

BCK/BCI-ALJABAR INTERIOR

Danang Andi Prasetyo

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail: danang.19035@mhs.unesa.ac.id

Agung Lukito

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail: agunglukito@unesa.ac.id

Abstrak

BCK/BCI-aljabar adalah struktur aljabar logis yang berperan penting dalam pengembangan teori logika matematika. Struktur ini terdiri atas himpunan tak-kosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. BCI-aljabar memiliki empat aksioma dasar, sedangkan BCK-aljabar merupakan perluasan dari BCI-aljabar dengan tambahan satu aksioma. Dalam kajian lebih lanjut, konsep BCK/BCI-aljabar interior diketahui sebagai pasangan (X, ℓ) dengan X merupakan BCK/BCI-aljabar dan ℓ adalah pemetaan pada X . Kajian ini mencakup definisi formal melalui contoh konkret tabel Cayley, serta pembuktian sifat-sifat dasar yang mendukung karakteristik struktur aljabar tersebut. Artikel ini bertujuan untuk mendeskripsikan secara sistematis struktur BCK/BCI-aljabar interior beserta sifat-sifat yang menyertainya melalui penyusunan definisi, teorema, dan proposisi yang relevan.

Kata Kunci: BCK/BCI-aljabar, Aljabar logis, Struktur aljabar abstrak, Interior BCK/BCI-aljabar.

Abstract

BCK/BCI-algebra is a logical algebraic structure that plays a significant role in the development of mathematical logic. This structure consists of a non-empty set equipped with a binary operation that satisfies a set of specific axioms. BCI-algebra is defined by four fundamental axioms, while BCK-algebra extends BCI-algebra by incorporating an additional axiom. In further studies, the concept of BCK/BCI-interior algebra is introduced as an ordered pair (X, ℓ) , where X is a BCK/BCI-algebra and ℓ is a self-mapping on X . This study includes formal definitions, concrete examples using Cayley tables, and proofs of foundational properties that characterize the structure. The purpose of this undergraduate thesis is to systematically describe the structure of BCK/BCI-interior algebra and their associated properties through the formulation of definitions, theorems, and propositions.

Keywords: BCK/BCI-algebra, Logical algebra, Abstract algebraic structure, Interior BCK/BCI-algebra.

PENDAHULUAN

Struktur aljabar adalah sebuah himpunan tak-kosong dengan satu atau lebih operasi biner, serta memenuhi aksioma tertentu (Huang, 2006). Dalam ranah logika matematika, struktur aljabar digunakan untuk memodelkan hubungan implikasi secara abstrak dan sistematis. BCK/BCI-aljabar adalah kelas aljabar logis penting yang diperkenalkan oleh matematikawan Jepang K. Iséki. Iséki juga menyatakan bahwa BCK/BCI-aljabar merupakan struktur aljabar di dalam logika matematika yang menggunakan implikasi (Ahn, Bordbar, & Jun, 2021).

Struktur BCK-aljabar memenuhi lima aksioma, yang meliputi empat aksioma dari BCI-aljabar, sebagai berikut: (1) $((d * n) * (d * g)) * (g * n) = 0$; (2) $(d * (d * n)) * n = 0$; (3) $d * d = 0$; (4) $d * n =$

$0, n * d = 0 \Rightarrow d = n$; (5) $0 * d = 0$; untuk semua $d, n, g \in X$. Secara struktural, setiap BCK-aljabar merupakan BCI-aljabar, namun tidak sebaliknya (Jun & Meng, 1994). Aksioma-aksioma dalam BCK/BCI-aljabar berfungsi sebagai aturan yang menjadi dasar operasi biner dan anggota istimewa, sehingga operasi tersebut sebagai representasi aljabar dari implikasi logis. Aksioma-aksioma tersebut tidak hanya mendefinisikan struktur, tetapi juga menentukan sifat-sifat aljabar yang dapat diturunkan darinya. Hal ini menunjukkan bahwa aksioma memegang peran dalam penentuan struktur BCK/BCI-aljabar.

Pada tahun 2021, Ahn, Bordbar, dan Jun, mengembangkan struktur aljabar abstrak melalui BCK/BCI-aljabar interior. Dengan demikian, pada artikel ini akan dibahas mengenai BCK/BCI-aljabar interior dan sifat-sifatnya.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1. Struktur aljabar yang terdiri atas himpunan tak-kosong X dengan operasi biner $*$ dan anggota istimewa 0 disebut BCI-aljabar jika memenuhi aksioma berikut.

$$(BCI1) ((d * n) * (d * g)) * (g * n) = 0,$$

$$(BCI2) (d * (d * n)) * n = 0,$$

$$(BCI3) d * d = 0,$$

$$(BCI4) d * n = 0, n * d = 0 \Rightarrow d = n$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Jika BCI-aljabar X memenuhi

$$(BCK5) 0 * d = 0$$

untuk semua $d \in X$, maka X disebut BCK-aljabar.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Contoh 2.2. Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

Contoh 2.3 Misalkan $L = \{0, 1, 2, a, b\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	a	b
0	0	0	0	a	a
1	1	0	1	b	a
2	2	2	0	a	a
a	a	a	a	0	0
b	b	a	b	1	0

Definisi 2.4. Urutan $\leq$ pada BCK/BCI-aljabar X didefinisikan sebagai berikut.

$$d \leq n \Leftrightarrow d * n = 0$$

$$d \leq n \Leftrightarrow d * n = 0 \quad (1)$$

untuk semua $d, n \in X$.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Proposisi 2.5. Urutan $\leq$ pada BCK/BCI-aljabar X memiliki tiga sifat berikut.

