

## PELABELAN SISI-ANGGUN GRAF BERATURAN

**Wulandari Lusnaini**

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: [wulandari.22053@mhs.unesa.ac.id](mailto:wulandari.22053@mhs.unesa.ac.id)

**I Ketut Budayasa**

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: [ketutbudayasa@unesa.ac.id](mailto:ketutbudayasa@unesa.ac.id)\*

### Abstrak

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf ke himpunan bilangan bulat. Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan sisi-anggun. Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  graf dengan  $|V(G)| = p$  dan  $|E(G)| = q$ . Pelabelan sisi-anggun pada  $G$  adalah fungsi bijektif  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  sedemikian hingga pelabelan titik terinduksi  $f^+ : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_p$  yang didefinisikan  $f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$  fungsi injektif. Graf  $G$  yang memiliki pelabelan demikian disebut graf sisi-anggun. Syarat perlu graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi memiliki pelabelan sisi-anggun adalah  $q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}$ . Pada penelitian ini akan ditunjukkan konstruksi pelabelan sisi-anggun pada graf Petersen diperumum, graf prisma-kuasi, serta graf yang dapat dikomposisi menjadi faktor-cakar dan graf beraturan-2. Graf Petersen diperumum  $GP(n, k)$  dan graf prisma-kuasi tidak memiliki pelabelan sisi-anggun apabila jumlah titiknya ganjil, namun memiliki pelabelan sisi-anggun jika jumlah titiknya genap. Selain itu, graf beraturan-3 yang dapat dikomposisi menjadi gabungan faktor-cakar dan graf bagian beraturan-2 juga terbukti memiliki pelabelan sisi-anggun.

**Kata Kunci:** Pelabelan Graf, Pelabelan Sisi-Anggun, Graf Beraturan, Graf Petersen Diperumum, Graf Prisma-Kuasi

### Abstract

Graph labeling is a function that assigns the elements of a graph to a set of integers. One type of graph labeling is edge-graceful labeling. Let  $G = (V(G), E(G))$  be a graph with  $|V(G)| = p$  and  $|E(G)| = q$ . An edge-graceful labeling on  $G$  is a bijective function  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$  such that the induced vertex labeling  $f^+ : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_p$  defined by  $f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$  is an injective function. A graph  $G$  that possesses such a labeling is called an edge-graceful graph. A necessary condition for a graph  $G$  with  $p$  vertices and  $q$  edges to have an edge-graceful labeling is  $q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}$ . In this study, the construction of edge-graceful labelings will be demonstrated for generalized Petersen graph, quasi prism graphs, and graphs that can be decomposed into claw-factors and 2-regular graphs. Generalized Petersen graphs  $GP(n, k)$  and quasi-prism graphs do not possess edge-graceful labelings if the number of vertices is odd, however they do possess edge-graceful labelings if the number of vertices is even. Furthermore, 3-regular graphs that can be decomposed into a union of claw-factors and 2-regular subgraphs are also proven to possess edge-graceful labelings.

**Keywords:** Graph Labeling; Edge-Graceful Labeling, Regular Graph, Generalized Petersen Graph, Quasi-Prism Graph

### PENDAHULUAN

Salah satu cabang matematika, teori graf sudah ada lebih dari 200 tahun yang lalu. Jurnal pertama yang membahas teori graf diterbitkan pada tahun 1736 oleh matematikawan ternama asal Swiss, Euler.

Awalnya secara matematis teori graf dianggap “kurang” penting karena umumnya digunakan untuk menyelesaikan teka-teki namun dalam beberapa dekade terakhir, teori ini mengalami kemajuan yang sangat pesat (Budayasa, 2007). Salah satu topik penting dalam teori graf adalah pelabelan

graf yaitu proses memberikan label berupa bilangan pada elemen graf, baik pada simpul, sisi maupun keduanya sesuai dengan aturan tertentu.

Graf  $G$  terdiri dari dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  yang elemennya disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong)  $E(G)$  yang elemennya disebut sisi. Elemen  $E(G)$  merupakan pasang tak terurut titik di  $V(G)$ . Himpunan  $V(G)$  disebut himpunan titik  $G$  dan himpunan  $E(G)$  disebut himpunan sisi  $G$  (Budayasa, 2007). Setiap sisi  $\{u, v\}$  dari graf  $G$  biasanya dinotasikan dengan  $uv$  atau  $vu$ . Jika terdapat sisi  $e = uv$  pada graf  $G$ , maka sisi tersebut dikatakan menghubungkan simpul  $u$  dan  $v$  (Chartrand & Lesniak, 2016).

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf berupa titik, sisi, ataupun keduanya ke himpunan bilangan bulat. Jika domain fungsi tersebut merupakan himpunan sisi maka pelabelan ini disebut pelabelan sisi, jika domain fungsi tersebut merupakan himpunan titik maka pelabelan ini disebut pelabelan titik, sedangkan jika domain fungsi tersebut berupa gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total (Wallis, 2001). Berbagai jenis pelabelan telah banyak dikembangkan diantaranya adalah pelabelan antiajaib, pelabelan ajaib, pelabelan harmonis, pelabelan anggun, dan pelabelan sisi-anggun (Gallian, 2025).

Salah satu jenis pelabelan yang dikembangkan adalah pelabelan anggun. Pelabelan anggun pertama kali diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967. Pelabelan anggun pada graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi merupakan suatu fungsi injektif,  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$  sedemikian hingga jika setiap sisi  $uv$  dilabeli dengan  $|f(u) - f(v)|$  maka label sisi akan berbeda semua. Di sini,  $V(G)$  adalah himpunan titik pada graf  $G$  dan sisi  $uv$  adalah sisi yang menghubungkan titik  $u$  dan titik  $v$  pada graf  $G$ . Graf yang memenuhi pelabelan anggun disebut graf anggun (Venkatesan & Sekar, 2017). Sementara itu, pada pelabelan sisi-anggun proses pelabelan diberikan pada sisi graf oleh karena itu, kedua jenis pelabelan ini berbeda pada letak pemberian labelnya.

