalah analisis kestabilan sistem. Kriteria kestabilan sistem didasarkan pada nilai eigen dari sistem yang sudah dilinierisasi.

3. Membangun model *travelling wave* penyebaran penyakit monkeypox

Dari model penyebaran penyakit *monkeypox* oleh Prah et al. dibangun model *travelling wave* dari *monkeypox* dengan menambahkan persamaan difusi sehingga menjadi persamaan reaksi- difusi.

4. Analisis eksistensi *travelling wave*

Solusi dari model *travelling wave* yang sudah dibangun yakni berupa kecepatan minimum penyebaran *monkeypox* yang diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial. Secara biologis penyakit dapat menyebar dengan kecepatan c , namun penyakit tidak dapat menyebar jika kecepatannya lebih kecil dari c (Li et al., 2015).

5. Simulasi numerik

Simulasi dilakukan untuk mengetahui dinamika penyebaran termasuk pola dan arah penyebaran. Simulasi akan dilakukan metode dengan metode Crank- Nicholson menggunakan python.

6. Interpretasi

Setelah melakukan simulasi, pada tahap ini akan dilakukan interpretasi berdasarkan hasil simulasi numerik yang diperoleh.

7. Kesimpulan

Kesimpulan ditarik berdasarkan hasil analisa yang telah dilakukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam terminologi sistem dinamis, solusi *travelling wave* dari model dalam konteks penyebaran menghubungkan dua keadaan kesetimbangan (*steady state*), titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Titik tetap bebas penyakit harus dalam keadaan tidak stabil sehingga solusi dari sistem menjauhi titik tersebut yang menandakan jika sistem di sekitar titik tersebut diganggu akan memicu terbentuknya *travelling wave*, sedangkan di titik tetap endemik sistem harus dalam keadaan stabil, sehingga terdapat solusi *travelling wave* dengan kecepatan c . Dalam mencari kecepatan *travelling*

wave, perlu dipastikan bahwa matriks Jacobian di sekitar titik ekuilibrium semuanya memiliki nilai eigen bernilai riil. Matriks Jacobian dari (15) bisa dinyatakan sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\zeta_2 I}{N} - \zeta_1 & 0 & -\frac{\zeta_2 S}{N} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta_2 I}{N} & -(\varepsilon + \zeta_1) & \frac{\zeta_2 S}{N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_4 & -(\zeta_1 + \zeta_5 + \zeta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_6 & -\zeta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_5 & \zeta_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

a) Kestabilan di titik tetap

Model (15) memiliki titik tetap bebas penyakit $(\frac{\zeta}{\zeta_1}, 0, 0, 0, 0)$ dan titik tetap endemik S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\zeta N}{\zeta_2 I^* + \zeta_1 N}, \\ E^* &= \zeta_2 \frac{I^* S^*}{(\varepsilon + \zeta_1) N}, \\ I^* &= \frac{\varepsilon E^*}{(\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)}, \\ Q^* &= \frac{\zeta_4 I^*}{(\zeta_6 + \zeta_5 + \zeta_1)}, \\ R^* &= \frac{\zeta_6 Q^* + \zeta_3 I^*}{\zeta_1} \end{aligned}$$

Kestabilan di sekitar titik tetap bisa dilihat dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian (16) dengan menyelesaikan persamaan karakteristik berikut

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (17)$$

dengan I adalah matriks identitas. Berdasarkan nilai parameter diperoleh nilai eigen dari titik tetap bebas penyakit adalah $\lambda_1 = -0,000303$, $\lambda_2 = 0.00130$, $\lambda_3 = -0.61030$, $\lambda_4 = -0.039835$, $\lambda_5 = -0,000303$, $\lambda_6 = 0$. Sedangkan di sekitar titik endemik diperoleh nilai eigen $\mu_1 = -0,0003268$, $\mu_2 = -0,0000000143$, $\mu_3 = -0,60900$, $\mu_4 = -0.039835$, $\mu_5 = -0,00030$, $\mu_6 = 0$.

