

SYARAT GRAF MEMILIKI PELABELAN ANGGUN AJAIB SISI SUPER

Syahda Fadhilah Rosmayanti

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
Surabaya, Indonesia

e-mail: syahda.22043@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
Surabaya, Indonesia

e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang mengkaji pemetaan elemen-elemen graf ke bilangan bulat dengan aturan tertentu. Salah satu bentuk pelabelan yang merupakan hasil pengembangan dari pelabelan anggun dan pelabelan ajaib sisi super adalah pelabelan anggun ajaib sisi super. Pelabelan ini menggabungkan sifat injektif pada pelabelan anggun dan sifat konstanta ajaib pada pelabelan ajaib sisi super. Pada skripsi ini dikaji pelabelan anggun ajaib sisi super pada beberapa kelas graf dengan tujuan menentukan syarat suatu graf memiliki pelabelan tersebut, serta mengidentifikasi kelas graf yang memenuhi dan tidak memenuhi pelabelan anggun ajaib sisi super. Hasil penelitian menunjukkan bahwa suatu graf dengan n titik dan m sisi memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super jika terdapat fungsi bijektif dari himpunan titik ke $\{1, 2, \dots, n\}$ sehingga himpunan jumlah label pasangan titik ujung sisi memuat m bilangan bulat positif berurutan. Selain itu, diperoleh bahwa graf lengkap K_n memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super jika dan hanya jika $n \leq 3$, graf lintasan P_n selalu memiliki pelabelan tersebut, graf siklus C_n dan graf mahkota C_n^+ memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super jika n ganjil, sedangkan graf roda W_n tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Kata Kunci: pelabelan ajaib sisi super, pelabelan anggun, pelabelan anggun ajaib sisi super, pelabelan graf, teori graf.

Abstract

Graph labeling is a topic in graph theory that studies the mapping of graph elements to integers under specific rules. One form of labeling developed from graceful labeling and super edge-magic labeling is super edge-magic graceful labeling. This labeling combines the injective property of graceful labeling with the magic constant property of super edge-magic labeling. This thesis examines super edge-magic graceful labeling on several graph classes to determine the conditions under which a graph possesses such a labeling and to identify graph classes that do or do not satisfy these conditions. The results show that a graph with n vertices and m edges has a super edge-magic graceful labeling if there exists a bijective function from the set of vertices to $\{1, 2, \dots, n\}$ such that the set of sums of the labels of the endpoints of each edge consists of m consecutive positive integers. Furthermore, it was found that the complete graph K_n has a super edge-magic graceful labeling if and only if $n \leq 3$, the path graph P_n always possesses this labeling, the cycle graph C_n and the crown graph C_n^+ possess a super edge-magic graceful labeling if n is odd, whereas the wheel graph W_n does not possess a super edge-magic graceful labeling.

Keywords: graceful labeling, graph labeling, graph theory, super edge-magic graceful labeling, super edge-magic labeling.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang telah berkembang sejak lebih dari dua abad yang lalu, pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Perkembangan teori graf sangat pesat karena memiliki aplikasi yang

luas dalam kehidupan sehari-hari maupun berbagai bidang ilmu. Secara umum, sebuah graf G terdiri atas pasangan tak berurutan dari himpunan berhingga tak kosong yang disebut titik, dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan berhingga (mungkin kosong) yang disebut sisi, dinotasikan dengan $E(G)$ (Budayasa, 2007).

Salah satu topik yang dapat dikaji dalam teori graf adalah pelabelan graf (*graph labeling*). Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadl ack pada tahun 1964, kemudian dikembangkan oleh Stewart pada tahun 1966, serta Kotzig dan Rosa pada tahun 1970 (Dian Noer Indah Sari, 2008). Suatu pelabelan dalam graf merupakan pemetaan yang membawa suatu himpunan elemen graf ke himpunan bagian bilangan bulat positif yang disebut label. Pada umumnya, domain dalam pelabelan yaitu himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan sisi (pelabelan total). Beberapa jenis pelabelan graf yang dikenal antara lain pelabelan anggun, harmoni, total tak teratur, ajaib, dan anti ajaib (Marzuki dkk., 2018).

Pada tahun 1967, Rosa memperkenalkan sebuah pelabelan yang disebut sebagai β - valuation yang kemudian Golomb menyebut pelabelan tersebut sebagai pelabelan anggun (*graceful labeling*). Suatu fungsi injektif dari himpunan titik ke $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ disebut pelabelan anggun jika setiap sisi uv diberi label $|f(u) - f(v)|$, dan semua label sisi yang dihasilkan saling berbeda (Marimuthu & Balakrishnan, 2014). Beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa graf caterpillar dan graf bipartit komplet merupakan graf anggun, serta graf komplet K_n merupakan graf anggun jika dan hanya jika $n \leq 4$ (Afifah & Budayasa, 2023).

Selain itu, pada tahun 1966 dan 1976 Stewart dan Sedlacek memperkenalkan konsep pelabelan ajaib (*magic labeling*). Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib pada graf G sebagai pemetaan bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, n + m\}$ dengan sifat bahwa untuk setiap sisi $uv \in E$, nilai $f(u) + f(v) + f(uv)$ selalu konstan (Marimuthu & Balakrishnan, 2014). Seiring perkembangan kajian pelabelan ajaib, diperkenalkan pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik-ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super (Irawati & Heri, 2010). Pelabelan ajaib sisi dikatakan ajaib sisi super jika himpunan label titik adalah $\{1, 2, \dots, n\}$ (Enomoto dkk., 1998).