Pelabelan sisi-anggun memberikan label langsung pada sisi-sisi graf, kemudian nilai label pada titik ditentukan dari jumlah label sisi yang

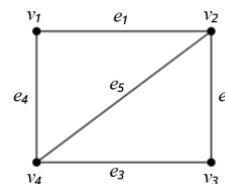
terkait pada titik tersebut dalam modulo banyaknya titik. Graf disebut memiliki pelabelan sisi-anggun jika hasil penjumlahan tersebut memberikan label titik yang berbeda untuk setiap titik pada graf (Venkatesan & Sekar, 2017). Konsep pelabelan sisi-anggun diperkenalkan oleh Lo (1985). Penelitian ini kemudian berkembang ketika Hefetz pada tahun 2005 membuktikan bahwa suatu graf yang sisi-anggun akan tetap mempertahankan sifat keanggunannya setelah ditambahkan faktor genap (*even factor*). Oleh karena itu, beberapa kelas graf beraturan memiliki atau tidak memiliki pelabelan sisi-anggun (Wang & Zhang, 2017).

## KAJIAN TEORI

### Definisi 2.1:

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasang terurut himpunan yaitu, himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  yang elemennya disebut titik dan himpunan berhingga (boleh kosong)  $E(G)$  yang elemennya disebut sisi. Elemen  $E(G)$  merupakan pasang tak terurut titik di  $V(G)$ . Himpunan  $V(G)$  disebut himpunan titik  $G$  dan himpunan  $E(G)$  disebut himpunan sisi  $G$  (Budayasa, 2007).

### Contoh:



Gambar 1. Graf  $G$  dengan 4 titik dan 5 sisi

### Definisi 2.2:

Misalkan  $u$  dan  $v$  titik graf  $G$  dan  $e = uv$  sisi  $G$ . Titik  $u$  dan  $v$  berhubungan langsung (*adjacent*) di  $G$ , sisi  $e$  menghubungkan (*joining*) titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ ,  $u$  dan  $v$  merupakan titik-titik akhir dari sisi  $e$ , dan sisi  $e$  terkait (*incident*) dengan titik  $u$  dan  $v$  (Budayasa, 2007).

### Definisi 2.3:

Sisi graf yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan titik  $u$  dan  $v$  di suatu graf, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Graf yang tidak memiliki sisi rangkap maupun gelung disebut graf sederhana. Sebaliknya, jika graf memiliki sisi

rangkap tetapi tidak memiliki gelung, graf tersebut dinamakan multigraf (Budayasa, 2007).

#### Definisi 2.4:

Graf  $H$  disebut subgraf dari graf  $G$ , ditulis  $H \subset G$ , jika  $V(H) \subset V(G)$  dan  $E(H) \subset E(G)$ . Jika  $H \subset G$  dan  $V(H) = V(G)$  maka  $H$  disebut subgraf perentang (*spanning subgraph*) dari  $G$ . Misalkan  $S \subset V(G)$ . Subgraf dari  $G$  yang dibentuk (diinduksi) oleh  $S$  yang dinotasikan dengan  $G[S]$  adalah subgraf dari  $G$  yang himpunan titiknya adalah  $S$  dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi  $G$  yang mempunyai titik-titik akhir di  $S$  (Budayasa, 2007).

#### Definisi 2.5:

Graf komplet (graf lengkap) dengan  $n$  titik, dilambangkan dengan  $K_n$  adalah graf sederhana dengan  $n$  titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sisi. Banyak sisi pada graf komplet dengan  $n$  titik adalah  $n(n-1)/2$ . Graf  $G$  disebut graf bipartit jika himpunan titik  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian  $A$  dan  $B$  sedemikian hingga setiap sisi di  $G$  menghubungkan titik di  $A$  dan titik di  $B$  dengan  $(A, B)$  bipartit dari  $G$ . Selanjutnya jika  $G$  sederhana yang memiliki bipartisi  $(A, B)$  dan setiap titik di  $A$  berhubungan langsung dengan setiap titik di  $B$ , maka  $G$  disebut graf bipartit komplet dilambangkan dengan  $K_{m,n}$  di mana  $|A| = m$  dan  $|B| = n$ .

#### Definisi 2.6:

Misalkan  $G$  graf. Jalan (*walk*) di  $G$  didefinisikan sebagai barisan berhingga (tak kosong)  $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$  yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga  $v_{i-1}$  dan  $v_i$  adalah titik-titik akhir sisi  $e_i$ , untuk  $1 \leq i \leq k$ . Jalan  $W$  merupakan jalan dari  $v_0$  ke  $v_k$  atau jalan- $(v_0, v_k)$ . Titik awal dan titik akhir dari  $W$  yaitu  $v_0$  dan  $v_k$  sedangkan titik internal dari  $W$  yaitu  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{(k-1)}$  dan panjang jalan  $W$  adalah banyaknya sisi dalam  $W$ . Pada jalan  $W$  titik di  $G$  maupun sisinya bisa muncul lebih dari satu kali. Jika semua sisi  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$  dalam jalan  $W$  berbeda, maka  $W$  disebut jejak (*trail*). Jika semua titik  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$  dalam jalan  $W$  juga berbeda, maka  $W$  disebut lintasan (*path*). Jalan  $W$  dikatakan tutup jika titik awal dan titik akhir sama, sedangkan jika titik awal dan titik akhir berbeda maka  $W$  disebut jalan buka. Jejak tutup disebut sirkuit. Sikel (*cycle*) adalah

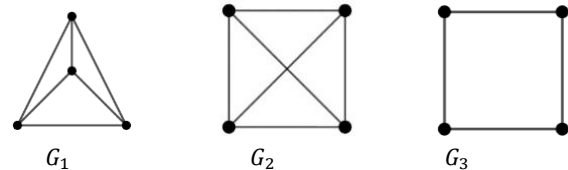
jejak tutup yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam sikel disebut panjang sikel. Sikel dengan panjang  $k$  disebut  $k$ -sikel, dilambangkan dengan  $C_k$  (Budayasa, 2007).