Berdasarkan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, terdapat satu nilai eigen bernilai positif yang menandakan bahwa sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit tidak stabil. Artinya lama-kelamaan akan ada populasi yang tidak bebas terhadap penyakit *monkeypox* atau menjadi endemik. Berdasarkan nilai eigen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$, terdapat satu nilai eigen bernilai nol. Akan tetapi, disebabkan nilai nol berasal dari kompartemen D yang mana kompartemen tersebut tidak memiliki pengaruh signifikan terhadap kompartemen lain (*terminal state*) sehingga tidak memengaruhi kestabilan sistem. Di sisi lain, nilai eigen lainnya bernilai negatif yang menandakan bahwa sistem di sekitar titik tetap endemik stabil.

Artinya lama-kelamaan populasi akan bebas terhadap penyakit *monkeypox*. Disebabkan sistem di sekitar titik tetap bebas penyakit berada dalam keadaan tidak stabil sementara sistem di sekitar titik tetap endemik berada dalam keadaan stabil maka sistem telah memenuhi syarat adanya *travelling wave*.

b) Membangun model *travelling wave*

Langkah awal dalam menganalisis eksistensi *travelling wave* adalah dengan membentuk persamaan *travelling wave* dengan menambahkan persamaan difusi seperti pada persamaan (15) ke dalam model (2) sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \zeta - \zeta_2 \frac{IS}{N} - \zeta_1 S + D_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \zeta_2 \frac{IS}{N} - (\varepsilon + \zeta_1) E + D_E \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \zeta_4 I - (\zeta_6 + \zeta_5 + \zeta_1) Q + D_Q \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \zeta_6 Q + \zeta_3 I - \zeta_1 R + D_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \zeta_5 (I + Q) + D_D \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

c) Analisis *travelling wave*

Penyebaran penyakit *monkeypox* hanya dapat terjadi karena adanya kontak langsung antara individu yang rentan dengan individu terinfeksi, maka dalam penelitian ini solusi dari *travelling wave* yang dicari hanya pada populasi terinfeksi (I). Oleh sebab itu, diperoleh persamaan reaksi- difusi berikut

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (19)$$

Langkah selanjutnya akan diasumsikan bahwa terdapat solusi dari persamaan (19) yang berbentuk z di mana $z(x, t) = x - ct$ sehingga

$$c \frac{\partial I}{\partial z} = \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \quad (20)$$

Persamaan (20) adalah persamaan yang akan dilinearisasi dengan menggunakan titik tetap yang telah didapatkan.

Pertama-tama akan dilakukan linearisasi di sekitar titik tetap dengan mensubstitusi titik tetap bebas penyakit terhadap persamaan (20), sehingga persamaan (20) akan menjadi

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial I}{\partial z} &= \varepsilon \times 0 - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \\ -c \frac{\partial I}{\partial z} &= D_I \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)I \end{aligned} \quad (21)$$

Kemudian dimisalkan $I = e^{\lambda z}$ merupakan penyelesaian dari persamaan (21) sedemikian hingga diperoleh

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \lambda e^{\lambda z} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \lambda^2 e^{\lambda z} \quad (23)$$

dengan mensubstitusi persamaan (22),(23) pada persamaan (21) maka persamaan (21) menjadi

$$\begin{aligned} -c \lambda e^{\lambda z} &= D_I \lambda^2 e^{\lambda z} - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) e^{\lambda z} \\ 0 &= D_I \lambda^2 e^{\lambda z} + c \lambda e^{\lambda z} - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5) e^{\lambda z} \\ 0 &= e^{\lambda z} (D_I \lambda^2 + c \lambda - \zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5) \end{aligned} \quad (24)$$

karena $e^{\lambda z} \neq 0$ maka $D_I \lambda^2 + c \lambda - \zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5 = 0$.