Perkembangan selanjutnya melahirkan konsep pelabelan anggun ajaib sisi super (*super edge magic graceful labeling*) yang diperkenalkan oleh Marimuthu dan Balakrishnan (2014). Pelabelan ini menggabungkan kriteria anggun (*graceful*) dan ajaib sisi super (*super edge magic*), dengan graf G dikatakan memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super jika label

titiknya berisi bilangan bulat positif berurutan $\{1, 2, \dots, n\}$ dan memenuhi syarat $|f(u) + f(v) - f(uv)| = k$, dengan k konstan. Beberapa hasil penelitian menunjukkan bahwa graf petersen $P(n, 1)$ dan $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$ merupakan graf anggun ajaib sisi super (Marimuthu dkk., 2015). Kemudian pada tahun 2019, penelitian Wardhani dan Budayasa menunjukkan konstruksi pelabelan anggun ajaib sisi super pada graf petersen yang diperumum $P(n, 1)$, $P\left(n, \frac{n-1}{2}\right)$, dan $P(n, 2)$ dengan n ganjil (Wardhani & Budayasa, 2019).

Berdasarkan kajian tersebut, penelitian ini berfokus pada penentuan syarat-syarat suatu graf agar memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super, serta penentuan kelas-kelas graf yang memenuhi dan tidak memenuhi pelabelan tersebut. Pelabelan anggun ajaib sisi super menarik untuk dikaji karena pelabelan ini menggabungkan syarat injektif (pelabelan anggun) dan syarat konstan (pelabelan ajaib). Pelabelan anggun mensyaratkan agar setiap sisi memiliki label yang berbeda, sehingga sangat bergantung pada variasi hubungan antar titik dalam sebuah graf. Di sisi lain, pelabelan ajaib sisi super memiliki syarat adanya suatu konstanta ajaib yang sama untuk seluruh sisi.

KAJIAN TEORI

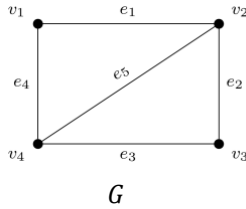
2.1 Konsep Dasar dalam Graf

Definisi 2.1:

Graf G terdiri atas sepasang tak berurutan himpunan berhingga takkosong elemen yang disebut titik, dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan berhingga (mungkin kosong) elemen yang disebut sisi, dinotasikan dengan $E(G)$ sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah pasang tak berurutan titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1:

Misalkan G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, $e_4 = v_1v_4$, dan $e_5 = v_2v_4$ diilustrasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2. 1 Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi

Definisi 2.2:

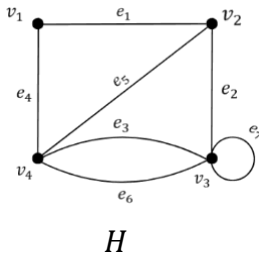
Misalkan v_1 dan v_2 dua titik graf G dan $e_1 = v_1v_2$ sisi graf G . Titik v_1 dan titik v_2 berhubungan langsung (*adjacent*) di graf G , sisi e_1 menghubungkan (*joining*) titik v_1 dan titik v_2 di graf G , dan sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan titik v_2 (Budayasa, 2007).

Definisi 2.3:

Sisi pada suatu graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v , maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi rangkap atau sisi ganda (*multiple edges*). Suatu graf yang tidak memiliki sisi rangkap maupun gelung disebut graf sederhana (Budayasa, 2007).

Contoh 2.2:

Misalkan H graf dengan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ diilustrasikan pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Graf H dengan 4 titik dan 7 sisi

Pada Gambar 2.2, sisi e_7 merupakan sebuah gelung. Sisi-sisi e_3 dan e_4 merupakan sisi-sisi rangkap. Graf G pada Gambar 2.1 merupakan contoh graf sederhana, sedangkan graf H pada Gambar 2.2 merupakan contoh bukan graf sederhana.

Definisi 2.4:

Misalkan G sebuah graf dan v sebuah titik G . Derajat titik v merupakan banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan

setiap gelung dihitung dua kali) yang disimbolkan dengan $d(v)$. Derajat minimum G disimbolkan dengan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

dan derajat maksimum G disimbolkan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

(Budayasa, 2007)

2.2 Beberapa Jenis Graf

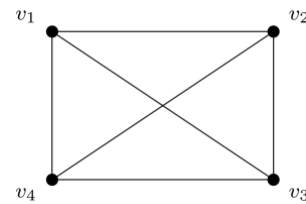
Definisi 2.5:

Graf lengkap atau graf lengkap merupakan graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi. Graf lengkap dengan n titik disimbolkan dengan K_n . Jika $|E(K_n)|$ menyatakan banyak sisi pada graf lengkap dengan n titik, sebagai konsekuensi langsung dari graf lengkap diperoleh

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(Budayasa, 2007)

Contoh 2.3:



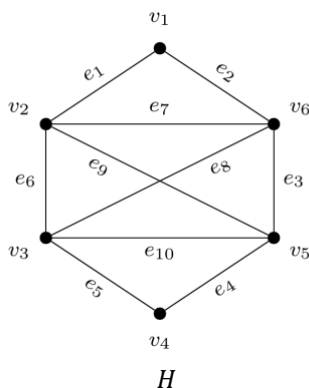
Gambar 2. 3 Graf lengkap K_n dengan 4 titik

Definisi 2.6:

Misalkan G graf. Barisan berhingga (tak kosong) yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq n$, disebut jalan (*walk*) di G yang dinotasikan dengan $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_n)$. Dikatakan W merupakan jalan dari titik v_0 ke titik v_n atau jalan- (v_0, v_n) . Titik v_0 disebut titik awal dan titik v_n disebut titik akhir. Titik-titik internal W adalah $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, dan panjang jalan W adalah n . Jadi, panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Titik di G mungkin saja muncul lebih dari satu kali dalam jalan W , begitu pula dengan sisi di G . Jika semua sisi

$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut lintasan (*path*). Lintasan dengan n titik disimbolkan dengan P_n . Jika titik awal dan titik akhir jalan W sama, jalan W dengan panjang positif dikatakan tertutup. Jejak tertutup disebut sirkuit. Disebut sirkuit Euler jika sirkuit di G memuat semua sisi G . Graf yang memuat sirkuit Euler disebut graf Euler. Sikel (*cycle*) adalah jejak tertutup yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang n disebut n – sikel, disimbolkan dengan C_n . Sikel Hamilton adalah sikel yang memuat semua titik G . Graf yang memuat sikel Hamilton disebut graf Hamilton (Budayasa, 2007).