#### Definisi 2.7:

Dua graf  $G$  dan  $H$  dikatakan isomorfik, jika terdapat korespondensi satu-satu antara  $V(G)$  dan  $V(H)$ , serta banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik  $u$  dan  $v$  di  $G$ , sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di  $H$  yang berkorespondensi dengan titik  $u$  dan  $v$ .

#### Contoh:

Berikut merupakan contoh isomorfisme pada graf :

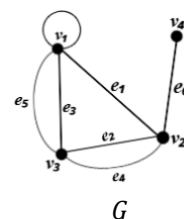


Gambar 2. Graf  $G_1$  isomorfik dengan graf  $G_2$ ;  $G_1$  tidak isomorfik  $G_3$

#### Definisi 2.8:

Misalkan  $G$  graf dan  $v$  titik  $G$ . Derajat titik  $v$  dinotasikan dengan  $d_G(v)$  atau  $d(v)$  yang didefinisikan sebagai banyaknya sisi  $G$  yang terkait dengan titik  $v$ . Setiap loop (gelung) pada titik  $v$  akan dihitung dua kali. Derajat minimum graf  $G$  dinotasikan sebagai  $\delta(G)$  yang didefinisikan  $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$  adalah nilai terkecil dari semua derajat titik graf  $G$ , sedangkan untuk derajat maksimum  $G$  dinotasikan sebagai  $\Delta(G)$  didefinisikan  $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$  adalah nilai terbesar dari semua derajat titik graf  $G$  (Budayasa, 2007).

#### Contoh:



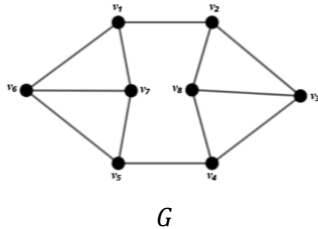
Gambar 3. Graf  $G$  dengan  $d(v_1) = 5$ ,  $d(v_2) = 4$ ,  $d(v_3) = 4$ ,  $d(v_4) = 1$ ,  $\delta(G) = 1$ ,  $\Delta(G) = 5$

#### Definisi 2.9:

Misalkan  $G$  graf. Jika setiap titik  $v \in V(G)$  memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut disebut graf beraturan (*regular graph*) (Buhaerah dkk, 2021). Graf  $G$  disebut graf beraturan- $k$  jika setiap titik

$G$  berderajat  $k$ . Contohnya pada graf komplet  $K_n$  dengan  $n$  titik adalah graf beraturan- $(n-1)$ . Sikel dengan  $n$  titik,  $C_n$  adalah graf beraturan-2. Pada graf beraturan, derajat minimum dan derajat maksimum bernilai sama yaitu  $\delta(G) = \Delta(G)$  (Budayasa, 2007).

**Contoh:**

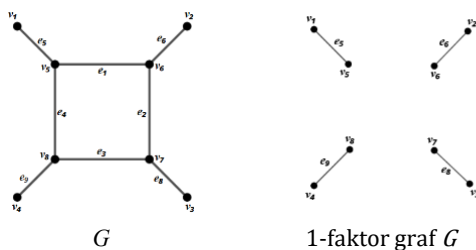


**Gambar 4.** Graf  $G$  beraturan-3,  $\delta(G) = 3 = \Delta(G)$

**Definisi 2.10:**

Misalkan  $G$  graf berhingga tak kosong,  $H \subset G$  disebut faktor (*factor*) apabila  $H$  memuat semua titik dari graf  $G$  dengan kata lain faktor didefinisikan sebagai subgraf perentang (*spanning subgraph*) dari graf  $G$ . Jika setiap titik pada faktor  $H$  memiliki derajat yang sama yaitu  $k$ , maka graf tersebut disebut  $k$ -faktor dari  $G$ . Salah satu contoh khusus dari  $k$ -faktor adalah 1-faktor, yaitu faktor dengan setiap titik berderajat satu yang berhubungan erat dengan konsep penjadwalan sempurna (*perfect matching*) karena setiap titik dihubungkan tepat dengan satu titik lainnya. Perbedaananya, 1-faktor merupakan subgraf perentang 1-reguler sedangkan penjadwalan sempurna adalah himpunan sisi dalam subgraf tersebut (West, 2001).

**Contoh:**



**Gambar 5.**  $G$ ; 1-faktor graf  $G$

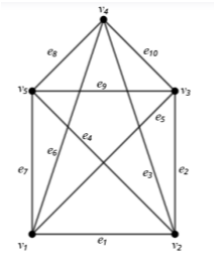
**Definisi 2.11:**

Dekomposisi dari graf  $G$  adalah koleksi  $\{H_i\}$  dari subgraf  $G$  sedemikian hingga  $H_i = \langle E_i \rangle$  untuk suatu  $E_i$  subset  $E(G)$  dan  $\{E_i\}$  adalah partisi dari  $E(G)$ . Jika  $\{H_i\}$  adalah sebuah dekomposisi dari  $G$ , maka  $G$  dapat ditulis sebagai penjumlahan sisi  $H_1 \oplus$

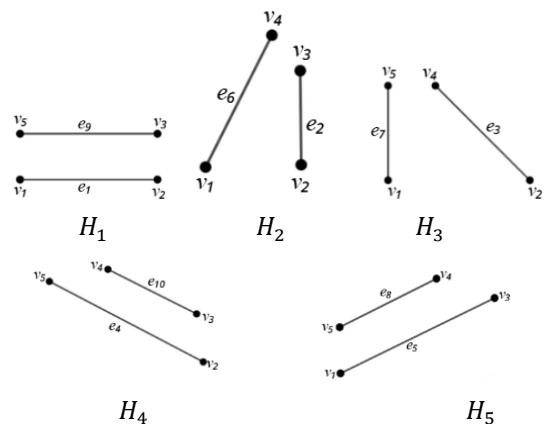
$H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$  dan  $G$  didekomposisikan ke dalam subgraf  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ , di mana  $n = |\{H_i\}|$ . Dengan kata lain  $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3, \dots \oplus H_n$  adalah dekomposisi dari graf  $G$  (Chartrand & Lesniak, 2016).