Selanjutnya, kecepatan minimal akan dicari berdasarkan persamaan berikut:

$$f(\lambda) = D_I \lambda^2 + c \lambda - \zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5 = 0 \quad (25)$$

Titik kritis pada persamaan (12) bisa diperoleh dengan memberikan $f'(\lambda) = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= 2D_I \lambda + c = 0 \\ \lambda &= -\frac{c}{2D_I} \end{aligned} \quad (26)$$

dengan melakukan substitusi nilai λ ke persamaan (13) akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{4D_I} - \zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5 &= 0 \\ \frac{c^2}{4D_I} &= -\zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5 \\ c^2 &= 4D_I(-\zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5) \\ c &= \sqrt{4D_I(-\zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Berdasarkan Persamaan (27) diperoleh kecepatan minimal dari populasi terinfeksi yang akan menghasilkan sebuah *travelling wave* penyebaran penyakit di sekitar titik tetap bebas penyakit adalah

$$c = 2\sqrt{D_I(-\zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_1 - \zeta_5)} \quad (28)$$

Dari persamaan (28) untuk memastikan penyakit bisa menyebar ke daerah baru maka $D_I > 0$ sehingga diperoleh nilai kecepatan berupa bilangan kompleks. Akan tetapi, dalam konteks biologi atau kehidupan nyata hal semacam ini menandakan bahwa solusi *travelling wave* memiliki perilaku osilasi yang sering kali tidak stabil atau tidak relevan dalam aplikasi dunia nyata sehingga tidak ada *travelling wave* nyata yang terbentuk (Murray, 2002). Artinya penyakit tidak menyebar secara spasial. Hal ini kontradiksi dengan syarat adanya *travelling wave* yang sudah terpenuhi sebelumnya. Hal ini disebabkan karena dalam model (2) kita menghilangkan kompartemen terpapar (E) yang menjadi sumber infeksi sehingga hanya ada laju pengurangan dari populasi infeksi yang menyebabkan laju menjadi negatif. Oleh sebab itu, dilakukan analisis *travelling wave* lebih lanjut pada kompartemen terpapar (E) dan terinfeksi (I), sehingga dengan cara serupa diperoleh

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \zeta_2 \frac{IS}{N} - (\varepsilon + \zeta_1)E + D_E \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (29)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Menggunakan langkah yang serupa, diperoleh kecepatan minimal dari populasi terpapar dan terinfeksi yang akan menghasilkan sebuah *travelling wave* penyakit di sekitar titik tetap bebas penyakit adalah

$$c_E = 2\sqrt{\frac{D_E(\zeta_2 k_2 - (\varepsilon + \zeta_1)k_1)}{k_1}}. \quad (31)$$

$$c_I = 2\sqrt{\frac{D_I(\varepsilon k_1 - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)k_2)}{k_2}}. \quad (32)$$

dengan syarat $0,02623 < \frac{k_2}{k_1} < 0,02827$

Pada titik tetap endemik diperoleh kecepatan minimal *travelling wave* penyakit di sekitar titik tetap endemik dari populasi terpapar dan terinfeksi adalah

