

BILANGAN KROMATIK TOTAL KUAT- d PADA GRAF

Lingkan Rahmawati

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: lingkan.22062@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Pewarnaan total kuat pada graf G adalah sebuah fungsi $c: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dimana $V(G)$ adalah himpunan titik G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi G , sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung dan setiap dua sisi yang terkait dengan titik yang sama mendapat warna berbeda. Misalkan $v \in V(G)$. Himpunan warna v dinotasikan dengan $C(v)$ adalah himpunan warna semua sisi G yang terkait dengan v digabung warna titik v . Sebuah pewarnaan-total kuat dikatakan membedakan titik u dan titik v jika $C(u) \neq C(v)$. Misalkan G graf dan $d \in \mathbb{Z}^+$, pewarnaan total kuat- d pada G adalah sebuah pewarnaan total kuat sedemikian hingga setiap dua titik u dan v di G dengan $1 \leq d(u, v) \leq d$, $C(u) \neq C(v)$. Bilangan kromatik total kuat- d pada G , dinotasikan $\chi_d''(G)$, yaitu minimum banyaknya warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan total kuat- d pada G . Pada penelitian ini, akan diperoleh bilangan kromatik total kuat- d pada graf Lintasan P_n dan graf Sikel C_n .

Kata Kunci: Pewarnaan total kuat, Pewarnaan total kuat- d , Bilangan kromatik total kuat- d , Graf Lintasan, Graf Sikel.

Abstract

A strong total coloring of a graph G is a function $c: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, where $V(G)$ is the set of vertices G and $E(G)$ is the set of edge G , such that any two directly connected vertices and any two edges connected to the same vertex are assigned different colors. Suppose $v \in V(G)$. The set of colors for v denoted by $C(v)$ is the set of colors for all edges of G connected to v combines with the color of vertex v . A strong total coloring is said to distinguish vertex u and v if $C(u) \neq C(v)$. Suppose G is a graph and $d \in \mathbb{Z}^+$, a d -strong total coloring on G is a strong total coloring such that for any two vertices u and v in G with $1 \leq d(u, v) \leq d$, $C(u) \neq C(v)$. The d -strong total chromatic number of G , denoted by $\chi_d''(G)$, is the minimum number of colors needed for a d -strong total coloring of G . In this research, the d -strong total chromatic number will be obtained for Path Graph P_n and Cycle Graph C_n .

Keywords: Strong total coloring, d -strong total coloring, d -strong total chromatic numbers, Path Graph, Cycle Graph.

PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang memiliki peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, baik sebagai alat bantu dalam berbagai bidang ilmu lain maupun dalam pengembangan ilmu matematika itu sendiri. Salah satu cabang matematika yang berkembang pesat dan memiliki banyak aplikasi adalah teori graf. Teori graf mulai dikenal sejak tahun 1736, dimulai dengan jurnal pertama oleh Euler, matematikawan asal Swiss yang membahas masalah Jembatan Königsberg. Pada awal perkembangannya,

teori graf lebih banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan teka-teki. Namun, dalam beberapa puluh tahun terakhir, teori graf berkembang sangat pesat karena aplikasinya yang luas dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, teknik, sains, bisnis, dan ilmu sosial.

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ yang disebut himpunan titik (*vertex*) dan himpunan (dapat kosong) $E(G)$ yang disebut himpunan sisi (*edge*), sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ dapat dinyatakan sebagai pasang tak-terurut titik di $V(G)$. Dalam teori

graf, terdapat berbagai topik kajian, antara lain lintasan, sirkuit, keterhubungan, graf khusus, pohon, pelabelan graf, pewarnaan graf, serta aplikasi graf.

Pewarnaan graf merupakan salah satu topik penting dalam teori graf yang memiliki banyak aplikasi, seperti pada penjadwalan, pembagian tugas, pengaturan frekuensi radio, desain jaringan, dan berbagai permasalahan optimasi lainnya. Secara umum, pewarnaan graf dibedakan menjadi pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Salah satu pengembangan dari konsep tersebut adalah pewarnaan total, yaitu pewarnaan yang diberikan pada titik dan sisi sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung dan setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memperoleh warna berbeda.

Konsep ini diperluas menjadi pewarnaan-total kuat sejati yang pertama kali diperkenalkan oleh Zhang dkk (2005) dalam paper *On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs*. Selanjutnya, konsep tersebut dikembangkan lebih lanjut oleh Dieter Kemnitz dan Francesco Marangio (2015) melalui konsep pewarnaan-total kuat- d .

Suatu pewarnaan-total kuat- d pada graf G adalah sebuah fungsi

$$c: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\},$$

sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung memiliki warna berbeda, setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama memiliki warna berbeda, dan untuk setiap dua titik u dan v dengan jarak $1 \leq d(u, v) \leq d$, berlaku $C(u) \neq C(v)$, di mana $C(v)$ adalah himpunan warna titik v beserta semua sisi yang terkait dengan titik itu. Minimum banyaknya warna yang diperlukan dalam pewarnaan-total kuat- d pada G dinotasikan dengan $\chi_d''(G)$ disebut bilangan kromatik total kuat- d , dan didefinisikan sebagai:

$$\chi_d''(G) = \min\{k | \text{terdapat pewarnaan total kuat-} (d) \text{ pada } G\}.$$

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik total kuat- d pada graf lintasan (P_n) dan graf sikel (C_n).

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Sebuah graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan (dapat kosong) $E(G)$

dari elemen yang disebut sisi, sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ dapat dinyatakan sebagai pasang tak-terurut titik di $V(G)$. $V(G)$ disebut himpunan titik G , dan $E(G)$ disebut himpunan sisi G . Jika $e = uv$ adalah sisi di G , maka u dan v adalah titik yang berhubungan langsung (*adjacent*), sisi e terkait langsung (*incident*) dengan titik v dan titik u . Graf G disebut graf berhingga jika banyak titik dan banyak sisi di G berhingga, dan disebut graf takhingga jika banyak titik dan banyak sisi takhingga.

Definisi 2.2:

Gelung (*loop*) adalah sebuah sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan titik itu sendiri. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan v pada graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi rangkap/sisi ganda (*multiple edges*). Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung.

Definisi 2.3:

Sebuah graf H disebut subgraf dari G , ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

Definisi 2.4:

Misalkan G graf. Jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i merupakan titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir dari W , titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W . Panjang jalan W adalah banyaknya sisi pada W . Sebuah titik G mungkin muncul lebih dari satu kali pada jalan W , begitu juga sisi G boleh muncul lebih dari satu kali pada jalan W . Jalan W dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhir sama, dan dikatakan terbuka jika titik awal dan titik akhir berbeda. Jika sisi-sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ pada jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jejak dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhir adalah sama. Jejak dikatakan terbuka jika titik awal dan titik akhir berbeda. Jejak tertutup yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut sirkuit. Jejak tertutup yang titik awal dan semua titik internal berbeda disebut sikel (*cycle*). Banyaknya sisi pada suatu sikel disebut panjang sikel. Jika titik-titik

$v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ pada jalan W berbeda, maka W disebut lintasan (*path*). Lintasan dengan k titik dinotasikan dengan P_k . Lintasan terpendek (*shortest path*) adalah lintasan minimum yang diperlukan untuk mencapai suatu titik dari titik tertentu.

Definisi 2.5:

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik berbeda di G terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika tidak dipenuhi, maka graf G takterhubung (*disconnected*). Komponen graf G adalah subgraf terhubung maksimal (titik dan sisi) di G .

Definisi 2.6:

Misalkan G graf dengan v sebuah titik di G . Derajat (*degree*) titik v dinotasikan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan, setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum G dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil pada sebuah titik G dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}.$$

Sedangkan derajat maksimum G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar pada sebuah titik G dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}.$$

Definisi 2.7:

Misalkan G graf dengan $u, v \in V(G)$. Jarak dari titik u ke titik v di G dinotasikan dengan $d_G(u, v)$ atau $d(u, v)$ adalah banyaknya sisi pada lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G . Jika tidak terdapat lintasan yang menghubungkan titik u ke titik v , maka $d(u, v) = \infty$.