**Contoh:**

Perhatikan graf  $K_5$  pada Gambar 6. Graf  $K_5$  dapat didekomposisi menjadi lima buah  $2K_2$ .



**Gambar 6.** Graf  $K_5$



**Gambar 7.** Dekomposisi  $K_5$

**Definisi 2.12:**

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen pada graf (titik, sisi, ataupun keduanya) ke himpunan bilangan bulat. Jika domain tersebut merupakan himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domain tersebut merupakan himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Jika domain tersebut merupakan himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan total (Wallis, 2001).

## HASIL DAN PEMBAHASAN

**Definisi 3.1:**

Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  graf dengan  $|V(G)| = p$  dan  $|E(G)| = q$ . Pelabelan sisi-anggun pada  $G$  adalah fungsi bijektif

$$f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$$

sedemikian hingga pelabelan titik terinduksi

$$f^+: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

yang didefinisikan :

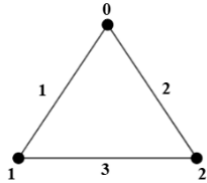
$$f^+(v) = \sum_{uv \in E(G)} f(uv) \pmod{p}$$

merupakan fungsi injektif.

Selanjutnya graf  $G$  yang memiliki pelabelan demikian disebut graf sisi-anggun.

#### Contoh:

Pelabelan sisi-anggun pada Gambar 7.



Gambar 7. Pelabelan sisi-anggun pada graph  $G = C_3$

#### Teorema 3.1:

Misalkan  $G$  graf dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi. Jika graf  $G$  memiliki pelabelan sisi-anggun, maka

$$q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}.$$

#### Bukti:

Misalkan  $f$  sebuah pelabelan sisi anggun pada  $G$ . Karena

$$f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\},$$

maka total label semua sisi  $G$  adalah

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + q \\ &= \frac{q(q+1)}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Karena

$$f^+: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

injektif, maka total label semua titik adalah

$$\begin{aligned} T &= 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (p-1) \\ &= \frac{(p-1)p}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Karena setiap sisi pada graf  $G$  terkait dengan dua titik, maka dalam menjumlahkan semua label titik pada graf  $G$ , setiap sisi dihitung tepat dua kali. Oleh karena itu, dalam aritmatika modulo  $p$  diperoleh

$$2S \equiv T \pmod{p}. \quad (3)$$

Dari (1), (2), dan (3) disimpulkan

$$2 \left( \frac{q(q+1)}{2} \right) \equiv \frac{(p-1)p}{2} \pmod{p}.$$

Ekuivalen dengan

$$q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}.$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

#### Definisi 3.2:

Misalkan  $n$  dan  $k$  dua bilangan bulat positif dengan  $n \geq 3$  dan  $1 \leq k \leq \lfloor n-1/2 \rfloor$  graf Petersen umum, dilambangkan dengan

$$GP(n, k)$$

adalah graf dengan

$$V(GP(n, k)) = \{u_i, v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

dan  $E(GP(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid 1 \leq i \leq n\}$  dengan indeks diambil modulo  $n$ .

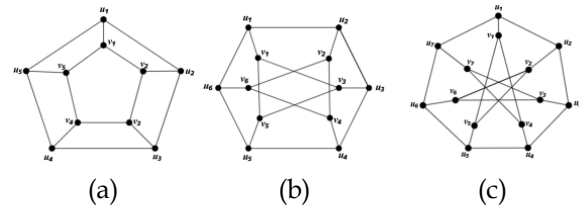
Perhatikan bahwa graf ini beraturan-3 dengan

$$|V(GP(n, k))| = 2n$$

$$\text{dan } |E(GP(n, k))| = 3n.$$

#### Contoh:

Graf Petersen umum  $GP(5,1)$ ,  $GP(6,2)$ ,  $GP(7,3)$  dapat dilihat pada Gambar 8. berikut.



Gambar 8. (a)  $GP(5,1)$ ; (b)  $GP(6,2)$ ; (c)  $GP(7,3)$

Berikut akan dibuktikan jika  $n$  ganjil, maka graf Petersen umum  $GP(n, k)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.

#### Teorema 3.2:

Jika  $n$  ganjil, maka  $GP(n, k)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.

#### Bukti:

Karena  $n$  ganjil, misalkan

$$n = 2t + 1, t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Karena

$$|E(GP(n, k))| = 3n = 3(2t + 1) = 6t + 3$$

dan  $|V(GP(n, k))| = 2n = 2(2t + 1) = 4t + 2$ , maka

$$\begin{aligned} |E(GP(n, k))| (|E(GP(n, k))| + 1) &= 3n(3n + 1) \\ &= 3(2t + 1)(3(2t + 1) + 1) \\ &= (6t + 3)(6t + 4) \\ &= 36t^2 + 24t + 18t + 12 \\ &= 36t^2 + 42t + 12. \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{36t^2 + 42t + 12}{2n} = \frac{36t^2 + 42t + 12}{4t + 2} = 9t + 6$$

maka

$$36t^2 + 42t + 12 \equiv 0 \pmod{4t + 2}.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
& \frac{|V(GP(n, k))| (|V(GP(n, k))| - 1)}{2} \\
&= \frac{2n(2n-1)}{2} \\
&= \frac{(4t+2)(4t+1)}{2} \\
&= \frac{16t^2 + 12t + 2}{2} \\
&= 8t^2 + 6t + 1 \\
&= 2t(4t+2) + (2t+1) \\
&\equiv 2t+1 \pmod{(4t+2)} \\
&\not\equiv 0 \pmod{(4t+2)}
\end{aligned}$$

sehingga berdasarkan Teorema 3.1,  $GP(n, k)$  dengan  $n$  ganjil tidak memiliki pelabelan sisi-anggun. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan jika  $n$  genap, maka graf Petersen umum  $GP(n, k)$  memiliki pelabelan sisi-anggun.