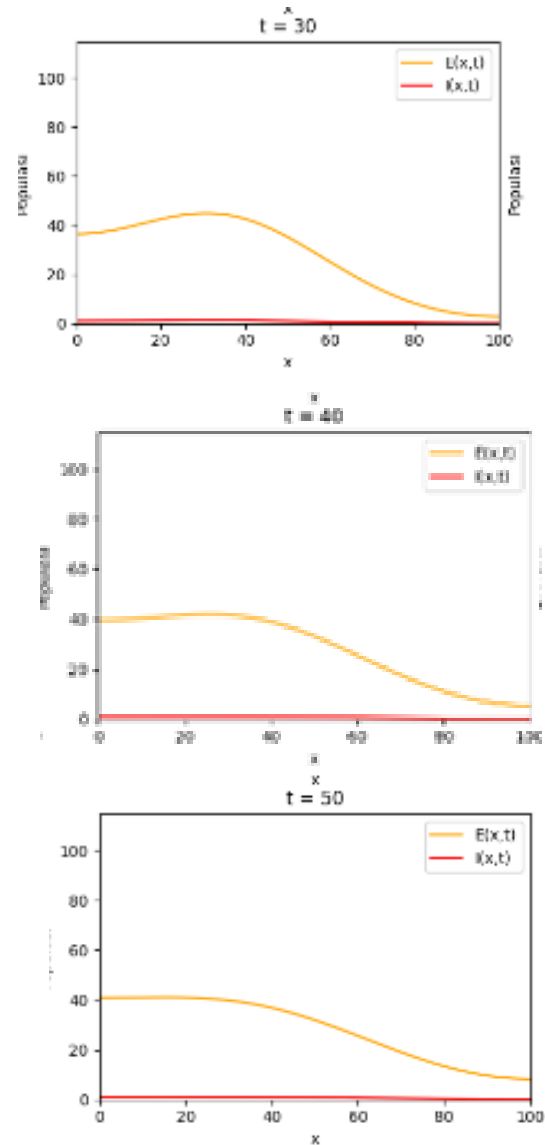
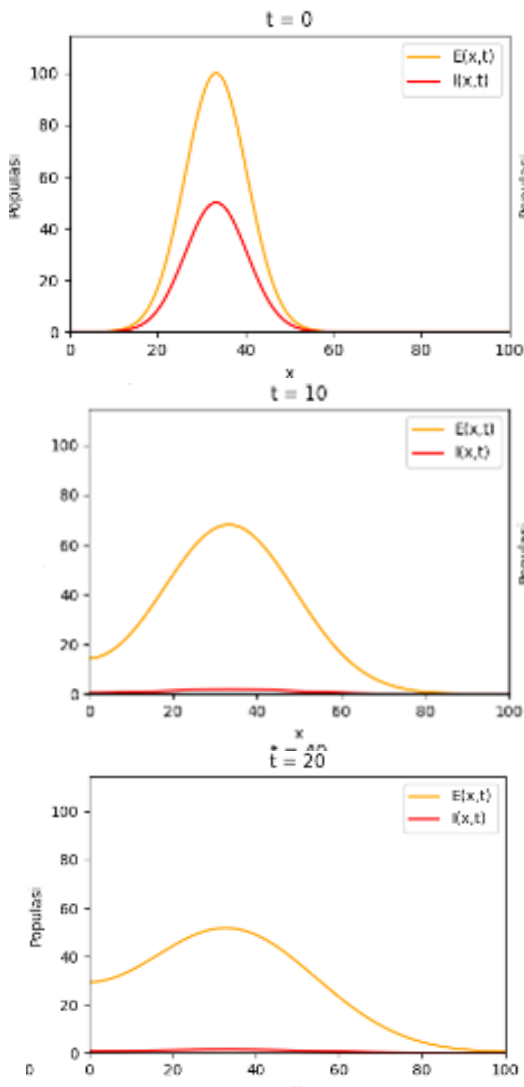
$$c_E = 2\sqrt{D_E(\delta - \varepsilon - \zeta_1)}. \quad (20)$$

$$c_I = 2 \sqrt{\frac{D_I(\varepsilon l_1 - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)l_2)}{l_2}}. \quad (33)$$

dengan syarat $\delta > 0,017074$ dan $\frac{l_2}{l_1} < 0,02623$.

d) Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan metode Crank-Nicholson dengan syarat awal pada saat $t = 0$, populasi E dan I diinisialisasi dengan distribusi Gaussian yang memiliki puncak di $x = \frac{L}{3}$ dengan nilai maksimal untuk E adalah 100 dan untuk I adalah 50, sedangkan syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Neumann $\frac{\partial E}{\partial x}(L, t) = \frac{\partial I}{\partial x}(L, t) = 0$. Dilakukan juga inisialisasi untuk panjang domain dan waktu total simulasi yakni $x = 100$ dan $t = 50$ serta $dx = 0.5$ dan $dt = 0.01$, dengan menggunakan parameter pada tabel 1 diperoleh hasil seperti pada gambar 3.



Gambar 3. Simulasi *travelling wave* populasi E dan I

Hasil simulasi menunjukkan bahwa penyebaran penyakit berlangsung secara spasial dalam bentuk gelombang berjalan (*travelling wave*) yang bergerak ke arah kanan. Pada awalnya ($t = 0$), infeksi hanya terjadi di satu lokasi, dengan jumlah individu yang terpapar (E) jauh lebih banyak dibandingkan yang benar-benar terinfeksi (I). Ini mencerminkan adanya masa inkubasi, di mana banyak orang telah terpapar namun belum menunjukkan gejala atau belum bisa menularkan penyakit.