Definisi 2.8:

Graf komplet (graf lengkap) adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi, dinotasikan K_n .

Definisi 2.9:

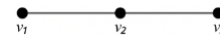
Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B , disebut (A, B) bipartisi dari G . Graf G disebut graf bipartit komplet jika G sederhana dan bipartisi

dengan bipartisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A terhubung dengan setiap titik di B , yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$ dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$. Graf bipartit komplet $K_{m,n}$ memiliki $m + n$ titik dan mn sisi.

Definisi 2.10:

Graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n adalah graf yang mempunyai tepat satu lintasan dengan n titik dan panjang $n-1$. Lintasan takhingga dinotasikan dengan (P_∞) adalah lintasan yang memiliki banyak sisi takhingga dan dapat berlanjut tanpa batas. Lintasan takhingga didefinisikan sebagai kumpulan titik yang tidak pernah kembali ke titik asal, sehingga membentuk lintasan yang terus berlanjut.

Contoh:



Gambar 1. Graf lintasan

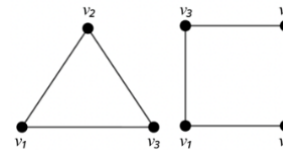


Gambar 2. Graf lintasan Takhingga

Definisi 2.11:

Graf siklus yang dinotasikan dengan C_n adalah graf terhubung dan sederhana yang setiap titiknya berderajat dua.

Contoh:

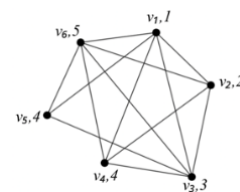


Gambar 3. Graf siklus dengan 3 titik dan 4 titik

Definisi 2.12:

Misalkan G graf, pewarnaan- k pada G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik di G yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda. Sebuah pewarnaan- k pada graf G ditunjukkan dengan melabeli titik-titik G dengan warna $1, 2, 3, \dots, k$.

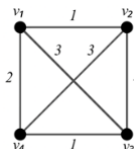
Contoh:



Gambar 4. Pewarnaan titik dengan 5 warna

Definisi 2.13:

Misalkan G graf. Sebuah pewarnaan-sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait dengan titik yang sama memperoleh warna berbeda. Sebuah pewarnaan-sisi- k pada graf G ditunjukkan dengan melabeli sisi-sisi G dengan warna $1, 2, 3, \dots, k$.

Contoh:

Gambar 5. Pewarnaan sisi dengan 3 warna

Definisi 2.14:

Misalkan G graf, bilangan kromatik graf G , dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G , sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda, dan didefinisikan sebagai berikut:

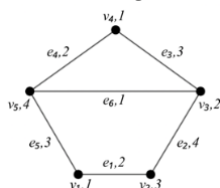
$$\chi(G) = \min\{k \mid \text{ada pewarnaan - titik - } k \text{ pada } G\}$$

Misalkan G graf, indeks kromatik graf G , dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan yang menyatakan minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi di G yang terkait dengan titik yang sama memperoleh warna berbeda, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\chi'(G) = \min\{k \mid \text{ada pewarnaan - sisi - } k \text{ pada } G\}$$

Definisi 2.15:

Misalkan G graf. Pewarnaan-total pada graf G adalah pemberian warna sisi dan titik G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung, dan dua sisi yang terkait dengan titik yang sama, baik titik maupun sisi mendapat warna beda. Pewarnaan-total- k pada G ditunjukkan dengan melabeli titik dan sisi G dengan k warna.



Gambar 6. Pewarnaan total dengan 4 warna

Definisi 2.16:

Bilangan kromatik total G yang dinotasikan dengan $\chi''(G)$ adalah minimum banyaknya warna yang dibutuhkan untuk mewarnai semua titik dan semua sisi di G , sehingga setiap dua titik yang berhubungan langsung, serta dua sisi yang terkait dengan titik yang sama memperoleh warna berbeda. Bilangan kromatik total didefinisikan:

$$\chi''(G) = \min\{k \mid \text{ada pewarnaan - total - } k \text{ pada } G\}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN**Definisi 3.1**

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Sebuah pewarnaan-total kuat sejati pada G adalah fungsi:

$$c: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\},$$

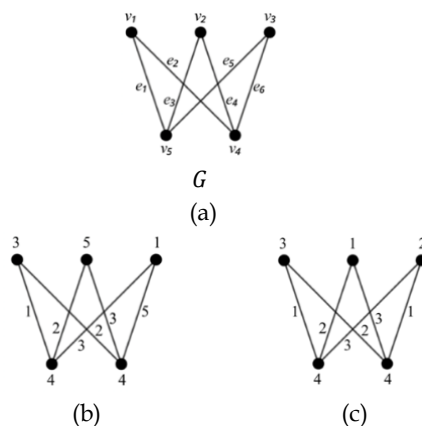
dengan $k \in \mathbb{Z}^+$, sedemikian hingga:

- (i) setiap dua titik G yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda; dan
- (ii) setiap dua sisi G yang terkait dengan titik yang sama mendapat warna berbeda.

Misalkan $v \in V(G)$. Himpunan warna v yang dinotasikan dengan $C(v)$, adalah himpunan warna semua sisi G yang terkait dengan v digabung warna titik v atau

$$C(v) = \{c(e) \mid e = vw \in E(G)\} \cup \{c(v)\}$$

Sebuah pewarnaan-total kuat sejati c membedakan titik u dan titik v jika $C(u) \neq C(v)$. Bilangan kromatik total kuat sejati pada graf G , dinotasikan dengan $\chi_s''(G)$, adalah minimum banyaknya warna pada pewarnaan-total kuat sejati pada G , sedemikian hingga $\forall u, v \in V(G), C(u) \neq C(v)$.

Contoh:

Gambar 7. (a) Graf bipartit lengkap $K_{3,2}$; (b) Pewarnaan total kuat sejati dengan 5 warna; (c) Pewarnaan total sejati dengan 4 warna

Gambar 7.(b). memperlihatkan sebuah pewarnaan total kuat sejati dengan 5 warna, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ sedemikian hingga $C(v_1) = \{1,2,3\}$, $C(v_2) = \{2,3,5\}$, $C(v_3) = \{1,3,5\}$, $C(v_4) = \{2,3,4,5\}$, dan $C(v_5) = \{1,2,3,4\}$. Karena semua titik mempunyai himpunan warna berbeda, maka pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan total kuat sejati. Gambar 7.(c). memperlihatkan sebuah pewarnaan total sejati dengan 4 warna, perhatikan bahwa $C(v_1) = \{1,2,3\}$, $C(v_2) = \{1,2,3\}$, $C(v_3) = \{1,2,3\}$, $C(v_4) = \{1,2,3,4\}$, dan $C(v_5) = \{1,2,3,4\}$. Pewarnaan tersebut bukan pewarnaan total kuat sejati karena $C(v_4) = C(v_5)$. Karena tidak ada pewarnaan total kuat sejati pada G dengan kurang dari 5 warna, maka

$$\chi''_s(G) = 5$$

Definisi 3.2

Bilangan kromatik total kuat *adjacent* sejati pada G , dinotasikan dengan $\chi''_{as}(G)$, adalah minimum banyaknya warna pada pewarnaan total kuat sejati pada G sedemikian hingga setiap dua titik u dan v yang berhubungan langsung di G berlaku $C(u) \neq C(v)$.

Contoh:

Perhatikan pewarnaan total kuat sejati dari graf $G = K_{3,2}$ pada Gambar 7.(c). Pada pewarnaan tersebut setiap dua titik yang berhubungan langsung memiliki himpunan warna berbeda. Dengan demikian, pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan total kuat sejati berhubungan langsung dengan 4 warna, maka

$$\chi''_{as}(K_{3,2}) = 4$$

Definisi 3.3

Misalkan G graf dan $d \in \mathbb{Z}^+$, sebuah pewarnaan total kuat- d pada G adalah sebuah pewarnaan total kuat sejati pada G sedemikian hingga setiap dua titik u dan v di G yang memenuhi $1 \leq d(u, v) \leq d$ berlaku $C(u) \neq C(v)$. Minimum banyaknya warna pada pewarnaan total kuat- d pada G , dinotasikan dengan χ''_d disebut bilangan kromatik total kuat- d .

Catatan: Jika G graf sederhana, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berhubungan langsung di G berlaku $d(u, v) = 1$.

Akibatnya, $\chi''_{as}(G) = \chi''_1(G)$.

Contoh:

Pada Gambar 7.(c). diperlihatkan bahwa $\chi''_{as}(K_{3,2}) = 4$. Dengan demikian, $\chi''_1(K_{3,2}) = 4$. Untuk $d = 2$, dapat ditunjukkan bahwa $\chi''_2(K_{3,2}) = 5$. Pewarnaan total kuat-2 diperlihatkan pada Gambar 7.(b).

Lemma 3.1

Jika G graf dengan $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ dan $t_1 \leq t_2$, maka

$$\chi''_{t_1}(G) \leq \chi''_{t_2}(G)$$

Bukti:

Misalkan G memiliki sebuah pewarnaan total kuat sejati t_2 , untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$ yang memenuhi $1 \leq d(u, v) \leq t_2$ berlaku $C(u) \neq C(v)$. Karena $t_1 \leq t_2$, akibatnya untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$ dengan $1 \leq d(u, v) \leq t_1$ juga berlaku $C(u) \neq C(v)$. Dengan demikian, pewarnaan total kuat sejati t_2 juga merupakan pewarnaan total kuat sejati t_1 .

Oleh karena itu,

$$\chi''_{t_1}(G) \leq \chi''_{t_2}(G)$$

Lemma terbukti. ■

Lemma 3.2

Jika G graf dan $G_1, G_2, \dots, G_t$ adalah t komponen berbeda G , maka

$$\chi''_d(G) = \max\{\chi''_d(G_i) / 1 \leq i \leq t\}$$

Bukti:

Karena setiap dua titik di G yang terletak pada komponen berbeda memiliki jarak lebih besar dari d , sehingga titik-titik tersebut boleh memiliki himpunan warna yang sama. Oleh karena itu, pewarnaan total kuat- d pada G dapat dibangun secara terpisah pada setiap komponennya.

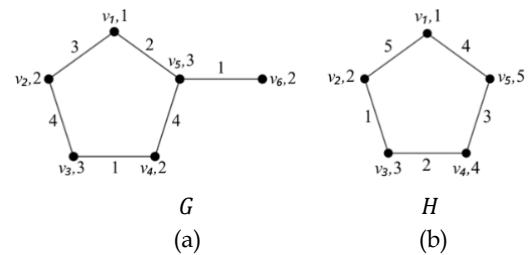
Akibatnya, bilangan kromatik total kuat- d dari G ditentukan oleh komponen dengan bilangan kromatik total kuat- d maksimum, yaitu

$$\chi''_d(G) = \max\{\chi''_d(G_i) / 1 \leq i \leq t\}$$

Lemma terbukti. ■

Catatan: Jika H subgraf G maka $\chi''_d(H)$ belum tentu lebih kecil atau sama dengan $\chi''_d(G)$.

Contoh:



Gambar 8. (a) Pewarnaan total kuat-2 dengan 4 warna; (b) Pewarnaan total kuat-2 dengan 5 warna

Pada H , $\chi_2''(H) = 5$ sedangkan $\chi_2''(G) = 4$. Dengan demikian, $\chi_2''(H) > \chi_2''(G)$.

Lemma 3.3

Jika G sebuah graf dan $d \in \mathbb{Z}^+$, maka

$$\chi_d''(G) \leq \chi_s''(G)$$

Bukti:

Misalkan G graf. Pikirkan sebuah pewarnaan total kuat sejati di G . Pada pewarnaan ini, setiap dua titik u dan v di G memiliki himpunan warna berbeda, yaitu $C(u) \neq C(v)$. Sementara itu, pada pewarnaan total kuat- d pada G , hanya disyaratkan bahwa setiap dua titik u dan v dengan $1 \leq d(u, v) \leq d$ juga berlaku $C(u) \neq C(v)$.

Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.1 dan Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(G) \leq \chi_s''(G)$$

Lemma terbukti ■

Menentukan nilai eksak dari $\chi_d''(G)$ sangat sulit untuk sebarang graf, kecuali untuk kelas-kelas graf tertentu. Berikut, diselidiki nilai $\chi_d''(P_n)$ dengan P_n adalah lintasan dengan n titik. Kita awali dengan Lemma berikut.

Lemma 3.4:

Jika P_n lintasan dengan n titik, maka

$$\chi_d''(P_n) = \begin{cases} 1, n = 1, \\ 3, n = 2, \\ 4, n = 3, \\ 4, n \geq 4; 1 \leq d \leq 3, \\ 5, n \geq 4; 4 \leq d \leq 9. \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1: $n = 1$

Trivial

Kasus 2: $n = 2$

Jika $n = 2$, maka $P_2 = K_2$. Graf ini memiliki dua titik yang saling berhubungan langsung dan satu sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Pada pewarnaan total kuat- d , setiap dua titik yang berhubungan langsung memiliki warna berbeda, dan setiap sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut juga harus memiliki warna berbeda. Dengan demikian, diperlukan paling sedikit tiga warna berbeda. Berarti,

$$\chi_d''(P_2) \geq 3 \dots (1)$$

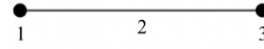
Berdasarkan Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(P_2) \leq 3 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan bahwa

$$\chi_d''(P_2) = 3$$

Berikut sebuah pewarnaan total kuat- d pada P_2 menggunakan 3 warna berbeda



Gambar 9. Pewarnaan total kuat- d pada P_2 menggunakan 3 warna

Kasus 3: $n = 3$

Perhatikan bahwa lintasan P_3 memiliki tiga titik, yaitu dua titik ujung yang berderajat 1 dan satu titik internal yang berderajat 2. Pada pewarnaan total kuat- d , setiap dua titik yang berhubungan langsung memiliki warna berbeda, dan setiap sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut juga harus memiliki warna berbeda. Titik internal pada P_3 memiliki himpunan warna yang terdiri dari warna titik tersebut dan warna dua sisi yang terkait. Akibatnya, himpunan warna pada titik internal harus berbeda dari himpunan warna pada kedua titik ujung. Dengan demikian, tidak mungkin terdapat pewarnaan total kuat- d pada P_3 yang menggunakan kurang dari 4 warna.

Berarti,

$$\chi_d''(P_3) \geq 4 \dots (3)$$

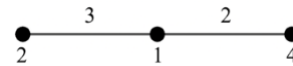
Berdasarkan Definisi 3.3,

$$\chi_d''(P_3) \leq 4 \dots (4)$$

Dari (3) dan (4) disimpulkan bahwa

$$\chi_d''(P_3) = 4$$

Dalam hal ini, sebuah pewarnaan total kuat- d dengan menggunakan 4 warna diperlihatkan pada Gambar 10.



Gambar 10. Pewarnaan total kuat- d pada P_3 menggunakan 4 warna

Kasus 4: $n \geq 4; 1 \leq d \leq 3$

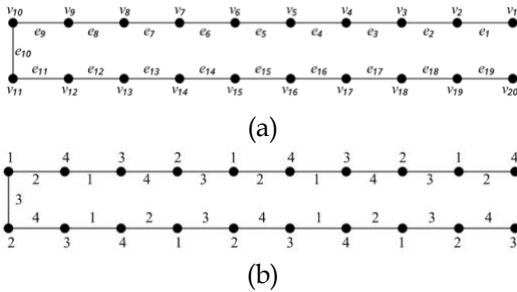
Setiap titik internal pada lintasan P_n berderajat 2, sehingga dalam pewarnaan total kuat sejati, himpunan warna pada setiap titik internal diperlukan 3 warna berbeda, yaitu warna titik dan warna dua sisi yang terkait dengan titik itu. Dengan kata lain, untuk setiap titik internal $v \in V(P_n)$, karena $d(v) = 2$ berlaku $|C(v)| = 3$ dengan $C(v) = \{i, j, k\}$ dan $\{i, j, k\}$ berbeda. Dalam pewarnaan total kuat- d

pada P_n , $\forall v \in V(P_n)$ dengan $1 \leq d(u, v) \leq d, C(u) \neq C(v)$.

Akibatnya, terdapat sebanyak $d + 1$ titik internal berurutan pada P_n yang seluruhnya harus memiliki himpunan warna berbeda. Karena setiap himpunan warna pada titik internal adalah 3, maka banyaknya kemungkinan himpunan warna yang dapat dibentuk dari k warna adalah $\binom{k}{3}$. Pada lintasan P_n , ambil $d + 1$ titik internal berurutan. Jarak antara dua titik terjauh di antara titik-titik tersebut adalah d . Oleh karena itu, setiap pasangan titik di antara $d + 1$ titik internal tersebut memiliki jarak paling besar d . Dengan demikian, seluruh titik tersebut harus memiliki himpunan warna berbeda, berlaku $\binom{k}{3} \geq d + 1$.

Karena pada kasus ini, $1 \leq d \leq 3$, maka $d + 1 \leq 4$. Nilai minimum k yang memenuhi $\binom{k}{3} \geq 4$ adalah $k = 4$, karena $\binom{4}{3} = 4$. Dalam hal ini, 4 titik internal yang berurutan dapat memiliki himpunan warna sebagai berikut: $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}$.

Teknik pewarnaan dapat dilakukan secara siklik dan periodik. Dengan formula sebagai berikut:



Gambar 11. (a) Graf lintasan dengan 20 titik (P_{20});
(b) Pewarnaan total kuat- d pada $n \geq 4; 1 \leq d \leq 3$

Misalkan P_n adalah lintasan dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi-sisi $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Definisikan fungsi

$$f: V(P_n) \cup E(P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

sedemikian hingga, $\forall v_i \in V(P_n)$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1, & i \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2, & i \equiv 3 \pmod{4}, \\ 3, & i \equiv 0 \pmod{4}, \\ 4, & i \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

$\forall e_i \in E(P_n)$

$$f(e_i) = \begin{cases} 1, & i \equiv 0 \pmod{4}, \\ 2, & i \equiv 1 \pmod{4}, \\ 3, & i \equiv 2 \pmod{4}, \\ 4, & i \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Berdasarkan konstruksi tersebut, pewarnaan f merupakan pewarnaan total kuat- d dengan $1 \leq d \leq 3$ pada P_n dengan menggunakan 4 warna, karena

setiap dua titik $u, v \in (P_n)$ dengan $1 \leq d(u, v) \leq d$, berlaku $C(u) \neq C(v)$. Dengan demikian, dari Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(P_n) \leq 4 \dots (5)$$

Karena $1 \leq d \leq 3$, maka tidak ada pewarnaan total kuat- d pada P_n dengan menggunakan kurang dari 4 warna, sehingga

$$\chi_d''(P_n) \geq 4 \dots (6)$$

Dari (5) dan (6) disimpulkan bahwa

$$\chi_d''(P_n) = 4$$

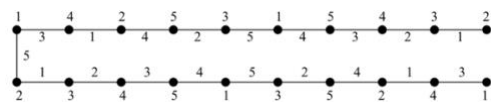
Kasus 5: $n \geq 4; 4 \leq d \leq 9$

Dalam pewarnaan total kuat- d pada P_n , untuk setiap dua titik $u, v \in V(P_n)$ dengan $1 \leq d(u, v) \leq d, C(u) \neq C(v)$. Akibatnya, terdapat sebanyak $d + 1$ titik internal yang berurutan pada P_n , yang harus memiliki himpunan warna titik berbeda. Setiap titik internal pada P_n berderajat 2, sehingga kardinalitas himpunan warna pada setiap titik adalah 3. Oleh karena itu, banyaknya himpunan warna berbeda yang dapat dibentuk dari k warna adalah $\binom{k}{3}$. Agar memenuhi syarat pewarnaan total kuat- d berlaku $\binom{k}{3} \geq d + 1$.

Karena pada kasus ini, $4 \leq d \leq 9$, maka $d + 1 \leq 10$. Nilai minimum k yang memenuhi $\binom{k}{3} \geq 10$ adalah $k = 5$, karena $\binom{5}{3} = 10$. Dengan demikian, diperlukan paling sedikit 5 warna dalam pewarnaan total kuat- d pada P_n . Dalam hal ini, 10 titik internal yang berurutan dapat memiliki himpunan warna sebagai berikut: $\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,2,5\}$.

Teknik pewarnaan dapat dilakukan secara siklik dan periodik. Dengan formula sebagai berikut:

Perhatikan Gambar 11.(a). Selanjutnya akan dilakukan konstruksi pewarnaan sebagai berikut:



Gambar 12. Pewarnaan total kuat- d pada $n \geq 4; 4 \leq d \leq 9$

Misalkan P_n adalah lintasan dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan sisi-sisi $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Definisikan fungsi

$$g: V(P_n) \cup E(P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

sedemikian hingga, $\forall v_i \in V(P_n)$

$$\forall e_i \in E(P_n)$$

Berdasarkan konstruksi tersebut, pewarnaan g merupakan pewarnaan total kuat- d pada P_n dengan menggunakan 5 warna, karena setiap dua titik $u, v \in (P_n)$ dengan $1 \leq d(u, v) \leq d$, dengan $4 \leq d \leq 9$, $C(u) \neq C(v)$. Dengan demikian, dari Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(P_n) \leq 5 \dots\dots(7)$$

Karena tidak ada pewarnaan total kuat- d pada P_n dengan $4 \leq d \leq 9$ menggunakan kurang dari 5 warna, sehingga

$$\chi_d''(P_n) \geq 5 \dots (8)$$

Dari (7) dan (8) disimpulkan bahwa

$$\chi_d''(P_n) = 5$$

Lemma terbukti.

Jika $d, k \in \mathbb{Z}^+$ dengan $\binom{k-1}{3} < d+1 \leq \binom{k}{3}$ dan P_∞ lintasan tak hingga, maka

$$\chi_d''(P_\infty) = k$$

Karena $\forall v \in V(P_\infty)$ memiliki derajat $d(v) = 2$, maka dalam sebuah pewarnaan total kuat sejati pada P_∞ , terdapat 3 warna yang berbeda, yaitu warna titik dan warna dua sisi yang terkait pada titik itu. Akibatnya, $\forall v \in V(P_\infty)$ berlaku $|C(v)| = 3$. Dalam pewarnaan total kuat- d pada P_∞ , setiap dua titik yang jaraknya paling besar d harus memiliki himpunan warna berbeda. Oleh karena itu, sebanyak $d + 1$ titik di P_∞ harus memiliki himpunan warna berbeda. Karena setiap titik $v \in V(P_\infty)$ memiliki himpunan warna $C(v)$ dengan $|C(v)| = 3$, dan warna diambil dari k warna yang tersedia, maka jumlah maksimum himpunan warna titik yang dapat dibentuk dan saling berbeda adalah banyaknya himpunan berukuran 3 dari k elemen, yaitu $\binom{k}{3}$. Agar tersedia cukup himpunan warna untuk $d + 1$ titik berurutan, berlaku

$$d + 1 \leq \binom{k}{3}.$$

$$\chi_d''(P_\infty) \leq k \dots (1)$$

Sebaliknya, jika hanya digunakan $k - 1$ warna, maka jumlah maksimum himpunan warna titik yang dapat dibentuk hanya $\binom{k-1}{3}$. Karena

$$d + 1 > \binom{k-1}{3},$$

maka dalam sebuah pewarnaan total kuat- d pada P_∞ diperlukan paling sedikit k warna. Dengan demikian, diperoleh

$$\chi_d''(P_\infty) \geq k \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\chi_d''(P_\infty) = k$$

Teorema terbukti.

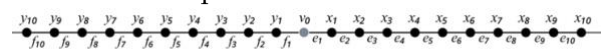
Untuk $d = 9$

$$\binom{k-1}{3} < d+1 \leq \binom{k}{3}$$

Karena $d + 1 = 10$, diperoleh

$$\binom{4}{3} = 4 < 10 \leq 10 = \binom{5}{3}$$

Dengan demikian, diperoleh $k = 5$, untuk $d = 9$, dalam pewarnaan total kuat- d pada P_∞ , diperlukan tepat $k = 5$ warna berbeda dengan $d + 1 = 9 + 1 = 10$ titik internal berurutan memiliki himpunan warna berbeda. Teknik pewarnaan dapat dilakukan secara siklik dan periodik.



(a)

Selanjutnya akan dilakukan konstruksi pewarnaan sebagai berikut:



(b)

Gambar 13. (a) Lintasan tak hingga (P_∞); (b)

Pewarnaan total kuat- d pada P_∞ dengan $d = 9$

Misalkan P_∞ adalah lintasan tak hingga dengan himpunan titik

$$V(P_\infty) = \{\dots, y_3, y_2, y_1, v_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

dan himpunan sisi

$$E(P_\infty) = \{\dots, f_3, f_2, f_1, e_1, e_2, e_3, \dots\}.$$

Definisikan fungsi

$$c: V(P_\infty) \cup E(P_\infty) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

sedemikian hingga,

$$f(v_0) = 1$$

untuk setiap $i \geq 1$,

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{5, 10, 15, 20, \dots\}, \\ 2, & i \in \{1, 8, 11, 18, \dots\}, \\ 3, & i \in \{2, 6, 12, 16, \dots\}, \\ 4, & i \in \{3, 9, 13, 19, \dots\}, \\ 5, & i \in \{4, 7, 14, 17, \dots\}. \end{cases}$$

dan untuk setiap $i \geq 1$,

$$c(y_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{5, 10, 15, 20, \dots\}, \\ 2, & i \in \{2, 9, 12, 19, \dots\}, \\ 3, & i \in \{4, 8, 14, 18, \dots\}, \\ 4, & i \in \{1, 7, 11, 17, \dots\}, \\ 5, & i \in \{3, 6, 13, 16, \dots\}. \end{cases}$$

Untuk setiap $i \geq 1$, definisikan

$$c(e_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{2, 9, 12, 19, \dots\}, \\ 2, & i \in \{3, 7, 13, 17, \dots\}, \\ 3, & i \in \{4, 10, 14, 20, \dots\}, \\ 4, & i \in \{5, 8, 15, 18, \dots\}, \\ 5, & i \in \{1, 6, 11, 16, \dots\}. \end{cases}$$

dan

$$c(f_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{2, 9, 12, 19, \dots\}, \\ 2, & i \in \{4, 8, 14, 18, \dots\}, \\ 3, & i \in \{1, 7, 11, 17, \dots\}, \\ 4, & i \in \{3, 6, 13, 16, \dots\}, \\ 5, & i \in \{5, 10, 15, 20, \dots\}. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa c merupakan pewarnaan total kuat- d pada P_∞ dengan menggunakan 5 warna. Dengan demikian, dari Definisi 3.3,

$$\chi_d''(P_\infty) \leq 5 \dots (1)$$

Karena $d = 9$, maka tidak ada pewarnaan total kuat- d pada P_∞ dengan menggunakan kurang dari 5 warna, sehingga

$$\chi_d''(P_\infty) \geq 5 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan bahwa

$$\chi_d''(P_\infty) = 5 = k.$$

Selanjutnya akan dicari bilangan kromatik total kuat- d pada lintasan berhingga P_n . Untuk itu, diperlukan Lemma berikut.

Lemma 3.6:

Jika $d \in \mathbb{Z}^+$, dan P_n lintasan dengan n titik, maka

$$\chi_d''(P_1) \leq \chi_d''(P_2) \leq \dots \leq \chi_d''(P_n) \leq \dots \leq \chi_d''(P_\infty)$$

Bukti:

Dari Lemma 3.4 diperoleh,

$$\chi_d''(P_1) = 1; \chi_d''(P_2) = 3; \chi_d''(P_3) = 4; \chi_d''(P_4) = 5 \dots (1)$$

Untuk $n \geq 4$, pikirkan sebuah pewarnaan total kuat- d pada lintasan tak hingga P_∞ atau lintasan P_{n+i} , $i \in \mathbb{Z}^+$. Pewarnaan total kuat- d tersebut menginduksi sebuah pewarnaan total kuat sejati w pada lintasan

P_n dengan menggunakan k warna, sedemikian hingga setiap dua titik yang berjarak paling besar d memiliki himpunan warna berbeda. Karena setiap titik internal pada P_n berderajat 2, maka setiap titik tersebut diperlukan sedikitnya 3 warna berbeda. Akibatnya, agar terdapat cukup himpunan warna berbeda, berlaku $\binom{k}{3} \geq 2$, sehingga diperoleh $k \geq 4$. Jika $n > d + 1$, maka titik-titik internal pada P_n dapat diwarnai mengikuti pewarnaan total kuat- d , sehingga setiap dua titik yang jaraknya tidak melebihi d memiliki himpunan warna berbeda. Sementara itu, titik awal dan titik akhir dari P_n diwarnai mengikuti pola pewarnaan secara siklik dan periodik seperti konstruksi dalam bukti Lemma 3.4, sehingga himpunan warna pada titik awal dan titik akhir juga berbeda. Dengan demikian, diperoleh pewarnaan total kuat- d pada P_n menggunakan k warna.

Oleh karena itu, untuk $n \geq 4$, diperoleh

$$4 \leq \chi_d''(P_4) \leq \chi_d''(P_5) \leq \dots \leq \chi_d''(P_n) \leq \dots \leq \chi_d''(P_\infty) \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\chi_d''(P_1) \leq \chi_d''(P_2) \leq \dots \leq \chi_d''(P_n) \leq \dots \leq \chi_d''(P_\infty)$$

Lemma terbukti. ■

Teorema 3.7:

Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan $n \geq 4$ dan $d, k \in \mathbb{Z}^+$. Jika $\binom{k-1}{3} < \min\{n-2, d+1\} \leq \binom{k}{3}$. Maka

$$\chi_d''(P_n) = k$$

Bukti:

Dalam sebuah pewarnaan total kuat- d pada lintasan P_n terdapat paling banyak n_2 titik internal berderajat 2 dengan

$$n_2 = \min\{(n-2), d+1\}$$

Karena setiap titik internal berderajat 2, maka kardinalitas himpunan warna adalah 3. Akibatnya, titik-titik tersebut harus memiliki himpunan warna berbeda.

Karena $n_2 > \binom{k-1}{3}$, maka jumlah himpunan warna berbeda yang diperlukan melebihi banyaknya kombinasi 3 warna dari $k-1$ warna. Oleh karena itu, pewarnaan total kuat- d pada P_n memerlukan paling sedikit k warna.

Dengan demikian,

$$\chi_d''(P_n) \geq k \dots (1)$$

Kasus 1: $d+1 \geq n-2$

Jika $d+1 \geq n-2$, maka

$$\min\{n-2, d+1\} = n-2.$$

sedemikian hingga semua titik berderajat 2 di P_n harus memiliki himpunan warna berbeda. Karena $n - 2 \leq \binom{k}{3}$, maka terdapat sebuah pewarnaan total kuat- d pada P_n dengan menggunakan k warna. Dengan menggunakan konstruksi siklik dan periodik seperti pada bukti Lemma 3.4, diperoleh pewarnaan total kuat- d pada P_n dengan k warna. Berarti

$$\chi_d''(P_n) \leq k \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\chi_d''(P_n) = k$$

Kasus 2: $d + 1 \leq n - 2$

Jika $d + 1 \leq n - 2$, maka

$$\min\{n - 2, d + 1\} = d + 1.$$

Hanya $d + 1$ titik internal yang harus memiliki himpunan warna berbeda. Kondisi ini mengikuti pola yang sama pada lintasan tak hingga P_∞ , karena pada kedua graf tersebut, bilangan kromatik total kuat- d ditentukan oleh jarak maksimum d , bukan banyaknya titik.

Dari Lemma 3.6 diperoleh bahwa

$$\chi_d''(P_n) \leq \chi_d''(P_\infty) = k.$$

Dengan demikian,

$$\chi_d''(P_n) \leq k \dots (3)$$

Dari (1) dan (3) disimpulkan

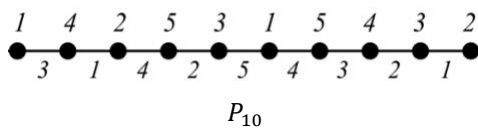
$$\chi_d''(P_n) = k$$

Teorema terbukti. ■

Contoh:

Kasus 1: $d + 1 \geq n - 2$

Perhatikan lintasan P_{10} pada Gambar 14.



Gambar 14. Pewarnaan total kuat-7 pada P_{10} dengan menggunakan 5 warna

Karena $n = 10$, maka terdapat $n - 2 = 8$ titik internal. Untuk $d = 7$ berlaku

$$d + 1 = 7 + 1 = 8 \geq n - 2,$$

sehingga

$$\min\{n - 2, d + 1\} = n - 2 = 8.$$

Dalam pewarnaan total kuat- d , semua titik internal tersebut harus memiliki himpunan warna berbeda. Karena

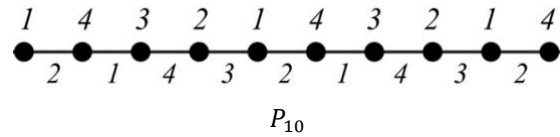
$$n - 2 = 8 \leq \binom{5}{3} = 10,$$

maka $n - 2 = 8$ titik internal harus memiliki himpunan warna berbeda, yaitu:

$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$. Dengan demikian, pewarnaan total kuat-7 pada P_{10} dapat dilakukan dengan menggunakan 5 warna.

Kasus 2: $d + 1 \leq n - 2$

Perhatikan lintasan P_{10} pada Gambar 15.



Gambar 15. Pewarnaan total kuat-3 pada P_{10} dengan menggunakan 4 warna

Karena $n = 10$, maka terdapat $n - 2 = 8$ titik internal. Untuk $d = 3$ berlaku

$$d + 1 = 3 + 1 = 4 \leq n - 2,$$

sehingga

$$\min\{n - 2, d + 1\} = d + 1 = 4.$$

Dalam pewarnaan total kuat- d , semua titik internal tersebut harus memiliki himpunan warna berbeda. Karena

$$d + 1 = 4 \leq \binom{4}{3} = 4,$$

maka $d + 1 = 4$ titik internal harus memiliki himpunan warna berbeda, yaitu: $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}$. Dengan demikian, pewarnaan total kuat-3 pada P_{10} dapat dilakukan dengan menggunakan 4 warna.

Definisi 3.4

Misalkan C_n dengan n titik dengan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan

$$E(C_n) = \{e_i = v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{e_n = v_n v_1\}$$

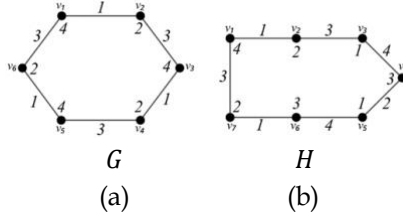
Misalkan w sebuah pewarnaan total kuat sejati pada C_n , sebuah segmen-warna dengan panjang t , dinotasikan dengan S_t , adalah barisan warna yang terdiri atas segmen-warna dari t titik berurutan dan segmen warna dari $t + 1$ sisi berurutan. Secara simbolik

$$S_t = (w(v_{i-1}v_i), w(v_i), w(v_i v_{i+1}), w(v_{i+1}), \dots, w(v_{i+t-1}), w(v_{i+t-1}v_{i+t}))$$

Perhatikan bahwa komponen pertama dan komponen terakhir pada barisan tersebut adalah warna-warna sisi C_n .

Contoh:

Perhatikan pewarnaan total kuat sejati pada siklus C_6 dan siklus C_7 pada Gambar 16.



Gambar 16. (a) G Pewarnaan total kuat sejati pada C_6 dengan menggunakan 4 warna (b) H Pewarnaan total kuat sejati pada C_7 dengan menggunakan 4 warna

Pada Gambar 16.(a), terlihat bahwa $w(v_3v_4) = 1$; $w(v_4) = 2$; $w(v_4v_5) = 3$; $w(v_5) = 4$; $w(v_5v_6) = 1$. Dengan demikian,

$$S_2 = (w(v_3v_4), w(v_4), w(v_4v_5), w(v_5), w(v_5v_6)) \\ = (1, 2, 3, 4, 1)$$

sebuah segmen-warna dengan panjang 2, dengan 2 warna titik dan 2+1 warna sisi pada C_6 .

Pada Gambar 16.(b), terlihat bahwa $w(v_1v_2) = 1$; $w(v_2) = 2$; $w(v_2v_3) = 3$; $w(v_3) = 1$; $w(v_3v_4) = 4$; $w(v_4) = 3$; $w(v_4v_5) = 2$; $w(v_5) = 1$; $w(v_5v_6) = 4$; $w(v_6) = 3$; $w(v_6v_7) = 1$.

$$S_5 = (w(v_1v_2), w(v_2), w(v_2v_3), w(v_3), w(v_3v_4), w(v_4), \\ w(v_4v_5), w(v_5), w(v_5v_6), w(v_6), w(v_6v_7)) \\ = (1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 1)$$

sebuah segmen-warna dengan panjang 5, dengan 5 warna titik dan 5+1 warna sisi pada C_7 .

Teorema 3.8:

Jika $n \geq 4$, maka $\chi_1''(C_n) = 4$

Bukti:

Karena $\forall v \in V(C_n), d(v) = 2$, maka dalam pewarnaan total kuat sejati pada C_n , pada setiap titik terdapat 3 elemen yang harus diberi warna berbeda, yaitu titik dan dua sisi yang terkait dengan titik itu. Dengan demikian, pada setiap titik terdapat 3 warna berbeda. Pada pewarnaan total kuat-1, maka setiap dua titik yang berhubungan langsung harus memiliki himpunan warna berbeda. Jika hanya digunakan 3 warna, maka hanya terdapat satu kemungkinan himpunan warna, yaitu $\{1, 2, 3\}$, dan karena $n \geq 4$, maka harus terdapat paling sedikit 4 warna dalam pewarnaan total pada C_n . Berdasarkan Definisi 3.3,

$$\chi_1''(C_n) \geq 4 \dots (1)$$

Misal siklus

$$C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$$

Ditinjau 2 kasus, yaitu n genap atau n ganjil.

Kasus 1: n genap

Konstruksi pewarnaan total w pada C_n , dengan segmen-warna

$S_2 = (w(e_1), w(v_1), w(e_2), w(v_2), w(e_3)) = (1, 2, 3, 4, 1)$ Titik-titik dan sisi-sisi C_n yang lain diwarnai secara berurutan, dengan menduplikat segmen-warna S_2 . Perhatikan bahwa $C(v_1) = \{1, 2, 3\}$ dan $C(v_2) = \{1, 3, 4\}$. Dengan menduplikat, setiap dua titik yang berhubungan langsung di C_n memiliki himpunan warna yang berbeda, yaitu $\{1, 2, 3\}$ dan $\{1, 3, 4\}$. Karena $d = 1$, maka w adalah pewarnaan-total kuat-1 pada C_n dengan menggunakan 4 warna. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 3.3,

$$\chi_1''(C_n) \leq 4 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_1''(C_n) = 4$$

Kasus 2: n ganjil

Konstruksi pewarnaan total kuat sejati w pada C_n , sedemikian hingga, segmen-warna

$$S_5 = (w(e_1), w(v_1), w(e_2), w(v_2), w(e_3), w(v_3), w(e_4), \\ w(v_4), w(e_5), w(v_5), w(e_6)) \\ = (1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 1)$$

Titik-titik dan sisi-sisi yang lain dari C_n , diwarnai secara berurutan, dengan menduplikat pola pewarnaan segmen-warna S_5 , dengan syarat, jika dalam penduplikatan titik v_1 mendapat warna 1, maka ganti warna v_1 dengan warna 4. Himpunan warna dari titik-titik di segmen S_5 adalah $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}$ dan setiap dua titik berhubungan langsung memiliki himpunan warna berbeda. Dengan demikian, w adalah sebuah pewarnaan-total kuat-1 pada siklus C_n dengan 4 warna. Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.3,

$$\chi_1''(C_n) \leq 4 \dots (3)$$

Dari (1) dan (3), disimpulkan

$$\chi_1''(C_n) = 4$$

Teorema terbukti. ■

Teorema 3.9:

Jika $n, d, k \in \mathbb{Z}^+$ dengan $1 < d \leq \frac{1}{2}n - 1$ dan $n > \left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor \binom{k}{3}$, maka

$$\chi_d''(C_n) \geq k + 1$$

Bukti:

Karena $\forall v \in V(C_n)$, maka setiap titik $v \in V(C_n)$ berderajat 2. Oleh karena itu, dalam pewarnaan total kuat sejati pada C_n , setiap titik selalu terhubung dengan dua sisi. Akibatnya, kardinalitas himpunan warna setiap titik adalah

$$|C(v)| = 3.$$

Karena $\frac{1}{2}n - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, maka $d \leq \frac{1}{2}n - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Dalam pewarnaan total kuat- d pada C_n berlaku bahwa setiap $d + 1$ titik berurutan harus memiliki himpunan warna berbeda. Maka setiap himpunan warna titik hanya bisa dipakai paling banyak $\left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor$ kali untuk semua titik di C_n .

Dengan demikian, untuk dapat mewarnai seluruh n titik pada C_n , diperlukan paling sedikit

$$t = \left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil \dots (1)$$

himpunan warna titik berbeda.

Jika pewarnaan total kuat- d hanya menggunakan k warna, maka banyaknya himpunan warna titik berbeda yang dapat dibentuk dengan kardinalitas 3 adalah $\binom{k}{3}$. Artinya, dengan k warna, kardinalitas himpunan warna titik berbeda hanya $\binom{k}{3}$.

Karena

$$n > \left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor \binom{k}{3},$$

maka

$$\left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor > \binom{k}{3} \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$t > \binom{k}{3}$$

Dengan demikian,

$$\chi_d''(C_n) > k$$

Kardinalitas himpunan warna yang dibutuhkan melebihi kardinalitas himpunan warna yang dapat dibentuk dari k warna. Oleh karena itu, pewarnaan total kuat- d pada C_n tidak dapat dilakukan dengan k warna.

Oleh karena itu, diperlukan paling sedikit $k + 1$ warna untuk membentuk pewarnaan total kuat- d pada C_n .

Karena $\chi_d''(C_n)$ dan k bilangan bulat, diperoleh

$$\chi_d''(C_n) \geq k + 1$$

Teorema terbukti. ■

Teorema 3.10:

Jika $n \geq 16$, maka

$$\chi_7''(C_n) = \begin{cases} 5, & n \notin \{21, 22, 23, 31\} \\ 6, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Bukti:

Karena $\forall v \in V(C_n), d(v) = 2$, maka pada pewarnaan total kuat sejati, himpunan warna titik terdiri atas warna titik dan dua sisi yang terkait dengan titik itu. Dengan demikian, diperoleh $|C(v)| = 3$. Untuk $n \geq 16$ dan $d = 7$, berlaku $1 < d \leq \frac{1}{2}n - 1$ dan $d + 1 =$

$7 + 1 = 8$. Oleh karena itu, setiap 8 titik yang berurutan pada C_n harus memiliki himpunan warna titik berbeda. Agar jumlah himpunan warna titik yang mungkin untuk membedakan $d + 1 = 8$ titik berurutan, harus berlaku $8 > \binom{k}{3}$, maka $k = 4$.

Dengan demikian, $\chi_d''(C_n) > 4$. Karena $\chi_d''(C_n)$ merupakan bilangan bulat, diperoleh

$$\chi_d''(C_n) \geq 4 + 1 \geq 5 \dots (1)$$

Karena $d + 1 = 8 \leq \binom{k}{3}$, maka $k \geq 5$.

Perhatikan segmen-warna dengan panjang 8, 9, dan 10 pada C_n menggunakan 5 warna sebagai berikut:

$$S_8 = (1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 3, 5, 2, 4, 5, 1);$$

$$S_9 = (1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 3, 5, 2, 4, 3, 5, 4, 1);$$

$$S_{10} = (1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 3, 5, 2, 4, 5, 3, 1, 5, 4, 1)$$

Tujuh titik pertama dan titik terakhir dari ketiga segmen tersebut memiliki himpunan warna titik sebagai berikut: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},$

$\{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 4, 5\}.$

Kombinasi dari segmen-segmen warna tersebut dapat membentuk pewarnaan-total kuat-7 pada C_n jika terdapat solusi bulat non-negatif x_8, x_9, x_{10} dari persamaan

$$n = 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10}$$

Untuk $n \geq 16$, persamaan tersebut memiliki solusi bulat non-negatif untuk semua n kecuali $n \in \{21, 22, 23, 31\}$. Dengan demikian, untuk $n \notin \{21, 22, 23, 31\}$ terdapat pewarnaan total kuat-7 pada C_n dengan menggunakan 5 warna.

Solusi-solusi tersebut ada jika :

$n = 8q$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{16, 24, 32, 40, \dots\}$$

$n = 8q + 1 = 8(q - 1) + 9 \geq 9$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{17, 25, 33, 41, \dots\}$$

$n = 8q + 2 = 8(q - 1) + 10 \geq 10$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{18, 26, 34, 42, \dots\}$$

$n = 8q + 3 = 8(q - 2) + 9 + 10 \geq 19$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{19, 27, 35, 43, \dots\}$$

$n = 8q + 4 = 8(q - 2) + 20 \geq 20$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{20, 28, 36, 44, \dots\}$$

Perhatikan bahwa $n \neq 21$

$n = 8q + 5 = 8(q - 3) + 29 = 8(q - 3) + 9 + 20 \geq 29$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{29, 37, 45, 53, \dots\}$$

Perhatikan bahwa $n \neq 22$

$n = 8q + 6 = 8(q - 3) + 30 = 8(q - 3) + 3(10) \geq 30$, dengan $q \geq 2$, sehingga

$$n \in \{30, 38, 46, 54, \dots\}$$

Perhatikan bahwa $n \neq 23, 31$

$n = 8q + 7 = 8(q - 4) + 9 + 3(10) \geq 39$, sehingga

$$n \in \{39, 47, 55, \dots\}$$

Dengan demikian, untuk $n \notin \{21, 22, 23, 31\}$, ada pewarnaan-total kuat-7 dengan menggunakan 5 warna. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(C_n) \leq 5 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2), disimpulkan

$$\chi_d''(C_n) = 5$$

Untuk $n \in \{21, 22, 23, 31\}$, diperoleh

$$n > \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \binom{5}{3} = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor \cdot 10$$

Berdasarkan Teorema 3.9, diperoleh

$$\chi_d''(C_n) \geq 5 + 1 \geq 6 \dots (3)$$

Sebuah pewarnaan total kuat-7 pada C_n dengan 6 warna dapat dikonstruksi menggunakan segmen panjang 10 dan segmen panjang 11 sebagai berikut:

$$S'_{10} = (1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 3, 5, 1, 3, 4, 5, 2, 4, 5, 1)$$

dan

$$S'_{11} = (1, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2, 3, 5, 1, 3, 4, 5, 2, 4, 5, 1, 6, 2)$$

Selanjutnya, sebuah pewarnaan-total kuat-7 dikonstruksi sebagai berikut:

- 1) Untuk $n = 21$, segmen-warna S'_{10} dilanjut S'_{11}
- 2) Untuk $n = 22$, dua kopi S'_{10} dan segmen $(1, 2, 6, 5, 1)$
- 3) Untuk $n = 23$, dua kopi S'_{10} dan segmen $(1, 6, 2, 3, 6, 5, 1)$
- 4) Untuk $n = 31$, dua kopi S'_{10} dan S'_{11}

Dengan demikian, diperoleh pewarnaan-total kuat-7 pada C_n dengan menggunakan 6 warna.

Berdasarkan Definisi 3.3, diperoleh

$$\chi_d''(C_n) \leq 6 \dots (4)$$

Dari (3) dan (4), disimpulkan

$$\chi_d''(C_n) = 6$$

Teorema terbukti. ■

Contoh:

Perhatikan pewarnaan total kuat-7 pada C_{27} dan C_{23} pada Gambar 17 dan Gambar 18.

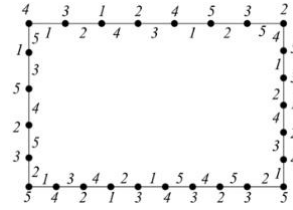
Untuk $n = 27$, diperoleh

$$n = 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10}$$

$$n = 8(1) + 9(1) + 10(1)$$

C_{27} dapat dikonstruksi sebagai gabungan satu segmen-warna panjang 8, satu segmen-warna panjang 9, dan satu segmen-warna panjang 10. Dengan menggabungkan ketiga segmen-warna

secara berurutan, diperoleh pewarnaan total kuat-7 pada C_{27} dengan menggunakan 5 warna.



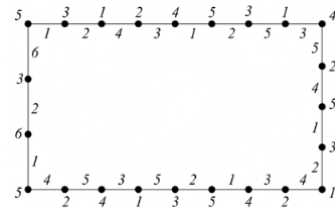
C_{27}

Gambar 17. Pewarnaan-total kuat-7 pada C_{27}

Untuk $n = 23$, diperoleh dua kopi S'_{10} dan segmen $(1, 6, 2, 3, 6, 5, 1)$

$$n = 23 \rightarrow 2 S'_{10} + (1, 6, 2, 3, 6, 5, 1)$$

Konstruksi pewarnaan dilakukan dengan mengombinasikan segmen-warna yang sesuai sehingga panjang total siklus terpenuhi. Pewarnaan yang dihasilkan juga memenuhi sifat pewarnaan total kuat-7.



C_{23}

Gambar 18. Pewarnaan-total kuat-7 pada C_{23}

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada skripsi, maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik total kuat-d pada graf yaitu sebagai berikut:

1. Jika G graf dengan $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+$ dan $t_1 \leq t_2$, maka:
$$\chi_{t_1}''(G) \leq \chi_{t_2}''(G)$$
2. Jika G graf dan $G_1, G_2, \dots, G_t$ adalah t komponen berbeda G , maka:
$$\chi_d''(G) = \max\{\chi_d''(G_i) / 1 \leq i \leq t\}$$
3. Jika G graf dan $d \in \mathbb{Z}^+$ maka:
$$\chi_d''(G) \leq \chi_s''(G)$$

4. Graf lintasan P_n dengan n titik memiliki bilangan kromatik total kuat-d yaitu:

$$\chi_d''(P_n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 3, n = 2 \\ 4, n = 3 \\ 4, n \geq 4; 1 \leq d \leq 3 \\ 5, n \geq 4; 4 \leq d \leq 9 \end{cases}$$

5. Graf lintasan-tak hingga (P_∞) , dengan $\binom{k-1}{3} < d + 1 \leq \binom{k}{3}$ memiliki bilangan kromatik total kuat- d yaitu:

$$\chi_d''(P_\infty) = k$$
6. Graf lintasan P_n dengan n titik memiliki bilangan kromatik total kuat- d yaitu:

$$\chi_d''(P_1) \leq \chi_d''(P_2) \leq \dots \leq \chi_d''(P_n) \leq \dots \leq \chi_d''(P_\infty)$$
7. Graf lintasan P_n dengan $n \geq 4$ dan $\binom{k-1}{3} < \min\{n-2, d+1\} \leq \binom{k}{3}$ memiliki bilangan kromatik total kuat- d yaitu:

$$\chi_d''(P_n) = k$$
8. Graf sikel C_n dengan $n \geq 4$ memiliki bilangan kromatik total kuat-1 yaitu:

$$\chi_1''(C_n) = 4$$
9. Graf sikel C_n dengan $1 < d \leq \frac{1}{2}n - 1$ dan $n > \left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor \binom{k}{3}$, memiliki bilangan kromatik total kuat- d yaitu:

$$\chi_d''(C_n) \geq k + 1$$
10. Graf sikel C_n dengan $n \geq 16$, memiliki bilangan kromatik total kuat-7 yaitu:

$$\chi_7''(C_n) = \begin{cases} 5, n \notin \{21, 22, 23, 31\} \\ 6, \text{yang lain} \end{cases}$$

SARAN

Pada skripsi ini hanya fokus pada bilangan kromatik total kuat- d pada graf, yaitu graf lintasan dan graf sikel. Bagi pembaca yang memiliki minat bidang akademisi yang sama, penulis menyarankan untuk membahas bilangan kromatik total kuat- d pada jenis graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Buhaerah, Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Living Spiritual Quotient.
- Gross, J. L., & Yellen, J. (2006). *Graph Theory and Its Applications* (2nd ed.). Chapman & Hall/CRC.
- Kemnitz, A., & Marangio, M. (2015). d -strong total colorings of graphs. *Discrete Mathematics*, 338, 1690-1698.
- Lovina, S., & Budayasa, K. (2025). Pelabelan Harmonis pada Beberapa Kelas Graf Takhingga. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 13(3), 220-230.
- Prihasto, B., & Sumarno. (2013). Pewarnaan Total pada Graf Outerplanar. *Jurnal Teknik Pomits*, 1(1), 1-6.
- Rahmah, S. E., & Budayasa, K. (2020). Bilangan Kromatik-Total Hasil Kali Korona Dua Graf. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 8(1), 17-24.
- Slamin. (2023). *Teori Graf dan Aplikasinya* (Edisi Kedua). Rumpun Dua Belas.
- Sulistya, D. A., & Budayasa, K. (2019). Bilangan Kromatik Total Beberapa Kelas. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(2), 59-66.
- Zhang, Z., Chen, X., Li, J., Yao, J., Lu, B., & Wang, X. (2005). On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs. *Science in China Series A: Mathematics*, 48, 289-299.