### Teorema 3.3:

Jika  $n$  genap, maka graf Petersen umum  $GP(n, k)$  adalah graf sisi-anggun.

### Bukti:

Misalkan

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\}; \\
E_2 &= \{u_i v_i \mid 1 \leq i \leq n\}; \\
E_3 &= \{v_i v_{i+k} \mid 1 \leq i \leq n\}
\end{aligned}$$

dengan indeks diambil modulo  $n$ .

Jelas bahwa

$$E(GP(n, k)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3.$$

Karena  $E(GP(n, k)) = 3n$  dan  $n$  genap

$$n = 2t, \quad t \in \mathbb{Z}^+,$$

maka konstruksi fungsi  $f$  dengan

$$f : E(GP(n, k)) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6t\}.$$

Sebagai berikut :

(i) Untuk sisi di  $E_2$  dilabeli dengan

$$f(u_i v_i) = \begin{cases} t+1, & i=1 \\ 3t+2-i, & 2 \leq i \leq 2t \end{cases}$$

(ii)  $\forall i, 1 \leq i \leq 2t$ , sisi di  $E_1$  dilabeli dengan

$$f(e_{in}(u_i)) = 6t+1 - f(u_i v_i)$$

dengan  $e_{in}(u_i)$  menyatakan sisi  $u_{i-1}u_i$ .

(iii)  $\forall i, 1 \leq i \leq 2t$ , label sisi di  $E_3$  ditentukan sebagai berikut:

(a) Jika

$$t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 2t$$

maka

$$f(e_{in}(v_i)) = 7t+1 - f(u_i v_i).$$

(b) Jika

$$2t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 3t$$

maka

$$f(e_{in}(v_i)) = 3t+1 - f(u_i v_i)$$

Dari (i) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $GP(n, k)$  di  $E_2$  adalah

$$B = t+1, t+2, \dots, 3t$$

dengan

$$|B| = 2t = |E_2|.$$

Dari (ii) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $GP(n, k)$  di  $E_1$  adalah

$$A = 3t+1, 3t+2, \dots, 5t$$

dengan

$$|A| = 2t = |E_1|.$$

Dari (iii)(a) dan (iii)(b) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $GP(n, k)$  di  $E_3$  adalah

$$\begin{aligned}
C_1 &= 5t+1, 5t+2, \dots, 6t \\
\text{dan } C_2 &= \{1, 2, 3, \dots, t\}
\end{aligned}$$

dengan

$$|C_1| = t \text{ dan } |C_2| = t,$$

sehingga

$$|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| = 2t = |E_3|.$$

Karena himpunan  $E_1, E_2, E_3$  berhingga dan saling lepas, maka

$$\begin{aligned}
|E_1 \cup E_2 \cup E_3| &= |E_1| + |E_2| + |E_3| \\
&= 6t = E(GP(n, k))
\end{aligned}$$

sehingga, fungsi  $f$  bijektif.

Selanjutnya label titik  $u_i, 1 \leq i \leq 2t$  adalah

$$\begin{aligned}
f^+(u_i) &= f(u_i v_i) + f(e_{in}(u_i)) + f(e_{out}(u_i)) \\
&= f(u_i v_i) + 6t+1 - f(u_i v_i) + f(e_{out}(u_i)) \\
&= 6t+1 + f(e_{out}(u_i)),
\end{aligned}$$

dengan  $e_{in}(u_i)$  menyatakan sisi  $u_{i-1}u_i$  dan  $e_{out}(u_i)$  menyatakan sisi  $u_i u_{i+1}$ .

Himpunan label titik-titik di  $U$  adalah

$$\begin{aligned}
U &= 9t+2, 9t+3, \dots, 11t+1 \pmod{4t} \\
&\equiv \{t+2, t+3, \dots, 3t+1\}.
\end{aligned}$$

Kemudian label titik  $v_i, 1 \leq i \leq 2t$  adalah

$$f^+(v_i) = \begin{cases} t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 2t \\
\quad = f(u_i v_i) + f(e_{in}(v_i)) + f(e_{out}(v_i)) \\
\quad = f(u_i v_i) + 7t+1 - f(u_i v_i) + f(e_{out}(v_i)) \\
\quad = 7t+1 + f(e_{out}(v_i)) \\
\\
2t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 3t \\
\quad = f(u_i v_i) + f(e_{in}(v_i)) + f(e_{out}(v_i)) \\
\quad = f(u_i v_i) + 3t+1 - f(u_i v_i) + f(e_{out}(v_i)) \\
\quad = 3t+1 + f(e_{out}(v_i))
\end{cases}$$

Diperoleh, himpunan label titik-titik di  $V$  setelah direduksi  $\pmod{4t}$  didapat himpunan label

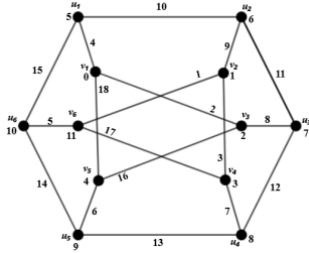
$$V = \{1, 2, 3, \dots, t+1, 3t+2, 3t+3, \dots, 4t\}$$

sehingga fungsi  $f^+$  injektif.