Seiring waktu, *travelling wave* ini meluas ke wilayah lain, namun tidak berkembang tanpa batas. Setelah waktu sekitar $t > 30$, amplitudo gelombangnya mulai menurun, menandakan adanya proses pemulihan alami seperti terbentuknya kekebalan tubuh, kematian, atau intervensi medis

yang efektif. Dominasi populasi yang terpapar dibandingkan yang terinfeksi konsisten dengan karakteristik penyakit yang memiliki periode laten, seperti *monkeypox*. Disebabkan penyebaran ini tidak menjangkau seluruh wilayah dan berhenti setelah beberapa saat, pola yang terbentuk menggambarkan wabah lokal yang bersifat sementara dan tidak berkembang menjadi pandemi besar. *Travelling wave* ini merepresentasikan dinamika penyebaran penyakit yang terkendali, yang cenderung mereda setelah menyebar ke area tertentu. Oleh karena itu, berdasarkan hasil simulasi dan *threshold* adanya *travelling wave*, langkah yang bisa diambil adalah dengan mengurangi laju penyebaran dengan cara mengurangi mobilitas ke wilayah-wilayah dengan kasus penyebaran yang tinggi untuk melindungi kelompok rentan agar tidak mudah terpapar ataupun terinfeksi dan memberikan arahan untuk orang-orang yang telah berpergian ke wilayah tersebut untuk melakukan isolasi serta meningkatkan laju pemulihan dengan memberikan perawatan kepada orang-orang yang terkonfirmasi baik terpapar maupun terinfeksi untuk memutus rantai infeksi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian bisa terselesaikan karena dukungan oleh berbagai pihak diantaranya yaitu, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Mataram. Ucapan terimakasih kami sampaikan kepada semua pihak yang telah berperan dalam terselesaikannya penelitian ini.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan berikut:

1. Model *travelling wave* pada penyakit *monkeypox* yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \zeta - \zeta_2 \frac{IS}{N} - \zeta_1 S + D_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \zeta_2 \frac{IS}{N} - (\varepsilon + \zeta_1)E + D_E \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \varepsilon E - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)I + D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \zeta_4 I - (\zeta_6 + \zeta_5 + \zeta_1)Q + D_Q \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \zeta_6 Q + \zeta_3 I - \zeta_1 R + D_R \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \zeta_5(I + Q) + D_D \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

2. Berdasarkan analisis *travelling wave* di sekitar titik tetap dari model (3.9) penyebaran penyakit *monkeypox*, diperoleh kecepatan minimal *travelling wave* penyakit sebagai berikut

- Di sekitar titik tetap bebas penyakit diperoleh kecepatan minimal *travelling wave* penyakit *monkeypox* adalah $c_E = 2\sqrt{\frac{D_E(\zeta_2 k_2 - (\varepsilon + \zeta_1)k_1)}{k_1}}$ untuk populasi terpapar dan $c_I = 2\sqrt{\frac{D_I(\varepsilon k_1 - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)k_2)}{k_2}}$ untuk populasi terinfeksi.
- Pada titik endemik kecepatan minimal dari penyebaran penyakit *monkeypox* adalah $c_E = 2\sqrt{D_E(\delta - \varepsilon - \zeta_1)}$ dan $c_I = 2\sqrt{\frac{D_I(\varepsilon l_1 - (\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_1 + \zeta_5)l_2)}{l_2}}$ untuk masing-masing populasi terpapar dan terinfeksi.

3. Berdasarkan simulasi numerik dari model penyebaran penyakit *monkeypox* dengan metode Crank-Nicholson diperoleh kesimpulan bahwa pada awalnya infeksi hanya terjadi di satu wilayah yang berpotensi menjadi endemik dan bisa menyebar ke wilayah lainnya. Akan tetapi, penyebaran penyakit ini tidak menjangkau seluruh wilayah dan berhenti setelah beberapa saat. Artinya penyakit tidak berkembang tanpa batas dan pola yang terbentuk menggambarkan wabah lokal yang bersifat sementara dan tidak berkembang menjadi pandemi besar.

Simpulan menyajikan ringkasan dari uraian mengenai hasil dan pembahasan, mengacu pada tujuan penelitian. Berdasarkan kedua hal tersebut dikembangkan pokok-pokok pikiran baru yang merupakan esensi dari temuan penelitian.

SARAN

Saran yang bisa diberikan dalam hal ini guna penelitian selanjutnya yakni sebagai berikut

1. Menggunakan parameter yang diperoleh dari data kasus *monkeypox* yang ada di Indonesia dalam menganalisis *travelling wave* sehingga lebih relevan dengan keadaan di Indonesia.
2. Menambahkan populasi rodent dalam model sebagai sumber infeksi untuk melihat penyebaran yang melibatkan hewan.

DAFTAR PUSTAKA

- Caloh, G. B. (2024, Agustus 22). *MPOX Frequently Asked Question (FAQ)*. Retrieved from [infeksiemerging.kemkes.go.id](https://infeksiemerging.kemkes.go.id/penyakit-virus/frequently-asked-questions-faq-mpox): <https://infeksiemerging.kemkes.go.id/penyakit-virus/frequently-asked-questions-faq-mpox>
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical Methods for Engineers Seventh Edition*. New York: McGraw-Hill Education.
- Euchalypta, S. S., Fitria, I., & Millah, N. (2021). Analisis Eksistensi Travelling Wave pada Model SIR Penyebaran Penyakit Covid 19 dengan Menggunakan Persamaan Difusi. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(3), 513-524. doi:10.30598
- Hutson, C. L., Olson, V. A., Carroll, D. S., Abel, J. A., Hughes, C. M., Braden, Z. H., . . . Regnery, R. L. (2009). Aprairie Dog Animal Model of Systemic Orthopoxvirus Disease Using West African and Congo Basin Strains Of Monkeypox Virus. *Journal of General Virology*, 323-333. doi:10.1099/vir.0.005108-0
- Laili, A. K., & Kusumastuti, A. (2014). Keakuratan Solusi pada Persamaan Difusi Menggunakan Skema Crank-Nicholson. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 3(3), 147-151. doi:10.18860
- Murray, J. (2002). *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. New York: Springer.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction Third Edition*. New York: Springer-Verlag.
- Okyere, S., & Prah, J. A. (2023). Modeling and Analysis of Monkeypox Disease Using Fractional Derivatives. *Results in Engineering*, 17, 1-9. doi:10.1016/j.rineng.2022.100786
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition*. New York: Springer-Verlag.
- Peter, O. J., Oguntolu, F. A., Ojo, M. M., Oyeniyi, A. O., Jan, R., & Khan, I. (2022). Fractional Order Mathematical Model of Monkeypox Transmission Dynamics. *Physica Scripta*. doi: <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac7ebc>
- Prah, J. A., Okyere, S., Bonyah, E., & Adebajji, A. O. (2023). Optimal Control Model of Human to Human Transmission of Monkeypox Virus. *F1000Research*, 12, 326-345. doi:10.12688/f1000research.130276.1
- Qomarudin, M., Metyana, A., & Afifah, Y. (2020). Analisis Kestabilan dan Travelling Wave pada Model Penyebaran Virus Ebola. *BRILIANT: Jurnal Riset dan Konseptual*, 5(2), 369-383. doi:dx.doi.org/10.28926/briliant
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equation Third Edition*. Singapore: John Wiley & Sons.
- Sinaga, L. P., Kartika, D., & Nasution, H. (2021). *Pengantar Sistem Dinamik*. Banten: Amal Insani.
- Spickler, A. R. (2020, November 22). *Monkeypox*. Retrieved from Center for Food Security and Public Health : <https://www.cfsph.iastate.edu/Factsheets/pdfs/monkeypox.pdf>
- Susanto, L. A., Nilogir, A., & Handayani, L. (2023). Klasifikasi Citra Lesi Kulit Serupa Virus Monkeypox Menggunakan VGG-19 Convolutional Neural Network. *Jurnal Sistem dan Teknologi Informasi Indonesia*, 8(1), 1-9.
- World Health Organization. (2018). *Monkeypox Current status in West and Central Africa*. Geneva: World Health Organization.