Contoh 2.4:



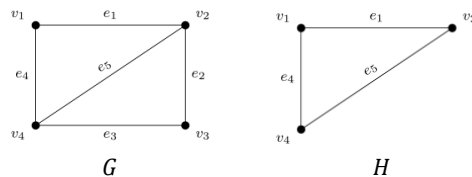
Gambar 2. 4 Graf H dengan 6 titik dan 10 sisi

Pada Gambar 2.4, barisan $(v_1, e_2, v_6, e_7, v_2, e_7, v_6)$ adalah sebuah jalan- (v_1, v_3) di graf H yang panjangnya 3. Barisan $(v_2, e_6, v_3, e_{10}, v_5, e_3, v_6, e_8, v_3)$ adalah sebuah jejak di graf H dengan panjang 4. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_6, v_3, e_5, v_4)$ adalah sebuah lintasan di graf H dengan panjang 3. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_6, v_3, e_{10}, v_5, e_3, v_6, e_2, v_1)$ adalah sebuah sirkuit di graf H dengan panjang 5. Barisan $(v_2, e_7, v_6, e_3, v_5, e_{10}, v_3, e_6, v_2)$ adalah sebuah sikel di graf H dengan panjang 4. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_8, v_3, e_6, v_2, e_9, v_5, e_{10}, v_3, e_5, v_4, e_4, v_5, e_3, v_6, e_2, v_1)$ adalah sebuah sirkuit Euler di graf H . Barisan $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ adalah sebuah sikel Hamilton di graf H .

Definisi 2.7:

Graf H disebut graf bagian dari graf G , disimbolkan dengan $H \subset G$ jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ (Budayasa, 2007).

Contoh 2.5:

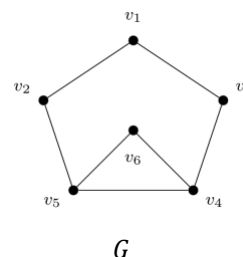


Gambar 2. 5 H graf bagian G

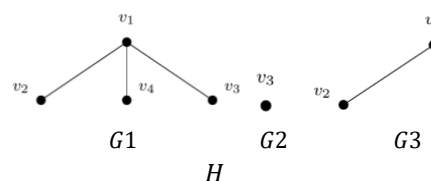
Definisi 2.8:

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik berbeda dalam G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sebaliknya, jika graf G tidak terhubung, maka graf tersebut disebut graf tidak terhubung (*disconnected*). Komponen dari graf G adalah graf bagian terhubung maksimal, yaitu mencakup titik dan sisi dari G . Graf H disebut sebagai graf bagian terhubung maksimal dari graf G jika tidak terdapat graf bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H . Dengan demikian, setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen, sedangkan graf tidak terhubung memiliki minimal dua komponen (Budayasa, 2007).

Contoh 2.6:



Gambar 2. 6 G graf terhubung



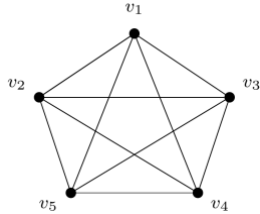
Gambar 2. 7 H graf tidak terhubung dengan 3 komponen, yaitu $G1, G2, G3$

Definisi 2.9:

Graf beraturan- r adalah graf yang setiap titiknya berderajat r . Misalnya, graf lengkap

dengan n titik adalah graf beraturan $-(n-1)$ dan siklus C_n adalah graf beraturan -2 . Jika graf G adalah graf beraturan, maka $\delta(G) = \Delta(G)$, dengan $\delta(G)$ adalah derajat minimum G , sedangkan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum G (Budayasa, 2007).

Contoh 2.7:



Gambar 2. 8 Graf H beraturan-4, $\delta(G) = 4 = \Delta(G)$

2.3 Teorema Jabat Tangan

Teorema 2.1:

Jika G graf, maka

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Dalam menghitung jumlah derajat semua titik di sebuah graf, setiap sisi graf dihitung tepat dua kali, maka jumlah derajat semua titik graf selalu sama dengan dua kali banyaknya sisi graf tersebut (Budayasa, 2007).

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Graf

Definisi 3.1:

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi pada G adalah sebuah fungsi bijektif

$$f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+n\} \ni \forall uv \in E(G), \\ |f(u) + f(v) - f(uv)| = k$$

dengan k konstan.

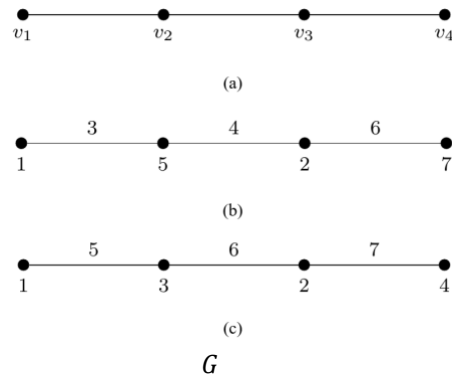
Graf yang memiliki pelabelan seperti itu disebut graf anggun ajaib sisi.

Pelabelan anggun ajaib sisi dikatakan pelabelan anggun ajaib sisi super jika

$$f(V(G)) = \{1, 2, \dots, n\}$$

Contoh 3.1:

Perhatikan graf G pada Gambar 3.1



Gambar 3. 1 Graf G

- (a) G adalah lintasan dengan empat titik (P_4).
- (b) Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi tidak super pada $G = P_4$.
- (c) Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super pada $G = P_4$.

3.2 Teorema-Teorema

Berikut diberikan syarat pelabelan pada graf G , agar G adalah graf anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.1:

Misalkan G graf dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Jika ada fungsi bijektif

$$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

sedemikian hingga himpunan

$$S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$$

memuat m bilangan bulat positif berurutan, maka G merupakan graf anggun ajaib sisi super.

Bukti:

Misalkan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ bijektif sedemikian hingga $S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ memuat m bilangan bulat positif berurutan. Misalkan $s = \max S$.

Definisikan fungsi h sebagai berikut:

- 1) $h: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m+n\}$
- 2) $h(u) = f(u), \forall u \in V(G)$
- 3) $h(uv) = f(u) + f(v) + n + m - s, \forall uv \in E(G)$

Berdasarkan definisi fungsi h , berlaku:

$$\begin{aligned} |h(u) + h(v) - h(uv)| &= |f(u) + f(v) - f(u) - f(v) - n - m + s| \\ &= |-n - m + s| \\ &= |s - n - m|, \forall uv \in E(G) \end{aligned}$$

$$|h(u) + h(v) - h(uv)| = |s - n - m|.$$

Karena

$$\{f(v) \mid v \in V(G)\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

dan

$$h(u) = f(u), \forall u \in V(G)$$

maka

$$\{h(v) \mid v \in V(G)\} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Karena $S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ memuat m bilangan bulat positif berurutan, dapat ditulis

$$S = \{x, x + 1, x + 2, \dots, x + m - 1\}$$

untuk suatu bilangan bulat positif $x = f(u) + f(v)$, diperoleh:

$$s = x + m - 1.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \{h(uv) \mid uv \in E(G)\} &= \{x + n + m - (x + m - 1), x + \\ &\quad 1 + n + m - (x + m - 1), x + \\ &\quad 2 + n + m - (x + m - \\ &\quad 1), \dots, x + m - 1 + n + m - \\ &\quad (x + m - 1)\} \\ &= \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}. \end{aligned}$$

Karena $h(uv)$ memuat m bilangan bulat positif berurutan, maka h adalah pelabelan anggun ajaib sisi super dengan konstanta ajaib $|s - n - m|$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Perhatikan bahwa Teorema 3.1 dan pembuktiannya menyajikan ilustrasi bahwa, jika pada graf G terdapat pelabelan bijektif

$$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

sedemikian hingga, S adalah himpunan m bilangan bulat berurutan, maka pelabelan f dapat ditransformasi menjadi pelabelan h , sedemikian hingga h merupakan pelabelan anggun ajaib sisi super.

Sebagai ilustrasi, perhatikan graf $G = P_4$ pada Gambar 3.1 (a). Sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ diperlihatkan seperti pada Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2 Lintasan P_4

Perhatikan bahwa, dalam hal ini, $S = \{4, 5, 6\}$ merupakan tiga bilangan bulat positif berurutan dengan $s = 6$. Perhatikan bahwa, f bukan pelabelan anggun. Selanjutnya akan dikonstruksi pelabelan h

dari f mengikuti pembuktian Teorema 3.1, diperoleh:

$$h(v_1) = f(v_1) = 2$$

$$h(v_2) = f(v_2) = 4$$

$$h(v_3) = f(v_3) = 1$$

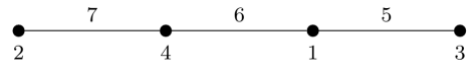
$$h(v_4) = f(v_4) = 3$$

$$\begin{aligned} h(v_1v_2) &= f(v_1) + f(v_2) + n + m - s \\ &= 2 + 4 + 4 + 3 - 6 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(v_2v_3) &= f(v_2) + f(v_3) + n + m - s \\ &= 4 + 1 + 4 + 3 - 6 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(v_3v_4) &= f(v_3) + f(v_4) + n + m - s \\ &= 1 + 3 + 4 + 3 - 6 = 5 \end{aligned}$$

Jadi, pelabelan h pada G dapat disajikan pada Gambar 3.3 berikut.

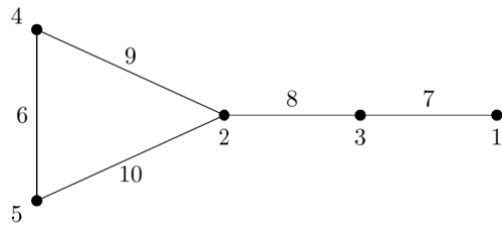


Gambar 3.3 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Lintasan P_4

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa, h adalah pelabelan anggun ajaib sisi super pada G dengan konstanta ajaib:

$$\begin{aligned} k &= |s - n - m| \\ &= |6 - 4 - 3| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Catatan: Perhatikan bahwa, konversi pernyataan dalam Teorema 3.1 bernilai salah. Sebagai contoh, perhatikan pelabelan anggun ajaib sisi super graf G pada Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Graf Anggun Ajaib Sisi Super

Dalam hal ini, $S = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ bukan lima bilangan bulat positif berurutan.

Berikut akan diberikan syarat perlu bagi fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ agar himpunan S memuat m bilangan bulat positif berurutan.

Teorema 3.2:

Misalkan G graf dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$ adalah graf anggun ajaib sisi super.

Himpunan $S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ memuat m bilangan bulat positif berurutan jika salah satu dari kondisi berikut dipenuhi:

- (i) $f(uv) > f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$
- (ii) $f(uv) < f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$

Bukti:

Misalkan fungsi

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m\}$$

merupakan pelabelan anggun ajaib sisi super pada graf G . Akibatnya, terdapat fungsi bijektif

$$f(V(G)) = \{1, 2, \dots, n\}$$

dan

$$f(E(G)) = \{n + 1, n + 2, \dots, n + m\}.$$

Jika $f(uv) > f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} S &= \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\} \\ &= \{f(uv) - k \mid uv \in E(G)\} \\ &= \{n + 1 - k, n + 2 - k, \dots, n + m - k\}. \end{aligned}$$

Hal ini berarti, S memuat m bilangan bulat positif berurutan.

Jika $f(uv) < f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} S &= \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\} \\ &= \{k + f(uv) \mid uv \in E(G)\} \\ &= \{k + n + 1, k + n + 2, \dots, k + n + m\}. \end{aligned}$$

Hal ini berarti, S memuat m bilangan bulat positif berurutan. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan disajikan jika G terhubung beraturan- r yang memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super, maka konstanta ajaibnya hanya bergantung pada banyaknya sisi G .

Teorema 3.3:

Misalkan G graf terhubung beraturan- r , $r \geq 1$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Jika G anggun ajaib sisi super dengan konstanta ajaib k , maka

$$k = \frac{m - 1}{2}$$

Bukti:

Karena G graf anggun ajaib sisi super, maka terdapat fungsi bijektif

$$f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m\} \ni \forall uv \in E(G), |f(u) + f(v) - f(uv)| = k.$$

Berikutnya akan dicari hubungan antara banyak sisi dan banyak titik pada graf terhubung beraturan- r dengan $r > 0$.

Karena G terhubung beraturan- r dengan n titik, maka

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = rn \quad (1)$$

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan (Teorema 2.1),

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2m \quad (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh:

$$rn = 2m$$

ekuivalen dengan

$$m = \frac{rn}{2}.$$

Jika $r = 1$, maka $m < n$. Dalam hal ini, $G = K_2$.

Jika $r = 2$, maka $m = n$. Dalam hal ini, $G = C_n$.

Jika $r > 2$, maka $m > n$. Jadi, jika $r \geq 2$, maka

$$m \geq n \quad (3)$$

Kasus 1: $r \geq 2$

Klaim: $\forall uv \in E(G), f(uv) > f(u) + f(v)$

Bukti klaim:

Andaikan $\exists uv \in E(G) \ni f(uv) \leq f(u) + f(v)$.

Misalkan $u \in V(G) \ni f(u) = n$. Karena f pelabelan anggun ajaib sisi super, maka

$$f(uv) = n + m - i, \text{ untuk suatu } i, 0 \leq i \leq m - 1$$

dan

$$f(v) = n - j, \text{ untuk suatu } j, 1 \leq j \leq n - 1$$

maka,

$$\begin{aligned} f(u) + f(v) - f(uv) &= n + n - j - (n + m - i) \\ &= n - m - j + i. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$k = n - m - j + i$$

ekuivalen dengan

$$m = n - k - j + i.$$

Akibatnya,

$$m < n.$$

Hal ini kontradiksi dengan (3)

Dari klaim, diperoleh:

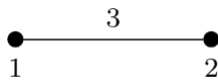
$$\begin{aligned} mk &= \sum_{uv \in E(G)} |f(uv) - (f(u) + f(v))| \\ &= \sum_{uv \in E(G)} f(uv) - \sum_{uv \in E(G)} (f(u) + f(v)) \\ &= \sum_{uv \in E(G)} f(uv) - \sum_{v \in V(G)} d(v)f(v) \\ &= \sum_{uv \in E(G)} f(uv) - \sum_{v \in V(G)} rf(v) \\ &\quad (\text{karena } G \text{ beraturan } - r) \\ &= \sum_{uv \in E(G)} f(uv) - r \sum_{v \in V(G)} f(v) \\ &= (n+1) + (n+2) + \dots + (n+m) - \\ &\quad r(1+2+\dots+n) \\ &= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right) + nm - r \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= mn + \left(\frac{m(m+1)}{2}\right) - \frac{2m}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{m} \left[mn + \left(\frac{m(m+1)}{2}\right) - \frac{2m}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \right] \\ &= n + \frac{m+1}{2} - (n+1) \\ &= \frac{m+1}{2} - 1 \\ &= \frac{m-1}{2}. \end{aligned}$$

Kasus 2: $r = 1$

Untuk $r = 1$, maka graf $G = K_2$. Dalam hal ini, satu-satunya pelabelan anggun ajaib sisi super adalah sebagai berikut:



Gambar 3. 5 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Graf Terhubung Beraturan-1

Dalam hal ini, konstanta ajaibnya adalah $k = \frac{m-1}{2} = 0$. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Selanjutnya, akan disajikan syarat perlu bagi sebuah graf memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.4:

Jika graf G dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$ memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super, maka $m \leq 2n - 3$.

Bukti:

Misal G graf anggun ajaib sisi super. Berdasarkan Teorema 3.2, himpunan

$$S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$$

memuat m bilangan bulat positif berurutan jika salah satu dari syarat berikut dipenuhi:

- (i) $f(uv) > f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$
- (ii) $f(uv) < f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$

Kasus 1: $s = \max\{S\}$

Dalam hal ini,

$$s = 2n - 1 \Leftrightarrow \exists uv \in E(G) \ni f(u) = n \wedge f(v) = n - 1$$

Klaim: $f(uv) = n + m$

Bukti klaim:

Andaikan $f(uv) < n + m$. Misalkan $f(uv) = n + m - i$, untuk suatu $i, 1 \leq i \leq m - 1$

Maka,

$$\begin{aligned} k &= |n + (n - 1) - (n + m - i)|, \text{ untuk suatu } i, 1 \leq i \leq m - 1 \\ k &= |2n - 1 - (n + m - i)| \end{aligned} \quad (4)$$

Misal $f(u) = x \wedge f(v) = y \wedge f(uv) = n + m$. Maka,

$$k = |x + y - (n + m)| \quad (5)$$

Dari (4) dan (5), diperoleh:

$$|x + y - (n + m)| = |2n - 1 - (n + m - i)| \quad (6)$$

Jika $f(uv) > f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka dari (6) diperoleh:

$$\begin{aligned} n + m - (x + y) &= n + m - i - (2n - 1) \\ x + y &= 2n + i - 1, \text{ untuk suatu } i, 1 \leq i \leq m - 1 \end{aligned}$$

Jika $f(uv) < f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka dari (6) diperoleh:

$$\begin{aligned} x + y - (n + m) &= 2n - 1 - (n + m - i) \\ x + y &= 2n - 1 + i, \text{ untuk suatu } i, 1 \leq i \leq m - 1 \end{aligned}$$

Maka,

$$x + y > 2n - 1$$

Kontradiksi dengan $s = 2n - 1$. Dengan demikian, klaim terbukti.

Oleh karena itu,

$$|f(u) + f(v) - f(uv)| = |n + (n - 1) - (n + m)| = |n - 1 - m| \leq k \quad (7)$$

Kasus 2: $s = \min\{S\}$

Dalam hal ini,

$$s = 3 \Leftrightarrow \exists uv \in E(G) \ni f(u) = 1 \wedge f(v) = 2$$

Klaim: $f(uv) = n + 1$

Bukti klaim:

Andaikan $f(uv) > n + 1$. Misalkan $f(uv) = n + i$, untuk suatu $i, 2 \leq i \leq m$

Maka,

$$k = |1 + 2 - (n + i)|, \text{ untuk suatu } i, 2 \leq i \leq m \\ k = |3 - (n + i)| \quad (8)$$

Misalkan $f(u) = x \wedge f(v) = y \wedge f(uv) = n + 1$.

Maka,

$$k = |x + y - (n + 1)| \quad (9)$$

Dari (8) dan (9), diperoleh:

$$|x + y - (n + 1)| = |3 - (n + i)| \quad (10)$$

Jika $f(uv) > f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka dari (10) diperoleh:

$$n + 1 - (x + y) = n + i - 3 \\ x + y = 4 - i, \text{ untuk suatu } i, 2 \leq i \leq m$$

Jika $f(uv) < f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$, maka dari (10) diperoleh:

$$x + y - (n + 1) = 3 - (n + i) \\ x + y = 4 - i, \text{ untuk suatu } i, 2 \leq i \leq m$$

Maka,

$$x + y \leq 4 - 2 = 2$$

Kontradiksi dengan $s = 3$. Dengan demikian, klaim terbukti.

Oleh karena itu,

$$|f(u) + f(v) - f(uv)| = |1 + 2 - (n + 1)| = |2 - n| \geq k \quad (11)$$

Dari (7) dan (11), diperoleh:

$$\begin{aligned} |n - 1 - m| &\leq |2 - n| \\ \Leftrightarrow |n - 1 - m - n| &\leq |2 - n - n| \\ &(\text{karena } n > 0) \\ \Leftrightarrow |-1 - m| &\leq |2 - 2n| \\ \Leftrightarrow |-m| &\leq |3 - 2n| \\ \Leftrightarrow m &\leq |3 - 2n| \\ \Leftrightarrow m &\leq -(3 - 2n) \end{aligned}$$

(karena $n \geq 2$)

$$\Leftrightarrow m \leq 2n - 3$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Teorema 3.5:

Jika G graf anggun ajaib sisi super, maka $\delta(G) \leq 3$.

Bukti:

Misalkan G graf anggun ajaib sisi super dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$.

Dari Teorema 3.4, diperoleh

$$m \leq 2n - 3 \quad (12)$$

Andaikan $\delta(G) \geq 4$, hal ini berarti $\forall v \in V(G), d(v) \geq 4$.

Akibatnya,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 4n \quad (13)$$

Berdasarkan Teorema Jabat Tangan (Teorema 2.1),

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = 2m \quad (14)$$

Dari (13) dan (14), diperoleh:

$$2m \geq 4n$$

Ekuivalen dengan

$$m \geq 2n > 2n - 3$$

Hal ini kontradiksi dengan (12).

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Selanjutnya, dengan bertumpu pada Teorema 3.4 dan Teorema 3.5 akan dijelaskan syarat perlu dan cukup untuk graf komplet K_n memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.6:

K_n adalah graf anggun ajaib sisi super jika dan hanya jika $n \leq 3$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Andaikan $n \geq 4$.

Kasus 1: $n = 4$

Karena $|V(K_4)| = 4$ dan $|E(K_4)| = 6$, maka

$$2|V(K_4)| - 3 = 2(4) - 3 = 5$$

Oleh karena itu,

$$|E(K_4)| = 6 > 5 = 2|V(K_4)| - 3$$

Berdasarkan Teorema 3.4, maka K_4 tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Kasus 2: $n \geq 5$

Dalam hal ini,

$$\delta(K_n) = n - 1 \geq 5 - 1 = 4$$

Berdasarkan Teorema 3.5, maka K_n tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

$(\Leftrightarrow) n \leq 3$

Ekuivalen dengan $n = 1 \vee n = 2 \vee n = 3$.

(i) Untuk $n = 1$

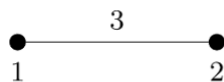
Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super graf komplet K_1 ditunjukkan pada Gambar 3.6



Gambar 3. 6 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Graf K_1

(ii) Untuk $n = 2$

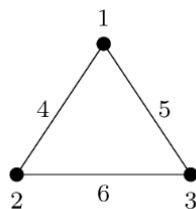
Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super graf komplet K_2 ditunjukkan pada Gambar 3.7



Gambar 3. 7 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Graf K_2

(iii) Untuk $n = 3$

Sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super graf komplet K_3 ditunjukkan pada Gambar 3.8



Gambar 3. 8 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Graf K_3

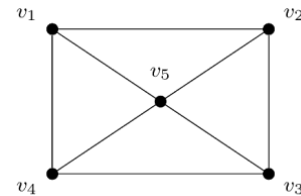
Oleh karena itu, diperoleh untuk $n \leq 3$, K_n merupakan graf anggun ajaib sisi super. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Definisi 3.2:

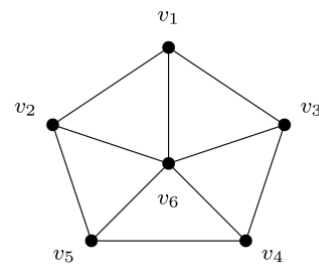
Graf yang diperoleh dari sebuah siklus C_n dengan $n \geq 3$ dan sebuah titik x di luar C_n dan menghubungkan titik x ke setiap titik di C_n dengan sebuah sisi graf yang dihasilkan disebut graf roda, dilambangkan dengan W_n . Selanjutnya, titik x disebut titik pusat dari roda.

Contoh 3.2:

Graf roda W_4 dan W_5 disajikan pada gambar berikut.



Gambar 3. 9 Graf roda W_4



Gambar 3. 10 Graf roda W_5

Catatan: Jelas bahwa $|V(W_n)| = n + 1$ dan $|E(W_n)| = 2n$.

Berikut dibuktikan graf roda W_n tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.7:

Jika W_n adalah sebuah roda, maka W_n bukan graf anggun ajaib sisi super.

Bukti:

Karena $|E(W_n)| = 2n$ dan

$$\begin{aligned} 2|V(W_n)| - 3 &= 2(n + 1) - 3 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$|E(W_n)| = 2n > 2n - 1 = 2|V(W_n)| - 3$$

Berdasarkan Teorema 3.4, graf W_n tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan beberapa kelas graf yang memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.8:

Jika P_n lintasan dengan $|V(G)| = n$, maka P_n adalah graf anggun ajaib sisi super.

Bukti:

Misalkan

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan

$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

Jelas bahwa $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n-1$.

Definisikan

$$f: V(P_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \ni$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ \frac{n-1+i}{2} + 1, & \text{untuk } i \text{ genap dan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n+i-2}{2} + 1, & \text{untuk } i \text{ genap dan } n \text{ genap} \end{cases}$$

(i) Untuk n ganjil

$$S = \{f(v_i) + f(v_{i+1}) \mid v_i v_{i+1} \in E(P_n)\}$$

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{n-1+i+1}{2} + 1$$

$$= \frac{n+2i+3}{2},$$

untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n-1$

Oleh karena itu,

$$S = \left\{ \frac{n+2i+3}{2} \mid 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \dots, \frac{3n+1}{2} \right\}$$

(ii) Untuk n genap

$$S = \{f(v_i) + f(v_{i+1}) \mid v_i v_{i+1} \in E(P_n)\}$$

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \frac{i+1}{2} + \frac{n+i+1-2}{2} + 1$$

$$= \frac{n+2i+2}{2},$$

untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n-1$

Oleh karena itu,

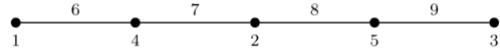
$$S = \left\{ \frac{n+2i+2}{2} \mid 1 \leq i \leq n-1 \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2}, \dots, \frac{3n}{2} \right\}$$

Perhatikan bahwa, untuk setiap kasus himpunan S memuat sebanyak $n-1$ bilangan bulat positif berurutan. Berdasarkan Teorema 3.1, P_n merupakan graf anggun ajaib sisi super. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.3:

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan pelabelan anggun ajaib sisi super pada lintasan P_5 dan P_8 mengikuti prosedur pengkonstruksian dalam pembuktian Teorema 3.8.



Gambar 3. 11 Lintasan P_5

$$S = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$s = 8$$

Gambar 3.11 merupakan sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super dengan konstanta ajaib $k = 1$.



Gambar 3. 12 Lintasan P_8

$$S = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$s = 12$$

Gambar 3.12 merupakan sebuah pelabelan anggun ajaib sisi super dengan konstanta ajaib $k = 3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa siklus dengan banyak titik ganjil memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.9:

Jika n ganjil, maka siklus C_n adalah graf anggun ajaib sisi super.

Bukti:

Misalkan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan

$$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}.$$

Karena $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n = 2t + 1$, maka konstruksi:

$$f: V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2t+1\} \ni$$

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \in \{1, 3, 5, \dots, 2t+1\} \\ \frac{2t+2+i}{2}, & \text{jika } i \in \{2, 4, \dots, 2t\} \end{cases}$$

Oleh karena itu,

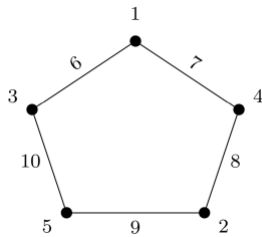
$$S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{f(v_i) + f(v_{i+1}) \mid i = 1, 3, \dots, 2t - 1\} \cup \\
 &\quad \{f(v_{2t+1}) + f(v_1)\} \cup \{f(v_i) + \\
 &\quad f(v_{i+1}) \mid i = 2, 4, \dots, 2t\} \\
 &= \left\{ \frac{i+1}{2} + \frac{2t+2+i+1}{2} \mid i = 1, 3, \dots, 2t - 1 \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ \frac{2t+1+1}{2} + \frac{1+1}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{2t+2+i}{2} + \frac{i+1+1}{2} \mid i = \right. \\
 &\quad \left. 2, 4, \dots, 2t \right\} \\
 &= \left\{ \frac{2t+2i+4}{2} \mid i = 1, 3, \dots, 2t - 1 \right\} \cup \left\{ \frac{2t+4}{2} \right\} \cup \\
 &\quad \left\{ \frac{2t+2i+4}{2} \mid i = 2, 4, \dots, 2t \right\} \\
 &= \left\{ \frac{2t+2i+4}{2} \mid i = 1, 2, 3, \dots, 2t \right\} \cup \left\{ \frac{2t+4}{2} \right\} \\
 &= \{t + i + 2 \mid i = 1, 2, 3, \dots, 2t\} \cup \{t + 2\} \\
 &= \{t + 3, t + 4, \dots, 3t + 2\} \cup \{t + 2\} \\
 &= \{t + 2, t + 3, t + 4, \dots, 3t + 2\}
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti, himpunan S memuat $m = 2t + 1$ bilangan bulat positif berurutan. Berdasarkan Teorema 3.1, maka f adalah pelabelan anggun ajaib sisi super. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.4:

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan pelabelan anggun ajaib sisi super pada siklus C_5 mengikuti prosedur pengonstruksian Teorema 3.9.



Gambar 3. 13 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada Sikel C_5

$$\begin{aligned}
 n &= 2t + 1 = 5 \\
 t &= 2 \\
 S &= \{4, 5, 6, 7, 8\} \\
 s &= 8
 \end{aligned}$$

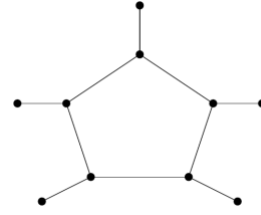
Definisi 3.3:

Titik pada graf yang berderajat 1 disebut titik *pendant*. Sisi graf yang terkait dengan titik *pendant* disebut sisi *pendant*. Sebuah graf yang diperoleh dari siklus C_n dan menambahkan sebuah sisi *pendant* pada setiap titik C_n disebut graf mahkota, dilambangkan dengan C_n^+ .

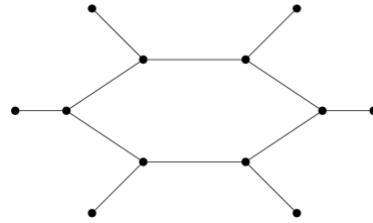
Perhatikan bahwa $|V(C_n^+)| = |E(C_n^+)| = 2n$.

Contoh 3.5:

Graf C_5^+ dan C_6^+ disajikan pada gambar berikut.



Gambar 3. 14 Graf mahkota C_5^+



Gambar 3. 15 Graf mahkota C_6^+

Berikut dibuktikan bahwa jika n ganjil, maka graf mahkota C_n^+ memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super.

Teorema 3.10:

Jika n ganjil, maka graf C_n^+ adalah graf anggun ajaib sisi super.

Bukti:

Misalkan himpunan titik C_n pada graf C_n^+ adalah

$$V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan himpunan titik-titik *pendant* pada C_n^+ adalah

$$V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Himpunan sisi C_n pada graf C_n^+ adalah

$$E_1 = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_n v_1\}$$

dan himpunan sisi-sisi *pendant* pada C_n^+ adalah

$$E_2 = \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Definisikan fungsi

$$\begin{aligned}
 f: V(C_n^+) &\rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\} \ni \\
 f(v_i) &= \begin{cases} i, & \text{jika } i \in \{1, 3, 5, \dots, n\} \\ n + i, & \text{jika } i \in \{2, 4, 6, \dots, n - 1\} \end{cases} \\
 &\text{dan} \\
 f(u_i) &= \begin{cases} n + i, & \text{jika } i \in \{1, 3, 5, \dots, n\} \\ i, & \text{jika } i \in \{2, 4, 6, \dots, n - 1\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

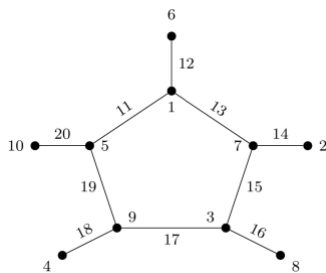
Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 S &= \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(C_n^+)\} \\
 &= \{f(v_i) + f(v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \\
 &\quad \{f(v_n) + f(v_1)\} \cup \{f(v_i) + f(u_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \\
 &= \{i + n + i + 1 \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{n + 1\} \cup \{i + n + i \mid 1 \leq i \leq n\} \\
 &= \{n + 2i + 1 \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{n + 1\} \cup \{n + 2i \mid 1 \leq i \leq n\} \\
 &= \{n + 3, n + 5, \dots, 3n - 1\} \cup \{n + 1\} \cup \{n + 2, n + 4, \dots, 3n\} \\
 &= \{n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5, \dots, 3n\}
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti, himpunan S memuat $m = 2n$ bilangan bulat positif berurutan. Berdasarkan Teorema 3.1, maka f adalah pelabelan anggun ajaib sisi super. Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Contoh 3.6:

Sebagai ilustrasi, berikut diberikan pelabelan anggun ajaib sisi super pada graf C_5^+ mengikuti prosedur pengkonstruksian dalam teorema di atas.



Gambar 3. 16 Pelabelan Anggun Ajaib Sisi Super pada C_5^+

$$\begin{aligned}
 S &= \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\} \\
 s &= 15
 \end{aligned}$$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pemaparan pada bab sebelumnya, dapat dirumuskan beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Syarat perlu suatu graf dengan n titik dan m sisi memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super adalah $m \leq 2n - 3$.
2. Syarat cukup suatu graf memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super adalah misalkan G

graf dengan n titik dan m sisi. Jika ada fungsi bijektif

$$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

sedemikian hingga himpunan

$$S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$$

memuat m bilangan bulat positif berurutan.

3. Beberapa kelas graf yang memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super:
 - a. Graf komplet K_n adalah graf anggun ajaib sisi super jika dan hanya jika $n \leq 3$.
 - b. Setiap lintasan P_n merupakan graf anggun ajaib sisi super.
 - c. Sikel C_n dengan n ganjil adalah graf anggun ajaib sisi super.
 - d. Graf mahkota C_n^+ dengan n ganjil adalah graf anggun ajaib sisi super.
4. Kelas graf yang tidak memiliki pelabelan anggun ajaib sisi super:
 - a. Graf roda W_n
 - b. Graf komplet $K_n, n \geq 4$
 - c. Setiap graf yang banyak sisinya melebihi 2 kali banyak titik dikurangi 3.

SARAN

Dalam skripsi ini, pembahasan dibatasi pada graf komplet K_n , lintasan P_n , sikel C_n , dan graf mahkota C_n^+ . Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca untuk dapat mengembangkan penelitian lebih lanjut dengan mengkaji dan menemukan graf anggun ajaib sisi super selain graf-graf yang telah dibahas.

DAFTAR PUSTAKA

- Afifah, L., & Budayasa, I. K. (2023). Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, Dan Graf Corona Khusus. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(3), 368-382. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n3.p368-382>
- Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya. Surabaya: Unesa University Press.
- Dian Noer Indah Sari, B. R. (2008). *Komplit Reguler K-Partit, Graf Roda, Graf Bisikel, Dan Graf Trisikel*. 1-7.
- Enomoto, H., Llado, A. S., Nakamigawa, T., & Ringel, G. (1998). Super edge-magic graphs. *SUT Journal of Mathematics*, 34(2), 105-109.

- Irawati, N., & Heri, R. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Complete Graph. *Matematika*, 13(3), 136–142.
- Marimuthu, G., & Balakrishnan, M. (2014). Super edge magic graceful graphs. *Information Sciences*, 287, 140–151.
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.07.027>
- Marimuthu, G., Kavitha, S., & Balakrishnan, M. (2015). Super Edge Magic Graceful Labeling of Generalized Petersen Graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 48, 235–241.
<https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.05.035>
- Marzuki, C. C., Susiyanti, & Yudianti, L. (2018). Nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali korona. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 4(2), 45–53.
- Wardhani, D. A., & Budayasa, I. K. (2019). Pelabelan anggun-ajaib-sisi super pada graf Petersen yang diperumum. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(2), 1–5.