Berdasarkan Definisi 3.1,  $f$  adalah pelabelan sisi-anggun pada graf  $GP(n, k)$ . Dengan demikian, teorema terbukti. ■

**Contoh:**

Contoh pelabelan sisi-anggun pada  $GP(6,2)$  mengikuti konstruksi dalam pembuktian di atas, dapat dilihat pada Gambar 9. berikut. Dalam hal ini  $n = 6$ ,  $t = 3$ .



**Gambar 9.** Sebuah pelabelan sisi-anggun pada graf Petersen diperumum  $GP(6,2)$

Perumuman dari graf Petersen Umum  $GP(n, k)$  adalah graf prisma- kuasi berikut.

**Definisi 3.3:**

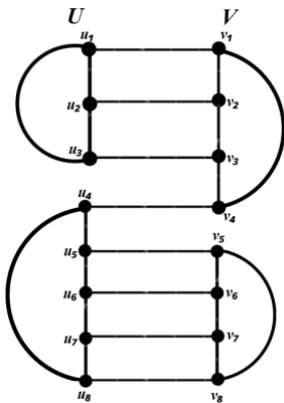
Graf prisma-kuasi  $G(U, V)$  adalah graf beraturan-3 dengan  $2k$  titik, yaitu  $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$  dan  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$  yang memuat gabungan sisi saling lepas dari 1-faktor (penjodohan sempurna) dan dua subgraf beraturan-2 yang dibangun oleh  $U$  dan  $V$ . Dengan demikian,  $|V(G(U, V))| = 2k$  dan  $|E(G(U, V))| = 3k$ . Perhatikan bahwa graf Petersen umum  $GP(n, k)$  merupakan graf prisma-kuasi  $G(U, V)$  di mana subgraf  $G(U, V)$  yang dibangun oleh himpunan  $U$  yang berupa  $C_n$ , begitu juga subgraf  $G(U, V)$  yang dibangun himpunan  $V$  yang berupa gabungan siklus.

**Contoh:**

Graf prisma-kuasi  $G(U, V)$  dengan

$$U = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$$

$$\text{dan } V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$



**Gambar 10.** Graf prisma-kuasi  $G(U, V)$

Selanjutnya, jika  $|U| = |V|$  bilangan ganjil, maka graf prisma-kuasi  $G(U, V)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.

**Teorema 3.4:**

Jika  $G(U, V)$  graf prisma-kuasi dengan  $|U| = |V| = k$ , dengan  $k$  ganjil, maka  $G(U, V)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.

**Bukti:**

Misalkan

$$|V(G(U, V))| = n$$

$$\text{dan } |E(G(U, V))| = m.$$

Dengan demikian

$$n = 2k \text{ dan } m = 3k.$$

Misalkan

$$|U| = |V| = k = 2t + 1, \quad t \in \mathbb{Z}^+,$$

sehingga,

$$\begin{aligned} m(m+1) &= 3k(3k+1) \\ &= 9k^2 + 3k \\ &= 9(2t+1)^2 + 3(2t+1) \\ &= 9(4t^2 + 4t + 1) + 6t + 3 \\ &= 36t^2 + 36t + 9 + 6t + 3 \\ &= 36t^2 + 42t + 12 \\ &\equiv 0 \pmod{4t+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{2k(2k-1)}{2} \\ &= \frac{2(2t+1)(2(2t+1)-1)}{2} \\ &= \frac{(4t+2)(4t+2-1)}{2} \\ &= \frac{(4t+2)(4t+1)}{2} \\ &= \frac{16t^2 + 4t + 8t + 2}{2} \\ &= 8t^2 + 2t + 4t + 1 \\ &= 8t^2 + 6t + 1 \\ &\equiv 2t + 1 \pmod{4t+2} \\ &\not\equiv 0 \pmod{4t+2}, \end{aligned}$$

sehingga,  $m(m+1) \not\equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{4t+2}$ .

Berdasarkan Teorema 3.1, graf  $G(U, V)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun, Dengan demikian teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan jika  $|U| = |V|$  bilangan genap, maka graf prisma- kuasi memiliki pelabelan sisi-anggun.

**Teorema 3.5:**

Jika  $G(U, V)$  graf prisma- kuasi dengan  $|U| = |V| = k$  dengan  $k$  genap, maka  $G(U, V)$  memiliki pelabelan sisi-anggun.

**Bukti:**

Misalkan,

$$|U| = |V| = 2t, \quad t \in \mathbb{Z}^+.$$

Misalkan

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_{2t}\}$$

dan  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2t}\}.$

Misalkan,

$$E_1 = E(G[U]),$$

$$E_2 = \{u_i v_i | 1 \leq i \leq 2t\},$$

dan  $E_3 = E(G[V]).$

Karena  $G[U]$  adalah subgraf  $G$  yang setiap komponennya berupa siklus dan  $|U| = 2t$ , maka  $|E_1| = 2t$ , demikian pula  $G[V]$  adalah subgraf  $G$  yang setiap komponennya berupa gabungan siklus dan  $|V| = 2t$ , maka  $|E_3| = 2t$ , sedangkan  $|E_2| = 2t$ . Perhatikan bahwa  $|V(G(U, V))| = 2k = 2(2t) = 4t$  dan  $|E(G(U, V))| = 3k = 3(2t) = 6t$ .