(i) Refleksif ($d \leq d$),

(ii) Anti-simetris ($d \leq n, n \leq d \Rightarrow d = n$),

(iii) Transitif ($d \leq n, n \leq g \Rightarrow d \leq g$),

untuk semua $d, n, g \in X$.

Bukti. (i) Dengan (BCI3) dan Definisi 2.4, menjadi

$$d \leq d \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

(ii) Misalkan $d \leq n$ dan $n \leq d$. Berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh

$$d * n = 0,$$

$$n * d = 0,$$

sehingga dengan (BCI4), mengakibatkan

$$d = n \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n \in X$.

(iii) Misalkan $d \leq n$ dan $n \leq g$. Berdasarkan Definisi 2.4, menjadi

$$d * n = 0,$$

$$n * g = 0.$$

kemudian dengan substitusi g ke n dan n ke g di (BCI1), menghasilkan

$$((d * g) * (d * n)) * (n * g) = 0,$$

sehingga

$$((d * g) * 0) * 0 = 0.$$

Akibatnya, dengan $d * 0 = d$ diperoleh

$$(d * g) * 0 = 0,$$

$$d * g = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.4, menghasilkan

$$d \leq g \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Proposisi 2.6. BCK/BCI-aljabar memenuhi tiga syarat berikut.

(i) $d * 0 = d$,

(ii) $d \leq n \Rightarrow d * g \leq n * g, g * n \leq g * d$,

(iii) $(d * n) * g = (d * g) * n$,

untuk semua $d, n, g \in X$.

Bukti. (i) Substitusi 0 ke n di (BCI2), menjadi

$$(d * (d * 0)) * 0 = 0. \quad (2)$$

Kemudian substitusi $d * 0$ ke n dan d ke g di (BCI1), diperoleh

$$((d * (d * 0)) * (d * d)) * (d * (d * 0)) = 0.$$

Dengan (BCI3), identitas ini menjadi

$$((d * (d * 0)) * 0) * (d * (d * 0)) = 0. \quad (3)$$

melalui substitusi (2) ke (3) mengakibatkan

$$0 * (d * (d * 0)) = 0, \quad (4)$$

berdasarkan (2) dan (4), serta (BCI4), diperoleh

$$(d * (d * 0)) = 0. \quad (5)$$

Kemudian dengan substitusi d ke n di (BCI2), menghasilkan

$$(d * (d * d)) * d = 0.$$

Menurut (BCI3), identitas berikut berlaku

$$(d * 0) * d = 0.$$

Menurut (5) dan (6), serta (BCI4), diperoleh

$$d * 0 = d$$

untuk semua $d \in X$.

(ii) Substitusi d ke g dan g ke n , di (BCI1)

$$((g * n) * (g * d)) * (d * n) = 0,$$

menurut (1), diperoleh

$$((g * n) * (g * d)) * 0 = 0,$$

berdasarkan Proposisi 2.6 bagian (i) menjadi

$$(g * n) * (g * d) = 0,$$

menurut Definisi 2.4, menghasilkan

$$g * n \leq g * d$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Substitusi n ke g dan g ke n , di (BCI1)

$$((d * g) * (d * n)) * (n * g) = 0,$$

menurut (1), diperoleh

$$((d * g) * 0) * (n * g) = 0,$$

berdasarkan Proposisi 2.6 bagian (i) menjadi

$$(d * g) * (n * g) = 0,$$

menurut Definisi 2.4, menghasilkan

$$d * g \leq n * g$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

(iii) Substitusi g ke n di (BCI2) mengakibatkan

$$(d * (d * g)) * g = 0,$$

sehingga, menurut Definisi 2.4, dapat ditulis

$$(d * (d * g)) \leq g.$$

Dengan Proposisi 2.6. Bagian (ii), diperoleh

$$(d * n) * g \leq (d * n) * (d * (d * g)).$$

Kemudian substitusi $d * g$ ke g di (BCI1), mengakibatkan

$$((d * n) * (d * (d * g))) * ((d * g) * n) = 0.$$

Dengan Definisi 2.4 dapat ditulis

$$(d * n) * (d * (d * g)) \leq (d * g) * n.$$

Dengan Proposisi 2.6 bagian (ii), dari dua hasil terakhir diperoleh

$$(d * n) * g \leq (d * g) * n.$$

Kemudian, dengan substitusi g ke n dan n ke g , menjadi

$$(d * g) * n \leq (d * n) * g.$$

Akibatnya, dengan Proposisi 2.2 bagian (ii),

$$(d * n) * g = (d * g) * n.$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Proposisi 2.7. *BCK/BCI-aljabar X memenuhi:*

$$(d * g) * (n * g) \leq d * n,$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Bukti. Substitusi g ke n dan n ke g di (BCI1) mengakibatkan

$$((d * g) * (d * n)) * (n * g) = 0,$$

dan, dengan Proposisi 2.6 bagian (ii), diperoleh

$$((d * g) * (n * g)) * (d * n) = 0,$$

sehingga, dengan Definisi 2.4 menghasilkan

$$(d * g) * (n * g) \leq (d * n)$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Definisi 2.8. *BCK-aljabar X dikatakan terbatas jika terdapat $1 \in X$ sedemikian hingga $x \leq 1$ untuk semua $x \in X$.*

Dalam BCK-aljabar terbatas, notasi $\neg x$ menyatakan $1 * x$.

Proposisi 2.9. *Setiap BCK-aljabar terbatas X memenuhi*

(i) $d \leq n \Rightarrow \neg n \leq \neg d$, untuk semua $d, n \in X$,

(ii) $\neg \neg \neg d = \neg d$, untuk semua $d \in X$.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Bukti. (i) $d \leq n$

Berdasarkan Definisi 2.4, menjadi

$$d * n = 0,$$

$$\neg n * \neg d = 0,$$

sehingga dengan (BCI4), diperoleh

$$d = \neg n \wedge n = \neg d$$

untuk semua $d, n \in X$.

(ii) Karena $\neg d = 1 * d$ sehingga

$$1 * (1 * (1 * d)) = 1 * d.$$

Dengan (BCI2) mengakibatkan

$$1 * (1 * d) \leq d,$$

sehingga, menurut (BCI3) menghasilkan

$$1 * d \leq 1 * (1 * d)$$

untuk semua $x \in X$.

Definisi 2.10. *Elemen d di BCK-aljabar terbatas X disebut involusi dari X jika memenuhi*

$$\neg \neg d = d.$$

Himpunan semua involusi dari X dilambangkan $Iv(X)$.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Definisi 2.11. *Subhimpunan tak-kosong S dari BCK/BCI-aljabar X disebut subaljabar dari X jika*

$$d * n \in S$$

untuk semua $d, n \in S$.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Proposisi 2.12 Jika BCK-aljabar X terbatas, maka $Iv(X)$ merupakan subaljabar terbatas dari X .

Bukti. $d * n \in S$

$$d, n \in Iv(X) \Rightarrow d * n \in Iv(X),$$

$$\neg \neg (d * n) = d * n.$$

Dengan (BCI2) mengakibatkan

$$d * n \leq \neg \neg (d * n),$$

karena $\neg d = 1 * d$ menghasilkan

$$(d * n) * (1 * (1 * (d * n))).$$

Substitusikan $d = \neg \neg d$ pada x di ruas kiri

$$(\neg \neg d * n) * (1 * (1 * (d * n))),$$

karena $\neg d = 1 * d$ menjadi

$$((1 * (1 * d)) * n) * (1 * (1 * (d * n))).$$

Dengan Proposisi 2.6 bagian (iii) diperoleh

$$(1 * (1 * d) * (1 * (1 * (d * n)))) * n,$$

melalui Proposisi 2.6 bagian (iii) kembali, menjadi

$$\left(\left(\left(\left(1 * (1 * (1 * (1 * (d * n)))) \right) * (1 * d) \right) * n \right) * n \right) * n,$$

karena $1 * d = \neg d$ mengakibatkan

$$(\neg \neg \neg \neg (d * n) * (1 * d)) * n.$$

Dengan Proposisi 2.9 bagian (ii) menjadi

$$(\neg (d * n) * (1 * d)) * n,$$

melalui $\neg d = 1 * d$ diperoleh

$$((1 * (d * n)) * (1 * d)) * n.$$

Dengan Proposisi 2.6 bagian (iii) mengakibatkan

$$((1 * (1 * d)) * (d * n)) * n,$$

karena $1 * d = \neg d$ dan $\neg \neg d = d$, maka

$$(d * (d * n)) * n,$$

melalui Proposisi 2.6 bagian (iii) menjadi

$$(d * n) * (d * n).$$

Dengan (BCI3) menghasilkan

$$(d * n) * (d * n) = 0$$

■

untuk semua $d, n \in X$.

Definisi 2.13. Suatu interior BCK-aljabar X disebut implikatif positif, jika

$$((d * n) * g) = ((d * g) * (n * g))$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1. BCK/BCI-aljabar interior didefinisikan sebagai pasang (X, ℓ) di mana X adalah BCK/BCI-aljabar dan ℓ adalah pemetaan pada X sehingga

$$\ell(d) \leq d \quad (7)$$

$$\ell^2(d) = \ell(d) \quad (8)$$

untuk semua $d \in X$.

$$d \leq n \Rightarrow \ell(d) \leq \ell(n) \quad (9)$$

untuk semua $d, n \in X$.

(Ahn, Bordbar, & Jun, 2021)

Contoh 3.2. Misalkan $L = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1: Tabel Cayley operasi $*$.

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	2	1	0	0
4	4	4	4	4	0

Untuk memeriksa apakah (X, ℓ) merupakan BCK-aljabar interior, akan ditunjukkan hubungan (7), (8), dan (9) berlaku.

(7) : $\ell(d) \leq d$ dimana $d \leq n$ jika dan hanya jika $d * n = 0$, untuk semua $d, n \in X$

(i) $\ell(0) = 0$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $0 * 0 = 0$.

(ii) $\ell(1) = 1$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $1 * 1 = 0$.

(iii) $\ell(2) = 0$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $0 * 2 = 0$.

(iv) $\ell(3) = 1$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $1 * 3 = 0$.

(v) $\ell(4) = 4$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $4 * 4 = 0$.

(8) : $\ell^2(d) = \ell(d)$, untuk semua $d \in X$

(i) $\ell(0) = 0$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $0 * 0 = 0$.

(ii) $\ell(1) = 1$

melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $1 * 1 = 0$.

- (iii) $\ell(2) = 0$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $2 * 2 = 0$.
- (iv) $\ell(3) = 1$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $3 * 3 = 0$.
- (v) $\ell(4) = 4$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $4 * 4 = 0$.

(9) : $d \leq n \Rightarrow \ell(d) \leq \ell(n)$ dimana $d \leq n$ jika dan hanya jika $d * n = 0$, untuk semua $d, n \in X$

- (i) $\ell(0) = 0$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $0 * 0 = 0$ sehingga $0 \leq 0$.
- (ii) $\ell(1) = 1$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $1 * 1 = 0$ sehingga $0 \leq 0$.
- (iii) $\ell(2) = 0$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $0 * 0 = 0$ dan $0 * 2 = 0$ sehingga $0 \leq 0$.
- (iv) $\ell(3) = 1$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $1 * 1 = 0$ dan $1 * 3 = 0$ sehingga $0 \leq 0$.
- (v) $\ell(4) = 4$
melalui Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa $4 * 4 = 0$ sehingga $0 \leq 0$.

Untuk setiap BCK-aljabar X , misalkan $\ell(X)$ himpunan semua BCK/BCI-aljabar interior, yaitu

$$\ell(X) = \left\{ (X, \ell_i) \mid \ell_i \text{ adalah pemetaan pada } X \right. \\ \left. \text{yang memenuhi persamaan (7), (8), dan (9)} \right\}.$$

Definisi 3.3. Operasi $\odot$ pada himpunan pemetaan ℓ_i didefinisikan sebagai berikut.

$$(\ell_i \odot \ell_j)(d) = \ell_i(d) * \ell_j(d)$$

untuk semua $d \in X$.

Definisi 3.4. Operasi biner $*$ pada $\ell(X)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$((X, \ell_i) * (X, \ell_j)) = (X, \ell_i \odot \ell_j)$$

untuk semua $(X, \ell_i), (X, \ell_j) \in \ell(X)$.

Teorema 3.5. Jika X merupakan BCK/BCI-aljabar, maka $(\ell(X), *, (X, \ell_0))$ adalah suatu BCK/BCI-aljabar dengan $\ell_0(d) = 0$ untuk semua $d \in X$.

Bukti.

Untuk menunjukkan (BCI1) berlaku, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} ((X, \ell_1) * (X, \ell_2)) * ((X, \ell_1) * (X, \ell_3)) * ((X, \ell_3) * (X, \ell_2)) &= (X, \ell_0) \\ ((X, \ell_1 \odot \ell_2) * (X, \ell_1 \odot \ell_3)) * (X, \ell_3 \odot \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ (X, (\ell_1 \odot \ell_2) \odot (\ell_1 \odot \ell_3)) * (X, \ell_3 \odot \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ X, ((\ell_1 \odot \ell_2) \odot (\ell_1 \odot \ell_3)) * (\ell_3 \odot \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ ((\ell_1 \odot \ell_2) \odot (\ell_1 \odot \ell_3))(d) * (\ell_3 \odot \ell_2)(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell_1 \odot \ell_2)(x) * (\ell_1 \odot \ell_3)(d) * (\ell_3 \odot \ell_2)(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell_1(d) * \ell_2(d)) * (\ell_1(d) * \ell_3(d)) * (\ell_3(d) * \ell_2(d)) &= \ell_0(d) \\ 0 &= \ell_0(d) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

untuk semua $d \in X$.

Untuk menunjukkan (BCI2) berlaku, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} ((X, \ell_1) * ((X, \ell_1) * (X, \ell_2))) * (X, \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ ((X, \ell_1) * (X, \ell_1 \odot \ell_2)) * (X, \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ (X, \ell_1 \odot (\ell_1 \odot \ell_2)) * (X, \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ (X, (\ell_1 \odot (\ell_1 \odot \ell_2)) \odot \ell_2) &= (X, \ell_0) \\ ((\ell_1 \odot (\ell_1 \odot \ell_2)) \odot \ell_2)(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell_1 \odot (\ell_1 \odot \ell_2))(d) \odot \ell_2(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell_1(d) * (\ell_1 \odot \ell_2)(d)) * \ell_2(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell_1(d) * (\ell_1(d) * \ell_2(d))) * \ell_2(d) &= \ell_0(d) \\ 0 &= \ell_0(d) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

untuk semua $d \in X$.

Untuk menunjukkan (BCI3) berlaku, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (X, \ell) * (X, \ell) &= (X, \ell_0) \\ (X, \ell \odot \ell) &= (X, \ell_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ell \odot \ell)(d) &= \ell_0(d) \\ (\ell(d) * \ell(d)) &= \ell_0(d) \\ 0 &= \ell_0(d) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

untuk semua $d \in X$.

Untuk menunjukkan (BCI4) berlaku, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (X, \ell_1) * (X, \ell_2) &= (X, \ell_0) \bigwedge (X, \ell_2) * (X, \ell_1) = (X, \ell_0) \\ (X, \ell_1 \odot \ell_2) &= (X, \ell_0) \bigwedge (X, \ell_2 \odot \ell_1) = (X, \ell_0) \\ \ell_1 \odot \ell_2 &= \ell_0 \bigwedge \ell_2 \odot \ell_1 = \ell_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ell_1 * \ell_2)(d) &= \ell_0(d) \bigwedge (\ell_2 * \ell_1)(d) = \ell_0(d) \\ \ell_1(d) * \ell_2(d) &= 0 \bigwedge \ell_2(d) * \ell_1(d) = 0 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} l_1(d) &= l_2(d) \\ l_1 &= l_2 \\ (X, l_1) &= (X, l_2) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

Untuk menunjukkan (BCI5) berlaku, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} (X, l_0) * (X, l) &= (X, l_0) \\ (X, l_0 \odot l) &= (X, l_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_0 \odot l)(d) &= l_0(d) \\ (l_0(d) * l(d)) &= l_0(d) \\ (0 * l(d)) &= l_0(d) \\ 0 &= l_0(d) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

Teorema 3.6. Jika (X, ℓ) dan (X, j) adalah BCK/BCI-aljabar interior sedemikian hingga $\ell \circ j = j \circ \ell$, maka $(X, \ell \circ j)$ merupakan BCK/BCI-aljabar interior.

Bukti. Dengan menggunakan (7), diperoleh

$$(\ell \circ j)(d) = \ell(j(d)) \leq j(d) \leq d \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$, sehingga mengakibatkan $\ell \circ j$ memenuhi (7).

$$(\ell \circ j)^2(d) = ((\ell \circ j) \circ (\ell \circ j))(d)$$

menggunakan sifat asosiatif $\circ$ diperoleh

$$(\ell \circ j)^2(d) = (\ell \circ (j \circ \ell) \circ j)(d).$$

Menggunakan hipotesis $\ell \circ j = j \circ \ell$, menjadi

$$(\ell \circ j)^2(d) = (\ell \circ (\ell \circ j) \circ j)(d)$$

dan dengan sifat asosiatif $\circ$ kembali diperoleh

$$(\ell \circ j)^2(d) = ((\ell \circ \ell) \circ (j \circ j))(d).$$

Kemudian, dengan sifat interior (8) mengakibatkan

$$(\ell \circ j)^2(d) = (\ell \circ j)(d) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$, sehingga ini menunjukkan bahwa $\ell \circ j$ memenuhi (8).

Untuk setiap $d, n \in X$, jika $d \leq n$ berlaku

$$j(d) \leq j(n),$$

sehingga

$$(\ell \circ j)(d) = \ell(j(d)) \leq \ell(j(n)) = (\ell \circ j)(n), \quad \blacksquare$$

sehingga ini menunjukkan bahwa $\ell \circ j$ memenuhi (9).

Oleh karena itu, $(X, \ell \circ j)$ merupakan BCK/BCI-aljabar interior.

Proposisi 3.7. Jika (X, ℓ) dan (X, j) adalah BCK/BCI-aljabar interior, maka

- (i) $\ell \leq j \Leftrightarrow \ell \circ j = \ell$,
- (ii) $I(\ell) = I(j) \Leftrightarrow \ell = j$.

Bukti. (i) Jika $\ell \leq j$, maka $\ell(d) \leq j(d)$ untuk semua $d \in X$

$$\ell(d) = \ell^2(d) \leq (\ell \circ j)(d)$$

$$(\ell \circ j)(d) = \ell(j(d)) \leq j(j(d)) = j(d) \leq d$$

sehingga mengimplikasikan

$$(\ell \circ j)(d) = \ell(j(d)) = \ell(\ell(j(d))) \leq \ell(d)$$

Dengan demikian,

$$(\ell \circ j)(d) = \ell(d) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

Oleh karena itu, $\ell \circ j = \ell$.

Asumsikan jika $\ell \circ j = \ell$,

$$\ell(d) = (\ell \circ j)(d) \leq j(d) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

Keduanya membuktikan bahwa $\ell \leq j$.

(ii) Melalui (8) menghubungkan

$$\ell(d) \in I(\ell) = I(j)$$

sehingga,

$$j(\ell(d)) = \ell(d) \Leftrightarrow j \circ \ell = \ell$$

untuk semua $d \in X$.

Dengan cara yang sama, $\ell \circ j = j$ berdasarkan (7) dan (9)

$$\ell(d) = (j \circ \ell)(d) \leq j(d) \bigwedge j(d) = (\ell \circ j)(d) \leq \ell(d)$$

sehingga

$$\ell(d) = j(d)$$

untuk semua $d \in X$.

Dengan demikian, diperoleh

$$\ell = j \quad \blacksquare$$

Proposisi 3.8. Jika (X, ℓ) adalah BCK/BCI-aljabar interior, maka

- (i) $\ell(d) * n \leq d * \ell(n)$,
 - (ii) $\ell(d * n) \leq d * \ell(n)$,
- untuk semua $d, n \in X$.

Bukti. (i) Menggunakan (7) dan Proposisi 2.6 bagian (ii)

$$\ell(d) * n \leq \ell(d) * \ell(n) \leq d * \ell(n) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n \in X$.

(ii) Dengan $\ell(d * n) \leq d * n$ dan $\ell(n) \leq n$

Melalui Proposisi 2.6 bagian (ii)

$$\ell(d * n) \leq d * n \leq d * \ell(n) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n \in X$.

Proposisi 3.9. Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar interior, maka

- (i) $\ell(0) = 0$,
 - (ii) $\ell((d * (d * n)) * (n * d)) \leq \ell(d * (d * (n * (n * d))))$,
 - (iii) $\ell(d * n) * \ell(g) \leq (d * \ell(g)) * n$,
- untuk semua $d, n \in X$.

Jika X terbatas, maka

- (iv) $\ell(\neg d) \leq \neg \ell(d)$,
 - (v) $\ell(\neg d * \neg n) \leq n * d$,
- untuk semua $d, n \in X$.

Bukti. (i) Menggunakan (7) menjadi

$$\ell(0) \leq 0$$

sehingga dengan Proposisi 2.5 bagian (i), mengakibatkan

$$\begin{aligned}\ell(0) &= \ell(0) * 0 = 0 \\ \ell(0) &= 0\end{aligned}$$

(ii) Dengan menggunakan BCI1, BCI3, dan Proposisi 2.6 bagian (iii) menjadi

$$\begin{aligned}& ((d * (d * n)) * (n * d)) * (d * (d * (n * (n * d)))) \\ &= ((d * (d * n)) * (d * (d * (n * (n * d)))) * (n * d)) \\ &= ((d * (d * (d * (n * (n * d)))) * (d * n)) * (n * d)) \\ &= ((d * (n * (n * d))) * (d * n)) * (n * d) \\ &= (n * (n * (n * d))) * (n * d) \\ &= (n * (n * d)) * (n * (n * d)) \\ &= 0\end{aligned}$$

di mana $0 \leq d$ untuk semua $d \in X$.

Berdasarkan BCI4,

$$\begin{aligned}& ((d * (d * n)) * (n * d)) * (d * (d * (n * (n * d)))) = 0 \\ & ((d * (d * n)) * (n * d)) \leq (d * (d * (n * (n * d))))\end{aligned}$$

dengan (9) menjadi

$$\ell((d * (d * n)) * (n * d)) \leq \ell(d * (d * (n * (n * d)))) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

(iii) Menggunakan Proposisi 2.6 bagian (ii), Proposisi 2.6 bagian (iii), dan (7) menjadi

$$\ell(d * n) * \ell(g) \leq (d * n) * \ell(g) = (d * \ell(g)) * n \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

(iv) Misalkan X terbatas. Jika $d = 1$ dan $n = d$ dalam Proposisi 3.8 bagian (ii), maka

$$\ell(\neg d) = \ell(1 * d) \leq 1 * \ell(d) = \neg \ell(d) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d \in X$.

(v) Jika $d = 1, n = d$, dan $g = n$ pada BCI1, maka

$$\neg d * \neg n = (1 * d) * (1 * n) = n * d$$

mengikuti dari (7) menjadi

$$\ell(\neg d * \neg n) \leq \neg d * \neg n \leq n * d \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n \in X$.

Definisi 3.10. Pemetaan $\tilde{\ell}$ pada $Iv(X)$ didefinisikan sebagai $\tilde{\ell}(d) = \neg \neg d$ untuk semua $d \in Iv(X)$.

Teorema 3.11. Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar interior, maka $(Iv(X), \tilde{\ell})$ adalah BCK-aljabar interior.

Bukti. Dengan $\ell(d) \leq d$, mengikuti Proposisi 2.9 bagian (i) mengakibatkan

$$\tilde{\ell}(d) = \neg \neg d \leq \neg \neg d = d$$

di mana $\tilde{\ell}$ memenuhi (7).

Untuk setiap $d \in Iv(X)$ dengan Proposisi 2.9 bagian (ii) diperoleh

$$\tilde{\ell}^2(d) = \tilde{\ell}(\neg \neg \ell(d)) = \neg \neg \neg \neg \ell(d) = \neg \neg \ell(d) = \tilde{\ell}(d)$$

dengan demikian $\tilde{\ell}$ memenuhi (8).

Misalkan $d, n \in Iv(X)$ sedemikian rupa sehingga $d \leq n$, maka dengan (9) menghasilkan

$$\ell(d) \leq \ell(n)$$

dengan Proposisi 2.9 bagian (i) mengakibatkan

$$\tilde{\ell}(d) = \neg \neg \ell(d) \leq \neg \neg \ell(n) = \tilde{\ell}(n) \quad \blacksquare$$

Dengan demikian, $\tilde{\ell}$ memenuhi (9).

Definisi 3.12. Suatu interior BCK-aljabar (X, ℓ) disebut implikatif positif, jika

$$\ell((d * n) * g) = \ell((d * g) * (n * g))$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Teorema 3.13. Jika X adalah BCK-aljabar implikatif positif, maka BCK-aljabar interior (X, ℓ) juga merupakan BCK-aljabar implikatif positif.

Bukti. Melalui Definisi 2.13. diketahui

$$((d * n) * g) = ((d * g) * (n * g))$$

melalui Definisi 3.12 menjadi

$$\ell((d * n) * g) = \ell((d * g) * (n * g))$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

Proposisi 3.14. Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar interior implikatif positif, maka

- (i) $d * n \leq g \Rightarrow \ell(d * g) \leq \ell(n * g)$,
- (ii) $d * n \leq n \Rightarrow \ell(d * n) = \ell(0)$,
- (iii) $\ell((d * n) * n) = \ell(d * n) = \ell((d * n) * (d * (d * n)))$,

untuk semua $d, n, g \in X$.

Bukti. Misal, (X, ℓ) merupakan BCK-aljabar interior implikatif positif

- (i) $d * n \leq g$

$$(d * g) * (n * g) = 0$$

dengan X merupakan BCK-aljabar implikatif positif sehingga

$$d * g \leq n * g$$

berdasarkan (9) menjadi

$$\ell(d * g) \leq \ell(n * g) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n, g \in X$.

- (ii) $d * n \leq n$

berdasarkan BCI3, Proposisi 2.6 bagian (i), dan Definisi 3.12 mengakibatkan

$$d * n = (d * n) * (n * n) = 0$$

dengan demikian

$$\ell(d * n) = \ell(0) \quad \blacksquare$$

untuk semua $d, n \in X$.

- (iii) Dengan X merupakan BCK-aljabar implikatif positif sehingga

$$d * n = (d * n) * n = (d * n) * (d * (d * n))$$

dengan demikian

$$\ell(d * n) = \ell((d * n) * n) = \ell((d * n) * (d * (d * n)))$$

untuk semua $d, n, g \in X$. $\blacksquare$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, simpulan yang diperoleh mengenai struktur BCK/BCI-aljabar interior dapat dideskripsikan secara sistematis melalui definisi, teorema, dan proposisi sebagai berikut.

1. Dengan Definisi 3.1. (BCK/BCI-aljabar interior didefinisikan sebagai pasang (X, ℓ) di mana X adalah BCK/BCI-aljabar dan ℓ adalah pemetaan pada X) sehingga memenuhi sifat:

$$(7) \quad \ell(d) \leq d \text{ untuk semua } d \in X,$$

$$(8) \quad \ell^2(d) = \ell(d) \text{ untuk semua } d \in X, \text{ dan}$$

$$(9) \quad d \leq n \Rightarrow \ell(d) \leq \ell(n) \text{ untuk semua } d, n \in X.$$

2. Dengan Contoh 3.2. (Misalkan $L = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi $*$ yang dideskripsikan pada Tabel 3.1.) dapat dibuktikan bahwa X merupakan BCK-aljabar melalui tabel Cayley, serta (X, ℓ) merupakan BCK-aljabar interior melalui (7), (8), dan (9).

3. Dengan Definisi 3.3. (Operasi $\odot$ pada himpunan pemetaan ℓ_i) dan Definisi 3.4. (Operasi biner $*$ pada $\ell(X)$), dapat dibuktikan memenuhi:

- a. Teorema 3.5. (Jika X merupakan BCK/BCI-aljabar, maka $(\ell(X), *, (X, \ell_0))$ adalah suatu BCK/BCI-aljabar dengan $\ell_0(d) = 0$ untuk semua $d \in X$.)

- b. Teorema 3.6. (Jika (X, ℓ) dan (X, j) adalah BCK/BCI-aljabar interior sedemikian hingga $\ell \circ j = j \circ \ell$, maka $(X, \ell \circ j)$ merupakan BCK/BCI-aljabar interior).

4. Dengan persamaan:

$$(7) \quad \ell(d) \leq d \text{ untuk semua } d \in X,$$

$$(8) \quad \ell^2(d) = \ell(d) \text{ untuk semua } d \in X, \text{ dan}$$

$$(9) \quad d \leq n \Rightarrow \ell(d) \leq \ell(n) \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

dapat dibuktikan bahwa Proposisi 3.7. (Jika (X, ℓ) dan (X, j) adalah BCK/BCI-aljabar interior) memenuhi:

$$(i) \quad \ell \leq j \Leftrightarrow \ell \circ j = \ell,$$

$$(ii) \quad I(\ell) = I(j) \Leftrightarrow \ell = j.$$

5. Proposisi 3.8. (Jika (X, ℓ) adalah BCK/BCI-aljabar interior), maka

$$(i) \quad \ell(d) * n \leq d * \ell(n) \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

$$(ii) \quad \ell(d * n) \leq d * \ell(n) \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

dapat dibuktikan melalui (7) dan Proposisi 2.6 (ii).

6. Proposisi 3.9. (Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar interior), maka

$$(i) \quad \ell(0) = 0 \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

dapat dibuktikan melalui (7) dan Proposisi 2.5 bagian (i).

$$(ii) \quad \ell((d * (d * n)) * (n * d)) \leq \ell(d * (d * (n * (n * d)))) \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

dapat dibuktikan melalui BCI1, BCI3, Proposisi 2.6 bagian (iii), BCI4, dan (9).

$$(iii) \quad \ell(d * n) * \ell(g) \leq (d * \ell(g)) * n \text{ untuk semua } d, n \in X,$$

dapat dibuktikan melalui Proposisi 2.6 bagian (ii), Proposisi 2.6 bagian (iii), dan (7).

Jika X terbatas, maka

(iv) $\ell(\neg d) \leq \neg \ell(d)$ untuk semua $d, n \in X$,
dapat dibuktikan dengan $d = 1$ dan $n = d$
melalui Proposisi 3.8 bagian (ii).

(v) $\ell(\neg d * \neg n) \leq n * d$ untuk semua $d, n \in X$,
dapat dibuktikan dengan $d = 1, n = d$, dan
 $g = n$ melalui BCI1 dan melalui (7).

7. Dengan Definisi 3.10. (Pemetaan $\tilde{\ell}$ pada $Iv(X)$
didefinisikan sebagai $\tilde{\ell}(d) = \neg \neg d$ untuk semua $d \in$
 $Iv(X)$.) dapat dibuktikan bahwa Teorema 3.11.
(Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar interior, maka
 $(Iv(X), \tilde{\ell})$ adalah BCK-aljabar interior.) memenuhi
(7), (8), dan (9).

8. Dengan Definisi 3.12. (Suatu interior BCK-aljabar
 (X, ℓ) disebut implikatif positif, jika $\ell((d * n) * g) =$
 $\ell((d * g) * (n * g))$ untuk semua $d, n, g \in X$) dapat
dibuktikan memenuhi Teorema 3.13. (Jika X
adalah BCK-aljabar implikatif positif, maka BCK-
aljabar interior (X, ℓ) juga merupakan BCK-aljabar
implikatif positif.) melalui Definisi 2.13 dan
Definisi 3.12.

9. Proposisi 3.14. (Jika (X, ℓ) adalah BCK-aljabar
interior implikatif positif, maka

(i) $d * n \leq g \Rightarrow \ell(d * g) \leq \ell(n * g)$ untuk semua
 $d, n, g \in X$,
dapat dibuktikan melalui Definisi 2.13 dan
Definisi 3.12.

(ii) $d * n \leq n \Rightarrow \ell(d * n) = \ell(0)$ untuk semua
 $d, n \in X$,
dapat dibuktikan melalui BCI3, Proposisi 2.6
bagian (i), dan Definisi 3.12.

(iii) $\ell((d * n) * n) = \ell(d * n) = \ell((d * n) * (d * (d * n)))$ untuk semua $d, n \in X$,
dapat dibuktikan melalui Definisi 2.13 dan
Definisi 3.12.

Dengan demikian, permasalahan penelitian
mengenai bagaimana struktur dan sifat-sifat
BCK/BCI-aljabar interior telah terjawab melalui
kajian formal dan contoh konkret menggunakan
tabel Cayley.

SARAN

Sehubungan dengan hasil penelitian artikel
BCK/BCI-aljabar interior, penulis memberikan saran
untuk melakukan eksplorasi lebih lanjut mengenai
variasi struktur aljabar logis lain sehingga

memperluas wawasan tentang hubungan antara teori
aljabar dan logika matematika.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahn, S. S., Bordbar, H., & Jun, Y. B. (2021). Interior BCK/BCI-Algebras. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1923-1933.
- Arai, Y., Iseki, K., & Tanaka, S. (1966). Characterizations of BCI, BCK-algebras. *Proceedings of the Japan Academy*, 42(2), 105-107.
- Huang, Y. (2006). *BCI-Algebras*. Beijing, China: Science Press.
- Iséki, K. (1966). An algebra related with a propositional calculus. *Proc. Japan Acad*, 42(1), 26-29.
- Iséki, K. (1980). *On BCI-algebras*. Math. Semin.
- Iseki, K. (2000). Some problems of BCK, BCI algebras (Algebraic Systems, Formal Languages and Computations). *Research Institute for Mathematical Sciences Kokyuroku*, 1166, 100-108.
- Jun, Y. B., & Meng, J. (1994). *BCK-algebras*. Seoul: Kyung Moon Sa Company.
- Masriyah. (2017). *Dasar-Dasar Matematika*. Surabaya: UNESA.
- Mudrik, M. B., & Lukito, A. (2018). Sifat-sifat Q-aljabar. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 6(3).