Selanjutnya akan dikonstruksi pelabelan

$$f: E(G(U, V)) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6t\},$$

sedemikian hingga,

- (i)  $\forall i, 1 \leq i \leq 2t$ , sisi di  $E_2$  dilabeli dengan
- $$f(u_i v_i) = \begin{cases} t+1, & i=1 \\ 3t+2-i, & 2 \leq i \leq 2t \end{cases}$$
- (ii)  $\forall i, 1 \leq i \leq 2t$ , sisi di  $E_1$  dilabeli dengan
- $$f(e_{in}(u_i)) = 6t+1 - f(u_i v_i)$$
- dengan  $e_{in}(u_i)$  menyatakan sisi  $u_{i-1} u_i$
- (iii)  $\forall i, 1 \leq i \leq 2t$ , label sisi di  $E_3$  ditentukan sebagai berikut::
- (a) Jika

$$t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 2t$$

maka

$$f(e_{in}(v_i)) = 7t+1 - f(u_i v_i),$$

dengan  $e_{in}(v_i)$  menyatakan sisi yang masuk ke titik  $v_i$

(b) Jika

$$2t+1 \leq f(u_i v_i) \leq 3t$$

maka

$$f(e_{in}(v_i)) = 3t+1 - f(u_i v_i),$$

seperti sebelumnya, (i) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $E_2$  di graf  $G(U, V)$  adalah

$$B = \{t+1, t+2, \dots, 3t\}.$$

Dari (ii) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $E_1$  di graf  $G(U, V)$  adalah

$$A = \{3t+1, 3t+2, \dots, 5t\}.$$

Dari (iii)(a) dan (iii)(b) diperoleh himpunan label sisi-sisi  $E_3$  di graf  $G(U, V)$  adalah

$$C_1 = \{5t+1, 5t+2, \dots, 6t\}$$

$$\text{dan } C_2 = \{1, 2, 3, \dots, t\},$$

sehingga himpunan label sisi-sisi  $E_3$  adalah

$$C_1 \cup C_2 = \{1, 2, \dots, t, 5t+1, 5t+2, \dots, 6t\}.$$

Karena

$$|A| = 2t = |E_1|,$$

$$|B| = 2t = |E_2|,$$

dan  $|C_1 \cup C_2| = 2t = |E_3|,$

sehingga,

$$|A \cup B \cup C_1 \cup C_2|$$

$$= |A| + |B| + |C_1| + |C_2|$$

(karena  $A, B, C_1, C_2$  saling lepas)

$$= 2t + 2t + t + t$$

$$= 6t$$

$$= |E(G(U, V))|.$$

Ini berarti  $f$  fungsi bijektif.

Himpunan label titik-titik  $G(U, V)$  yang berada di  $U$  adalah

$$U = \{t+2, t+3, \dots, 3t+1\},$$

sedangkan himpunan label titik-titik  $G(U, V)$  yang berada di  $V$  adalah

$$V = \{1, 2, \dots, t+1; 3t+2, 3t+3, \dots, 4t\} \pmod{4t}.$$

Ini berarti

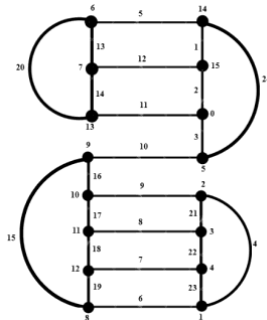
$$f^+: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4t\}$$

merupakan fungsi injektif.

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  adalah pelabelan sisi-anggun pada graf  $G(U, V)$ . Dengan demikian teorema terbukti. ■

**Contoh:**

Pelabelan sisi-anggun graf prisma-kuasi  $G(U, V)$  pada Gambar 11. Mengikuti pengonstruksian seperti dalam bukti Teorema di atas. Dalam hal ini,  $k = 8$  sehingga  $t = 4$ .

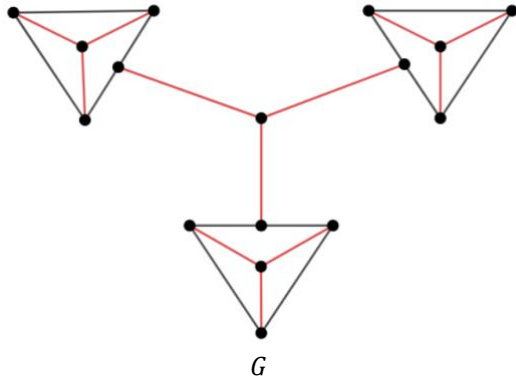


Gambar 11. Pelabelan sisi-anggun pada graf  $G(U, V)$

**Definisi 3.4:**

Misalkan  $G$  graf. Sebuah graf bagian  $G$  yang isomorfik dengan graf bipartit komplit  $K_{1,3}$  disebut sebuah cakar. Titik di  $G$  yang berderajat satu disebut titik pendant. Sisi  $G$  yang terkait dengan titik pendant disebut sisi pendant. Sebuah faktor-cakar pada graf  $G$  adalah graf bagian perentang berisikan cakar-cakar yang saling lepas titik.

**Contoh:**



**Gambar 12.** Graf  $G$  memiliki 4 faktor-cakar (berwarna “merah”)

Perhatikan graf  $G$  pada Gambar 12. Himpunan 4 – cakar (berwarna merah) adalah sebuah faktor-cakar pada  $G$ , karena merupakan subgraf perentang dari  $G$  dan tidak ada 2 cakar yang himpunan titiknya beririsan. Perhatikan bahwa graf bagian  $G$  yang dibangun (diinduksi) oleh semua titik-titik pendant dari cakar merupakan graf bagian  $G$  beraturan-2 (sisi berwarna hitam). Dalam contoh di atas ada 3 siklus yang masing-masing mempunyai 4 titik dan 4 sisi. Berikut akan ditunjukkan bahwa graf seperti itu memiliki pelabelan sisi-anggun.

### Teorema 3.6:

Misalkan  $G$  graf beraturan-3 dengan  $4n$  titik dan  $6n$  sisi. Jika  $G$  dapat didekomposisi menjadi gabungan dari faktor cakar  $C$  dan graf bagian yang diinduksi oleh semua titik pendant dari cakar-cakar dalam  $C$  berupa graf beraturan-2, maka  $G$  adalah graf sisi-anggun.

### Bukti:

Misalkan  $G$  mempunyai faktor cakar yang terdiri dari  $n$  -cakar yang saling lepas titik dinamakan  $k_{1,3}^{(i)}$ , dengan titik pusat  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Misalkan titik pendant ke-  $j$  pada cakar ke-  $i$  dilambangkan dengan  $u_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Konstruksi pelabelan  $f \rightarrow E(G) = \{1, 2, 3, \dots, 6n\}$ . Sebagai berikut :

- (i) Melabeli sisi-sisi  $G$  yang terletak di setiap cakar.  $\forall ij$ ,  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3$

$$f(v_i u_{ij}) = \begin{cases} 3n + i, & j = 1 \\ 4n + i, & j = 2 \\ 6n + 1 - i, & j = 3 \end{cases}$$

- (ii) Melabeli sisi-sisi  $G$  pada siklus-siklus di luar cakar (searah putaran jarum jam)

$$(e_{out}(u_{ij})) = 6n + 1 - f(v_i u_{ij})$$

Perhatikan bahwa dari (i) diperoleh, himpunan label pada sisi-sisi dalam cakar

$A = \{3n + 1, \dots, 4n, 4n + 1, \dots, 5n, 5n + 1, \dots, 6n\}$ , sedangkan dari (ii) diperoleh himpunan label pada sisi-sisi siklus di luar cakar

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}.$$

Himpunan label dari semua sisi  $G$  adalah

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 3n, 3n + 1, \dots, 6n\}.$$

Karena,

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| \\ &= 3n + 3n \\ &= 6n \\ &= |E(G)| \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa,

$$f^+(v_i) = 13n + 1 + i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

sehingga, himpunan label titik-titik pusat dari cakar adalah

$$X = \{13n + 2, 13n + 3, \dots, 14n + 1\},$$

sedangkan himpunan label dari titik-titik pendant semua cakar

$$Y = \{6n + 2, 6n + 3, \dots, 9n + 1\}.$$

Karena

$$X \cap Y = \emptyset,$$

dengan  $|X| = n$  dan  $|Y| = 3n$ , maka

$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |X| + |Y| \\ &= n + 3n = 4n = |V(G)|. \end{aligned}$$

Fungsi

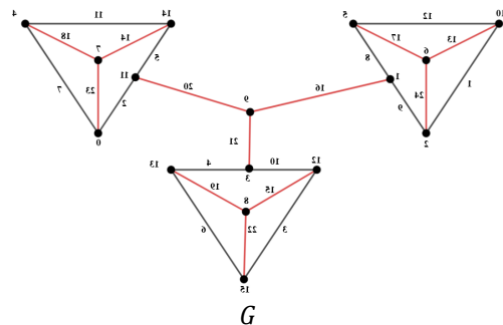
$$f^+ \rightarrow |V(G)| = \{1, 2, 3, \dots, 4n\},$$

sehingga fungsi  $f^+$  injektif.

Berdasarkan Definisi 3.1 fungsi  $f$  adalah sebuah pelabelan sisi-anggun pada  $G$ . Dengan demikian, teorema terbukti. ■

### Contoh:

Mengikuti pengonstruksian seperti dalam bukti Teorema di atas, dapat dilihat pada Gambar 13. Dalam hal ini  $n = 4$ .



**Gambar 13.** Pelabelan sisi-anggun pada graf  $G$

## PENUTUP

### SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan mengenai pelabelan sisi-anggun graf beraturan, Kesimpulan yang dapat diambil dari Skripsi ini meliputi:

1. Syarat perlu graf  $G$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi memiliki pelabelan sisi-anggun adalah  $q(q+1) \equiv \frac{p(p-1)}{2} \pmod{p}$ .
2. Jika  $n$  ganjil maka  $GP(n, k)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.
3. Jika  $n$  genap, maka graf Petersen umum  $GP(n, k)$  adalah graf sisi-anggun.
4. Jika  $G(U, V)$  graf prisma-kuasi dengan  $|U| = |V| = k$ , dengan  $k$  ganjil, maka  $G(U, V)$  tidak memiliki pelabelan sisi-anggun.
5. Jika  $G(U, V)$  graf prisma-kuasi dengan  $|U| = |V| = k$ , dengan  $k$  genap maka  $G(U, V)$  memiliki pelabelan sisi-anggun.
6. Misalkan  $G$  graf beraturan-3 dengan  $4n$  titik dan  $6n$  sisi. Jika  $G$  dapat dikomposisi menjadi gabungan dari faktor cakar  $C$  dan graf bagian yang diinduksi oleh semua titik pendant dari cakar-cakar dalam  $C$  berupa graf beraturan-2, maka  $G$  adalah graf sisi-anggun.

### SARAN

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai pelabelan sisi-anggun graf beraturan-3. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, disarankan agar penelitian selanjutnya dapat mengkaji pelabelan sisi-anggun pada kelas graf beraturan yang berbeda. Penelitian berikutnya juga diharapkan dapat mengembangkan hasil yang telah diperoleh serta mengaitkannya dengan jenis pelabelan graf lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa. I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Buhaerah, Busrah, Z., & Sanjaya, H. (2022). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Living Spiritual Quotient.
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (2016). *Graphs and Digraphs (2nd Ed.)*. a Division of Wadsworth, Inc.
- Gallian, J. A. (2025). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, DS6. <https://doi.org/10.37236/27>.
- Hefetz, D. (2005). Anti-magic graphs via the combinatorial NullStellenSatz. *Journal of Graph Theory*, 50(4), 263–272. <https://doi.org/10.1002/jgt.2011>.
- Lo, S. P. (1985). On Edge-Graceful Labelings Of Graphs. *Congressus Numerantium*, 50, 231–241.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory and its applications*. Addison-Wesley.
- Venkatesan, S., & Sekar, P. (2017). Not all wheel graphs were Edge-graceful. *International Journal of Engineering, Science and Mathematics*, 6(5), 170–173.
- Wallis, W. D. (2001). *Magic Graphs*. Birkhäuser Boston. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0123-6>.
- Wang, T. M., & Zhang, G. H. (2017). On Edge-Graceful Regular Graphs with Particular 3-Factors. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 63, 33–40.
- West, B. D. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall.