

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Jelang Ramadhan

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail: jelang.22072@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Pelabelan harmonis ganjil pada G adalah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2m-1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ adalah bijektif. Selanjutnya, graf G yang memiliki pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil. Jika $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan harmonis ganjil kuat. Selanjutnya, graf G memiliki yang pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil kuat. Misalkan C_m siklus dengan m titik dan C_n siklus dengan n titik. Maka, graf yang dibentuk dari C_m dan C_n dengan menggabungkan sebuah titik C_m dan sebuah titik C_n dilambangkan $C(m \circ n)$. Graf yang dibentuk dari C_m dan C_n dengan menggabungkan sebuah sisi C_m dan sebuah sisi C_n dilambangkan $C(m|n)$. Pada skripsi ini akan dibuktikan bahwa jika G graf harmonis ganjil, maka G adalah graf bipartit. Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$ atau $m, n \equiv 0 \pmod{4}$. Ditunjukkan graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil, jika m dan n bilangan bulat genap. Selanjutnya, jika graf G_1 adalah graf harmonis ganjil kuat dan graf G_2 adalah sebarang graf harmonis ganjil, maka graf G yang diperoleh dengan menghimpitkan sisi G_1 dan G_2 adalah graf harmonis ganjil.

Kata Kunci: Teori Graf, Pelabelan Graf, Pelabelan Harmonis Ganjil.

Abstract (Gunakan Style Penulis & Abstrak)

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$ such that $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$. An odd harmonious labeling of G is an injective function $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ such that the induced function $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2m-1\}$ with $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ is bijective. Graph G that has such a labeling is called an odd harmonious graph. If $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$, then the labeling is called a strongly odd harmonious labeling. Furthermore, a graph G with such a labeling is called a strongly odd harmonious graph. Let C_m is a cycle with m vertices and C_n is a cycle with n vertices. Then, the graph formed from C_m and C_n by joining a vertex of C_m and a vertex C_n is denoted by $C(m \circ n)$. The graph formed from C_m and C_n joining an edge C_m and an edge C_n is denoted by $C(m|n)$. In this thesis, it is shown that if G is an odd harmonious graph, then G is bipartite. Then, the graph $C(m \circ n)$ is an odd harmonious graph if and only if $m, n \equiv 0 \pmod{4}$ or $m, n \equiv 0 \pmod{4}$. It is also shown that the graph $C(m|n)$ is odd harmonious if m and n are even integers. Furthermore, if graph G_1 is strongly odd harmonious graph and graph G_2 is any odd harmonious graph, then the graph G obtained by contracting an edge of G_1 with an edge G_2 is an odd harmonious graph.

Keywords: Graph Theory, Labeling Graph, Odd Harmonious Labeling

PENDAHULUAN

Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan yang telah ada sejak ribuan tahun yang lalu dan masih terus berkembang sampai saat ini. Matematika memiliki peran penting dalam perkembangan teknologi yang mendukung kehidupan manusia modern. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah ada sejak abad ke 17. Dalam catatan sejarah, teori graf digunakan untuk

memecahkan masalah jembatan di Kota Kaönigsberg yang sekarang bernama Kaliningrad dan masalah tersebut diselesaikan oleh Leonhard Euler dengan menggunakan pendekatan teori graf (Panjaitan & Aprilia, 2022). Penerapan teori graf telah digunakan dalam berbagai bidang mulai dari menyelesaikan teka-teki sederhana hingga masalah kompleks seperti pada bidang kedokteran, transportasi, jaringan, genetika, dan lain lain. Semuanya dapat diselesaikan

dengan teori graf atau setidaknya mendekati solusinya (Taheri-Dehkordi, 2024).

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf. Pelabelan graf adalah pemberian bilangan bulat pada titik, sisi, atau keduanya dengan memenuhi syarat tertentu (Gallian, 2022). Dalam perkembangannya, terdapat berbagai jenis pelabelan graf salah satunya adalah pelabelan harmonis. Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Sebuah pelabelan harmonis ganjil pada G adalah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2m - 1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2m - 1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ adalah bijektif. Selanjutnya, graf G memiliki pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil. Jika $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan harmonis ganjil kuat. Selanjutnya, graf G memiliki pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil kuat.

Beberapa sifat pelabelan ganjil pada graf yang telah dipublikasikan diantaranya, pada tahun 2009 telah dibuktikan graf bipartit komplit $K_{m,n}$ adalah graf harmonis ganjil dan jika graf $G(p, q)$ adalah graf harmonis ganjil, maka $2\sqrt{q} \leq p \leq 2p - 1$ (Liang & Bai, 2009). Selanjutnya, pada tahun 2012 telah dibuktikan graf $D_2(B_{n,n})$, graf $H_{n,n}$, dan graf *split* dari graf lintasan P_n adalah graf harmonis ganjil (Vaidya & Shah, 2012). Pada tahun 2019, dibuktikan graf gabungan dari t salinan dari $P_n \times P_n$, graf gabungan lintasan dari t salinan $P_n \times P_n$ dengan $1 \leq i \leq t$, dan graf gabungan satu titik dari $P_n^t(t.n.P_m \times P_m)$ adalah graf harmonis ganjil (Jeyanthi, Philo, & Youssef, 2019). Pada tahun 2023, dibuktikan jika graf G harmonis ganjil, maka setiap siklus di G panjangnya genap dan jika $n \equiv 0 \pmod{4}$, maka siklus C_n merupakan graf harmonis ganjil kuat (Sari & Budayasa, 2023).

Berdasarkan penelitian – penelitian sebelumnya yang masih terbatas pada graf tertentu, penelitian ini akan memperluas kajian mengenai pelabelan harmonis ganjil pada beberapa kelas graf pada gabungan graf siklus.

KAJIAN TEORI

Definis 2.1:

Graf G terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga

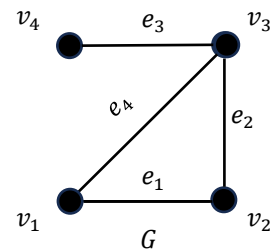
(bisa kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi G (Budayasa, 2007).

Definisi 2.2

Misalkan u dan v dua titik di graf G dan $e = uv$ sisi di G . Titik u dan v berhubungan langsung (*adjacent*) di G . Sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan v . Apabila sisi e terdiri atas titik u dan v , maka titik u dan v terkait (*incident*) dengan e (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1

Misalkan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, dengan $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_1v_3$. Graf G diilustrasikan pada Gambar 2.1. Sisi e_1 menghubungkan titik v_1 dan v_2 . Titik v_1 dan v_2 berhubungan langsung, tetapi titik v_1 dan v_4 tidak berhubungan langsung. Titik v_2 dan v_3 terkait dengan sisi e_2 .



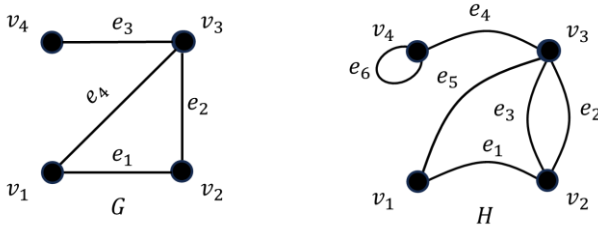
Gambar 2. 1: Graf G dengan 4 titik dan 3 sisi

Definisi 2.3

Sisi graf yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri disebut sebagai gelung (*loop*). Jika ada lebih dari satu sisi yang menghubungkan titik u dan v pada graf, maka sisi – sisi tersebut disebut sisi rangkap. Graf G yang tidak memiliki gelung dan tidak memiliki sisi rangkap disebut graf sederhana (Budayasa, 2007).

Contoh 2.2

Perhatikan graf G dan graf H pada Gambar 2.2



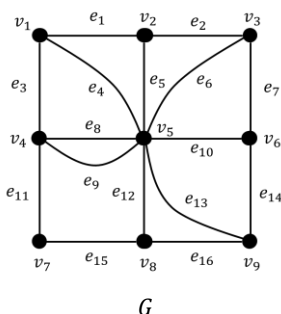
Gambar 2. 2: Graf G graf sederhana. Graf H memiliki gelung dan sisi rangkap.

Definisi 2.4

Misalkan G sebuah graf. Jalan (*walk*) pada graf G adalah sebuah barisan berhingga tak kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i untuk $1 \leq i \leq k$. Kita katakan W adalah sebuah jalan dari titik v_0 ke titik v_k atau jalan (v_0, v_k) . Titik v_0 dan v_k berturut-turut disebut titik awal dan akhir W , titik-titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W . Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ jalan W berbeda, maka W disebut sebuah jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ jalan W juga berbeda, maka W disebut lintasan (*path*). Jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan akhir dari W identik (sama). Jejak tertutup disebut sirkuit. Sikel (*cycle*) adalah jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda, sehingga tidak ada titik dan sisi yang terulang. Banyak sisi dalam sikel disebut panjang dari sikel tersebut. (Budayasa, 2007). Berdasarkan definisi sikel di atas, sikel yang memiliki panjang m dinotasikan dengan C_m . Notasi ini akan digunakan secara konsisten pada pembahasan selanjutnya.

Contoh 2.3

Perhatikan graf G pada Gambar 2.3



Gambar 2. 3: Graf G

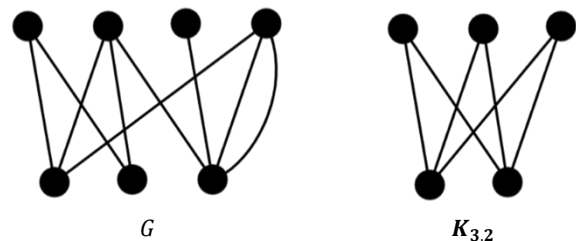
1. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_6, e_7, v_3)$ adalah jalan (v_1, v_3) di graf G yang panjangnya 4. Karena dalam barisan ini sisi e_7 muncul lebih dari sekali, barisan ini bukan jejak.
2. Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_8, v_5, e_{12}, v_8, e_{15}, v_7, e_{11}, v_4)$ adalah jejak di G dengan panjang 5. Karena titik v_4 muncul lebih dari sekali, maka jejak tersebut bukan lintasan.
3. Barisan $(v_1, e_3, v_4, e_{11}, v_7, e_{15}, v_8, e_{12}, v_5)$ adalah sebuah lintasan di graf G dengan panjang 4.
4. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_{12}, v_8, e_{16}, v_9, e_{14}, v_6, e_{10}, v_5, e_8, v_4, e_3, v_1)$ adalah jejak tertutup (sirkuit) di G dengan panjang 8. Jejak tertutup ini bukan sikel karena titik internal v_5 muncul lebih dari sekali.
5. Barisan $(v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_8, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah sikel di G dengan panjang 4.

Definisi 2.5:

Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi dari G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B . Kita sebut (A, B) bipartit dari G . Selanjutnya apabila G sederhana dan bipartit dengan bipartit (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B , maka G disebut graf bipartit komplit, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$. (Budayasa, 2007)

Contoh 2.4:

Perhatikan graf pada Gambar 2.4



Gambar 2. 4: Graf G bipartit. Graf $K_{3,2}$ bipartit komplit

HASIL DAN PEMBAHASAN

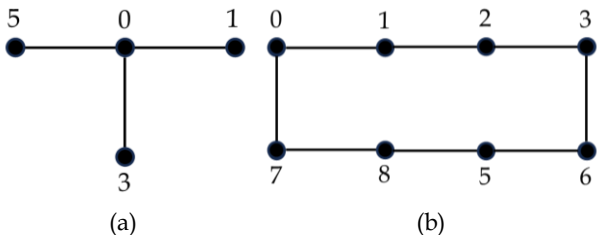
Definisi 3.1:

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Pelabelan harmonis ganjil pada G adalah fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ sedemikian hingga fungsi terinduksi $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2m-1\}$

1} dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v), \forall uv \in E(G)$ adalah bijektif. Selanjutnya, graf G yang memiliki pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil. Jika range $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$, maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan harmonis ganjil kuat. Selanjutnya, graf G memiliki yang pelabelan seperti itu, disebut graf harmonis ganjil kuat. (Jeyanthi, Philo, & Youssef, 2019)

Contoh 3.1:

Perhatikan graf G dan H pada Gambar 3.1



Gambar 3. 1: Pelabelan harmonis ganjil dan harmonis ganjil kuat

Gambar (a) G graf harmonis ganjil. Perhatikan bahwa pelabelan ini tidak kuat karena ada label titik yang melebihi banyak sisi pada graf G .

Gambar (b) H graf harmonis ganjil kuat.

Lemma 3.1:

Jika G graf bipartit, maka setiap siklus di G memiliki panjang genap.

Bukti:

Misalkan G graf bipartit dengan bipartisi A dan B . Misalkan

$$C_k = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_1)$$

sebuah siklus pada G . Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $v_1 \in A$. Karena $v_1 v_2$ sisi di C_k , $v_1 v_2 \in E(G)$ dan G graf bipartit, maka $v_2 \in B$. Begitu juga dengan $v_2 v_3 \in C_k$ dan $v_2 v_3 \in E(G)$ dan G graf bipartit, maka $v_3 \in A$.

Perhatikan bahwa, setiap titik C_k berlabel ganjil di A dan setiap titik C_k berlabel ganjil di B . Karena $v_k v_1 \in E(C_k) \subset E(G)$ dan G graf bipartit, maka $v_k \in B$. Sehingga k genap. ■

Lemma 3.2:

Jika G graf harmonis ganjil, maka G adalah graf bipartit

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.1, andaikan G bukan graf bipartit, maka ada siklus di G yang panjangnya ganjil. Misalkan C_n siklus dengan n titik dan $n = 2k + 1$.

$$C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}, v_{2k+1}, v_1).$$

Misalkan f pelabelan harmonis ganjil pada G . Jelas bahwa ada titik di C_n yang berlabel ganjil. Tanpa menghilangkan keumuman, misal $f(v_1)$ ganjil, karena $f^*(v_1 v_2)$ ganjil, akibatnya $f(v_2)$ genap. Karena $f^*(v_2 v_3)$ ganjil, akibatnya $f(v_3)$ ganjil.

Secara umum diperoleh,

$$\forall i, i \in \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1\}, f(v_i) \text{ ganjil}$$

dan

$$\forall i, i \in \{2, 4, 6, \dots, 2k\}, f(v_i) \text{ genap.}$$

Karena $f(v_{2k+1})$ ganjil dan $f(v_1)$ ganjil, maka $f^*(v_{2k+1} v_1)$ genap. Kontradiksi dengan $f^*(v_{2k+1} v_1)$ ganjil. Dengan demikian, Lemma terbukti ■

Lemma 3.3:

Graf C_n merupakan graf harmonis ganjil kuat jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Misalkan C_n graf harmonis ganjil kuat, maka C_n graf harmonis ganjil, berdasarkan Lemma 3.2 C_n merupakan graf bipartit, sehingga panjang siklus C_n genap. Andaikan $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, karena n genap dan $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, maka $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Misalkan $n = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}^+$. Akibatnya, terdapat $2k + 1$ titik C_n berlabel ganjil dan $2k + 1$ titik C_n berlabel genap. Sehingga,

$$\sum_{v \in V(C_n)} f(v) \text{ (ganjil)} \quad (1)$$

perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{v \in V(C_n)} f(v) &= \sum_{uv \in E(C_n)} f^*(uv) \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots \\ &\quad + 2(4k + 2) - 1 \\ &= (4k + 2)^2 \\ &= 2(2k + 1)^2 \end{aligned}$$

sehingga,

$$\sum_{v \in V(C_n)} f(v) = 2(2k + 1)^2 \text{ (genap)} \quad (2)$$

(2) dan kontradiksi dengan (1).

($\Leftarrow$)

Pembuktian merujuk pada penelitian Sari dan Budayasa (2023). Misalkan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$. Didefinisikan $f: V(C_n) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ sedemikian hingga,

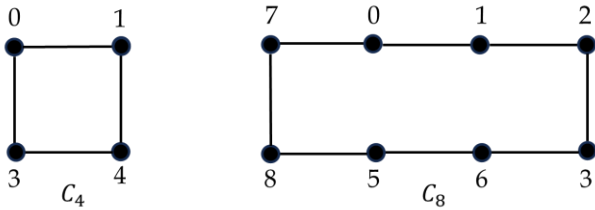
$$f(v_i) = \begin{cases} i-1, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \text{ atau} \\ i \text{ genap dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \\ i+1, i \text{ ganjil dari } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Maka, f fungsi injektif.

Selanjutnya fungsi $f^*: E(C_n) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v) \forall uv \in E(C_n)$ merupakan fungsi bijektif. Berdasarkan Definisi 3.1 f merupakan pelabelan harmonis ganjil kuat. ■

Contoh 3.2:

Graf C_4 dan C_8 pada Gambar 3.2 merupakan ilustrasi dari Lemma 3.3.



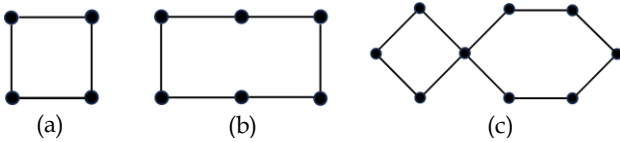
Gambar 3. 2: Graf harmonis ganjil kuat C_4 dan C_8

Definisi 3.2:

Graf yang dibentuk dari C_m dan C_n dengan menggabungkan sebuah titik C_m dan sebuah titik C_n dilambangkan $C(m \circ n)$.

Contoh 3.3:

Perhatikan graf pada Gambar 3.3



Gambar 3. 3: Graf yang dibentuk dari menggabungkan sebuah titik pada dua graf siklus

Gambar (a) graf siklus C_4 dengan 4 titik.

Gambar (b) graf siklus C_6 dengan 6 titik.

Gambar (c) graf yang dibentuk dari C_4 dan C_6 dengan menghimpitkan sebuah titik C_4 dan sebuah titik C_6 dilambangkan $C(4 \circ 6)$.

Lemma 3.4:

Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 2 \pmod{4}$.

Bukti:

Diketahui $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$, maka dapat ditulis $m = 4t + 2$ dan $n = 4k + 2$ dengan $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Sehingga, didapatkan

$$|V(C(m \circ n))| = m + n - 1 = 4t + 4k + 3$$

dan

$$|E(C(m \circ n))| = m + n = 4t + 4k + 4$$

misalkan $G = C(m \circ n)$, selanjutnya konstruksi pelabelan f sebagai berikut

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2(4k + 4t + 4) - 1\}$$

sedemikian hingga,

Kasus 1: $k \geq 2t - 1$

$f(v_i)$

$$= \begin{cases} i-1, 1 \leq i \leq 2k+2 \text{ atau} \\ 2k+3 \leq i \leq 3k+2, i \text{ genap atau} \\ 3k+3 \leq i \leq 2t+3k, i \text{ genap}, t \neq 1, k \text{ genap} \\ \\ i+1, 2k+3 \leq i \leq 3k+2, i \text{ ganjil atau} \\ 3k+3 \leq i \leq 2t+3k, t \neq 1, k \text{ ganjil atau} \\ 2t+3k+1 \leq i \leq 4t+4k+2, i \text{ genap} \\ \\ i+3, 3k+3 \leq i \leq 2t+3k, i \text{ ganjil}, t \neq 1, k \text{ genap atau} \\ 2t+3k+1 \leq i \leq 4t+4k+2, i \text{ ganjil} \\ \\ 2k+2, i = 4t+4k+3 \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m \circ n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 5 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq 2k+2$

$f(v_i) = i-1, f(v_j) = j-1$. Karena $i \neq j$, maka $i-1 \neq j-1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2k+3 \leq i < j \leq 3k+2$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 2.1: i, j genap

$f(v_i) = i-1, f(v_j) = j-1$. Karena $i \neq j$, maka $i-1 \neq j-1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i-1, f(v_j) = j+1$. Karena i genap, maka $i-1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j+1$ genap. Akibatnya, $i-1 \neq j+1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i+1, f(v_j) = j-1$. Karena i ganjil, maka $i+1$ genap. Karena j genap, maka $j-1$ ganjil. Akibatnya, $i+1 \neq j-1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j ganjil

$f(v_i) = i+1, f(v_j) = j+1$. Karena $i \neq j$, maka $i+1 \neq j+1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $3k+3 \leq i \leq 2t+3k$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 3.1: i, j genap

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena i genap, maka $i - 1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j + 1$ genap. Akibatnya, $i - 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j - 1$. Karena i ganjil, maka $i + 1$ genap. Karena j genap, maka $j - 1$ ganjil. Akibatnya, $i + 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.4: i, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $2t + 3k + 1 \leq i \leq 4t + 4k + 2$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 4.1: i, j genap

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 3$. Karena i genap, maka $i + 1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j + 3$ genap. Akibatnya, $i + 1 \neq j + 3 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i + 3, f(v_j) = j + 1$. Karena i ganjil, maka $i + 3$ genap. Karena j genap, maka $j + 1$ ganjil. Akibatnya, $i + 3 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.4: i, j ganjil

$f(v_i) = i + 3, f(v_j) = j + 3$. Karena $i \neq j$, maka $i + 3 \neq j + 3 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 5: $i = 4t + 4k + 3, j \neq 4t + 4k + 3$

$f(v_i) = 2k + 2$. Perhatikan bahwa untuk setiap $f(v_j)$ berada dibentuk $i - 1, i + 1, i + 3$. Dari semua nilai tersebut tidak mungkin ada yang memuat $2k + 2$. Akibatnya, $f(v_j) \neq 2k + 2 = f(v_i)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi-sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif. Terdapat 7 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i \leq 2k + 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i - 1 + (1)) \\ &= 2i - 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1\}$

Kasus 2: $v_1 v_{4k+2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k+2}) &= f(v_1) + f(v_{4k+2}) \\ &= (i - i) + (i + 1 + (1)) \end{aligned}$$

$$= (0) + (4k + 2 + (1))$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{4k + 3\}$

Kasus 3: $2k + 2 \leq i \leq 3k + 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1 + (1)) , i \text{ genap} \\ &\text{atau } (i + 1) + (i - 1 + (1)), i \text{ ganjil} \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4k + 5, 4k + 7, \dots, 6k + 3\}$

Kasus 4: $v_{4k+2} v_{4t+4k+3}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+2} v_{4t+4k+3}) &= f(v_{4k+2}) + f(v_{4t+4k+3}) \\ &= (i + 1) + (2k + 2) \\ &= (4k + 2 + 1) + (2k + 2) \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{6k + 5\}$

Kasus 5: $i = 3k + 2t$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 3 + (1)) , i \text{ genap} \\ &\text{atau } (i + 1) + (i + 1 + (1)), i \text{ ganjil} \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{6k + 4t + 3\}$

Kasus 6: $v_{4t+4k+2} v_{4t+4k+3}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4t+4k+2} v_{4t+4k+3}) &= f(v_{4t+4k+2}) + f(v_{4t+4k+3}) \\ &= (i + 1) + (2k + 2) \\ &= (4k + 4t + 2 + (1) + (2k + 2)) \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_6 = \{6k + 4t + 5\}$

Kasus 7: $2t + 3k + 1 \leq i \leq 4k + 4t + 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i + 1) + (i + 3 + (1)) , i \text{ genap} \\ &\text{atau } (i + 3) + (i + 1 + (1)), i \text{ ganjil} \\ &= 2i + 5 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_7 = \{6k + 4t + 7, 6k + 4t + 9, \dots, 8k + 8t + 7\}$

Dari pengonstruksian diatas, didapatkan label sisi-sisi $C(m \circ n)$ dengan $m, n \equiv 2 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} &A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_7 \\ &= \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1, 4k + 3, \dots, 8k + 8t + 7\} \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 2: $t \leq k \leq 2t - 2$

$$f(v_i) = \begin{cases} i, 1 \leq i \leq 2k + 1 \text{ atau} \\ 2k + 2 \leq i \leq 2k + 2t, i \text{ ganjil atau} \\ 4k + 4 \leq i \leq 6k + 5 \text{ atau} \\ 6k + 6 \leq i \leq 4k + 4t + 3, i \text{ ganjil} \\ i + 2, 2k + 2 \leq i \leq 2k + 2t, i \text{ genap atau} \\ 2k + 2t + 1 \leq i \leq 4k + 1 \text{ atau} \\ 6k + 6 \leq i \leq 4k + 4t + 3, i \text{ genap} \\ 0, i = 4k + 2 \\ 8k + 7, i = 4k + 3 \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m \circ n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 7 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq 2k + 2$

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2k + 3 \leq i < j \leq 3k + 2$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 2.1: i, j ganjil

$f(v_i) = i, f(v_j) = j$. Karena $i \neq j$, maka $i \neq j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.2: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i, f(v_j) = j + 2$. Andaikan $f(v_i) = f(v_j)$, maka $i = j + 2$. Hal ini tidak mungkin karena $i < j$, sehingga $f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.3: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j$. Andaikan $f(v_i) = f(v_j)$, maka $j = i + 2$. Hal ini tidak mungkin karena $i < j$, sehingga $f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j genap $f(v_i) = i + 2, f(v_j) = j + 2$. Karena $i \neq j$, maka $i + 2 \neq j + 2 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $4k + 4 \leq i < j \leq 6k + 5$

$f(v_i) = i, f(v_j) = j$. Karena $i \neq j$, maka $i \neq j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $6k + 6 \leq i < j \leq 4k + 4t + 3$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 4.1: i, j ganjil

$f(v_i) = i, f(v_j) = j$. Karena $i \neq j$, maka $i \neq j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.2: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i, f(v_j) = j + 2$. Andaikan $f(v_i) = f(v_j)$, maka $i = j + 2$. Hal ini tidak mungkin karena $i < j$, sehingga $f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.3: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j$. Andaikan $f(v_i) = f(v_j)$, maka $j = i + 2$. Hal ini tidak mungkin karena $i < j$, sehingga $f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 4.4: i, j genap

$f(v_i) = i + 2, f(v_j) = j + 2$. Karena $i \neq j$, maka $i + 2 \neq j + 2 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 5: $2k + 2t + 1 \leq i < j \leq 4k + 1$

$f(v_i) = i + 2, f(v_j) = j + 2$. Karena $i \neq j$, maka $i + 2 \neq j + 2 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 6: $i = 4k + 2$

$f(v_i) = 0$. Misal $j \neq 4k + 2$, perhatikan bahwa untuk setiap $f(v_j)$ berada dibentuk $i, i + 2$, dan $8k + 7$. Dari semua nilai tersebut tidak mungkin ada yang memuat 0. Akibatnya, $f(v_j) \neq 0 = f(v_i)$

Kasus 7: $i = 4k + 3$

$f(v_i) = 8k + 7$. Misal $j \neq 4k + 3$, perhatikan bahwa untuk setiap $f(v_j)$ berada dibentuk $i, i + 2$, dan 0. Dari semua nilai tersebut tidak mungkin ada yang memuat $8k + 7$. Akibatnya, $f(v_j) \neq 8k + 7 = f(v_i)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi-sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif. Terdapat 10 kasus:

Kasus 1: $v_{4k+2}v_1$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+2}v_1) &= f(v_{4k+2}) + f(v_1) \\ &= (0) + (i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1\}$

Kasus 2: $1 \leq i \leq 2k$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i) + (i + (1)) \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{3, 5, 7, \dots, 4k + 1\}$

Kasus 3: $v_{4k+2}v_{4k+1}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+2}v_{4k+1}) &= f(v_{4k+2}) + f(v_{4k+1}) \\ &= (0) + (i + 2) \\ &= 4k + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4k + 3\}$

Kasus 4: $2k + 1 \leq i \leq 2k + 2t - 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i) + (i + 2 + (1)) \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{4k + 5, 4k + 7, \dots, 4k + 4t + 1\}$

Kasus 5: $v_{4k+2}v_{4k+4t+3}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+2}v_{4k+4t+3}) &= f(v_{4k+2}) + f(v_{4k+4t+3}) \\ &= (0) + (i) \\ &= 4k + 4t + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{4k + 4t + 3\}$

Kasus 6: $2k + 2t \leq i \leq 4k$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i + 2) + (i + 2 + (1)) \\ &= 2i + 5 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_6 = \{4k + 4t + 5, 4k + 4t + 7, \dots, 8k + 5\}$

Kasus 7: $v_{4k+2} v_{4k+3}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+2} v_{4k+3}) &= f(v_{4k+2}) + f(v_{4k+3}) \\ &= (0) + (8k + 7) \\ &= 8k + 7 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_7 = \{8k + 7\}$

Kasus 8: $4k + 4 \leq i \leq 6k + 4$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i) + (i + (i)) \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_8 = \{8k + 9, 8k + 11, \dots, 12k + 9\}$

Kasus 9: $v_{4k+3} v_{4k+4}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k+3} v_{4k+4}) &= f(v_{4k+3}) + f(v_{4k+4}) \\ &= (8k + 7) + (i) \\ &= 12k + 11 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_9 = \{12k + 11\}$

Kasus 10: $6k + 5 \leq i \leq 4k + 4t + 2$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i) + (i + 2 + (i)), i \text{ ganjil atau} \\ &\quad (i + 2) + (i + (i)), i \text{ genap} \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_{10} = \{12k + 13, 12k + 15, \dots, 8k + 8t + 7\}$

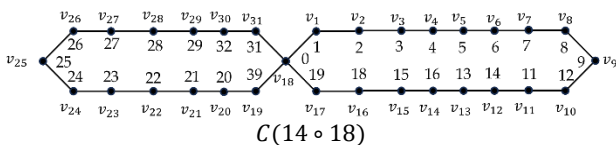
Dari pengonstruksian diatas, didapatkan label sisi-sisi $C(m \circ n)$ dengan $m, n \equiv 2 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{10} &= \\ \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1, 4k + 3, \dots, 8k + 8t + 7\} \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil. Dengan demikian Lemma terbukti. ■

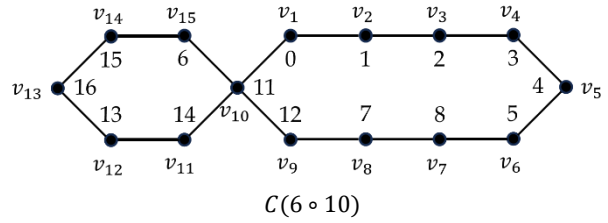
Contoh 3.4:

Graf $C(14 \circ 18)$ pada Gambar 3.4 merupakan ilustrasi Lemma 3.4 saat $t \leq k \leq 2t - 2$



Gambar 3. 4: Pelabelan harmonis ganjil $C(14 \circ 18)$

Graf $C(6 \circ 10)$ pada Gambar 3.5 merupakan ilustrasi Lemma 3.4. saat $k \geq 2t - 1$



Gambar 3. 5: Pelabelan harmonis ganjil $C(6 \circ 10)$

Lemma 3.5:

Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$.

Bukti:

Diketahui $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 0 \pmod{4}$, maka dapat ditulis $m = 4t$ dan $n = 4k$ dengan $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Sehingga, didapatkan

$$|V(C(m \circ n))| = m + n - 1 = 4t + 4k - 1$$

dan

$$|E(C(m \circ n))| = m + n = 4t + 4k$$

misalkan $G = C(m \circ n)$, selanjutnya konstruksi pelabelan f sebagai berikut

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2(4k + 4t) - 1\}$$

sedemikian hingga,

$$f(v_i) = \begin{cases} i - 1, 1 \leq i \leq 2k \text{ atau} \\ 2k + 1 \leq i \leq 4k + 2t - 2, i \text{ genap} \\ i + 1, 2k + 1 \leq i \leq 4k + 2t - 2, i \text{ ganjil atau} \\ 4k + 2t - 1 \leq i \leq 4k + 4t - 1 \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m \circ n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 4 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq 2k$

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2k + 1 \leq i < j \leq 4k + 2t - 2$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 2.1: i, j genap

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena i genap, maka $i - 1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j + 1$ genap. Akibatnya, $i - 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j - 1$. Karena i ganjil, maka $i + 1$ genap. Karena j genap, maka $j - 1$ ganjil. Akibatnya, $i + 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $4k + 2t - 1 \leq i < j \leq 4k + 4t - 1$

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $4k + 2t - 1 \leq j \leq 4k + 4t - 1, 1 \leq i \leq 2k$

Misal $j \geq 4k + 2t - 1$, maka $f(v_j) = j + 1 \geq 4k + 2t$.

Sedangkan, $i \leq 2k$, maka $f(v_i) = i - 1 \leq 2k - 1$.

Akibatnya, $f(v_j) > f(v_i) \Rightarrow f(v_j) \neq f(v_i)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi- sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif.

Kasus 1: $1 \leq i \leq 2k - 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i - 1 + (1)) \\ &= 2i - 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 4k - 3\}$

Kasus 2: $v_1 v_{4k}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k}) &= f(v_1) + f(v_{4k}) \\ &= (i - 1) + (i - 1) \\ &= (0) + (4k - 1) \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{4k - 1\}$

Kasus 3: $2k \leq i \leq 4k + 2t - 2$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1 + (1)), i \text{ genap atau} \\ &\quad (i + 1) + (i - 1 + (1)), i \text{ ganjil} \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4k + 1, 4k + 3, \dots, 8k + 4t - 3\}$

Kasus 4: $v_1 v_{4k}$

$$\begin{aligned} f^*(v_{4k} v_{4k+4t-1}) &= f(v_{4k}) + f(v_{4k+4t-1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1) \\ &= (4k - 1) + (4k + 4t - 1 + 1) \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{8k + 4t - 1\}$

Kasus 5: $4k + 2t - 1 \leq i \leq 4k + 4t - 2$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i + 1) + (i + 1 + (1)) \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{8k + 4t + 1, 8k + 4t + 3, \dots, 8k + 8t - 1\}$

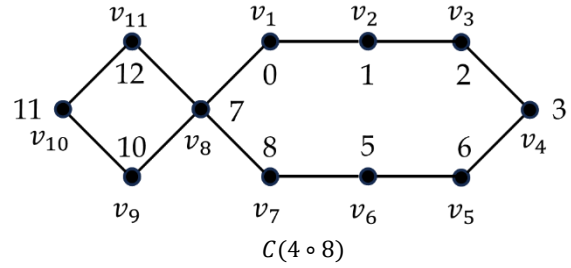
Dari pengonstruksian diatas, maka label sisi dari $C(m \circ n)$ dengan $m, n \equiv 0 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 &= \\ \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1, 4k + 3, \dots, 8k + 8t - 1\}. \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada $C(m \circ n)$, dengan demikian Lemma terbukti. ■

Contoh 3.5:

Graf $C(4 \circ 8)$ pada Gambar 3.6 merupakan ilustrasi Lemma 3.5.



Gambar 3. 6: Pelabelan harmonis ganjil $C(4 \circ 8)$

Teorema 3.6:

Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$ atau $m, n \equiv 2 \pmod{4}$.

Bukti:

($\Rightarrow$)

Diasumsikan m dan n memiliki sisa pembagian yang berbeda terhadap 4. Tanpa mengurangi keumuman, misal $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$. Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Sari dan Budayasa (2023), graf $C(m \circ n)$ dengan $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ bukan graf harmonis ganjil. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

($\Leftarrow$)

Berdasarkan Lemma 3.2 dan 3.3 graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 2 \pmod{4}$ atau $m, n \equiv 0 \pmod{4}$. ■

Teorema 3.7:

Misalkan graf G_1 dengan n_1 titik, m_1 sisi adalah graf harmonis ganjil kuat dan graf G_2 dengan n_2 titik, m_2 sisi adalah sebarang graf harmonis ganjil. Misalkan $e_1 = xy$ adalah sebuah sisi pada graf G_1 dengan label x adalah m_1 dan label y adalah $m_1 - 1$ dan $e_2 = uv$ adalah sebuah sisi pada graf G_2 dengan u berlabel 0 dan v berlabel 1. Maka, graf G yang diperoleh dengan menggabungkan sisi e_1 dan e_2 adalah graf harmonis ganjil.

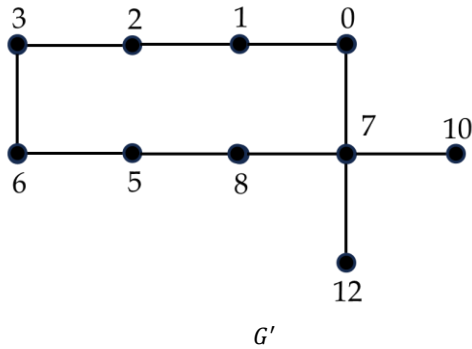
Bukti:

Tambahkan $m_1 - 1$ ke semua label titik G_2 (kecuali u dan v) dan label titik G_1 tetap. Selanjutnya, label sisi G_1 tetap dan label sisi G_2 bertambah sebesar $2m_1 - 2$. Misalkan $v_i v_j$ sisi G_2 , $v_i v_j \neq uv$ di G_2 , label $v_i v_j$ adalah ganjil. Misalkan labelnya $2t - 1$ untuk $1 \leq t \leq m_2$, di G_2 sisi $v_1 v_2$ menjadi $2t - 1 + 2m_1 - 2$, sehingga himpunan label sisi - sisi G_2 di G adalah

$\{2t - 1 + 2m_1 - 2 \mid 1 \leq t \leq m_2\} = \{2m_1 - 1, 2m_1 + 1, \dots, 2m_1 + 2m_2 - 3\}$. Sedemikian hingga label sisi G_1 di G kecuali e_1 adalah $\{1, 3, 5, \dots, 2m_1 - 3\}$. Maka, himpunan label sisi G adalah himpunan $\{1, 3, 5, \dots, 2m_1 + 2m_2 - 3\}$ ■

Contoh 3.6:

Perhatikan graf G dan H pada Gambar 3.1. Kedua graf tersebut masing masing merupakan graf harmonis ganjil dan harmonis ganjil kuat. Graf G' yang disusun dari gabungan graf G dan H pada Gambar 3.7 merupakan ilustrasi Teorema 3.7



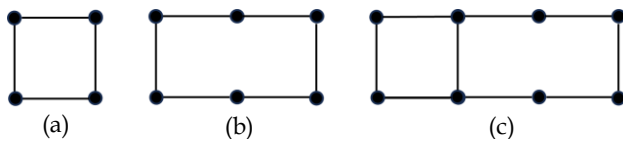
Gambar 3. 7: Pelabelan harmonis ganjil G'

Definisi 3.3:

Graf yang dibentuk dari C_m dan C_n dengan menggabungkan sebuah sisi C_m dan sebuah sisi C_n dilambangkan $C(m|n)$.

Contoh 3.7:

Perhatikan graf pada Gambar 3.8



Gambar 3. 8: Graf yang dibentuk dari menghimpitkan sebuah sisi pada dua graf siklus

Gambar (a) graf siklus C_4 dengan 4 titik.

Gambar (b) graf siklus C_6 dengan 6 titik.

Gambar (c) graf yang dibentuk dari C_4 dan C_6 dengan menghimpitkan sebuah sisi C_4 dan sebuah sisi C_6 dilambangkan $C(4|6)$.

Lemma 3.8:

Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$.

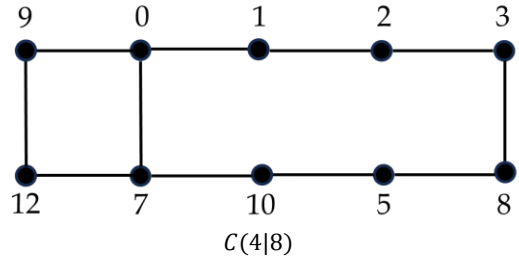
Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.3, jika $m \equiv 0 \pmod{4}$, maka C_m merupakan graf harmonis ganjil kuat.

Berlaku juga jika $n \equiv 0 \pmod{4}$, maka C_n merupakan graf harmonis ganjil kuat. Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.3 dan Teorema 3.7 disimpulkan $C(m|n)$ graf harmonis ganjil. ■

Contoh 3.8:

Graf $C(4|8)$ pada Gambar 3.9 merupakan ilustrasi dari Lemma 3.8.



Gambar 3. 9: Pelabelan harmonis ganjil $C(4|8)$

Lemma 3.9:

Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 2 \pmod{4}$.

Bukti:

Diketahui $m \equiv 2 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$, maka dapat ditulis $m = 4t + 2$ dan $n = 4k + 2$ dengan $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Sehingga, didapatkan

$$|V(C(m|n))| = m + n - 2 = 4t + 4k + 2$$

dan

$$|E(C(m|n))| = m + n - 1 = 4t + 4k + 3$$

Tanpa menghilangkan keumuman, misal $m \leq n$. Misalkan $G = C(m|n)$, selanjutnya konstruksi pelabelan f sebagai berikut,

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2(4k + 4t + 3) - 1\}$$

sedemikian hingga,

$$f(v_i) = \begin{cases} i - 1, 1 \leq i \leq 2k + 2 \text{ atau} \\ 2k + 3 \leq i \leq 2t + 2k, i \text{ genap}, t \neq 1 \\ i + 1, 2k + 3 \leq i \leq 2t + 2k, i \text{ ganjil}, t \neq 1 \\ \text{atau } 2t + 2k + 1 \leq i \leq 4t + 4k + 2 \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m|n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 4 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq 2k + 2$

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2k + 3 \leq i < j \leq 2t + 2k$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 2.1: i, j genap

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena i genap, maka $i - 1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j + 1$ genap. Akibatnya, $i - 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j - 1$. Karena i ganjil, maka $i + 1$ genap. Karena j genap, maka $j - 1$ ganjil. Akibatnya, $i + 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $2t + 2k + 1 \leq i < j \leq 4t + 4k + 2$

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $2t + 2k + 1 \leq j \leq 4t + 4k + 2, 1 \leq i \leq 2k + 2$

Misal $j \geq 2t + 2k + 1$, maka $f(v_j) = j + 1 \geq 2t + 2k + 2$. Sedangkan, $i \leq 2k + 2$, maka $f(v_i) = i - 1 \leq 2k + 1$. Akibatnya, $f(v_j) > f(v_i) \Rightarrow f(v_j) \neq f(v_i)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi- sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif.

Terdapat 5 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i \leq 2k + 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i - 1 + (1)) \\ &= 2i - 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1\}$

Kasus 2: $v_1 v_{4k+2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k+2}) &= f(v_1) + f(v_{4k+2}) \\ &= (i - 1) + (i + 1) \\ &= 0 + (4k + 2) + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{4k + 3\}$

Kasus 3: $2k + 2 \leq i \leq 2t + 2k$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1 + (1)), i \text{ genap} \\ &\text{atau } (i + 1) + (i - 1 + (1)), i \text{ ganjil} \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4k + 5, 4k + 7, 4k + 9, \dots, 4t + 4k + 1\}$

Kasus 4: $v_1 v_{4t+4k+2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4t+4k+2}) &= f(v_1) + f(v_{4t+4k+2}) \\ &= (i - 1) + (i + 1) \\ &= 0 + (4t + 4k + 2) + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{4t + 4k + 3\}$

Kasus 5: $2t + 2k + 1 \leq i \leq 4t + 4k + 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i + 1) + (i + 1 + (1)) \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{4t + 4k + 5, 4t + 4k + 7, 4t + 4k + 9, \dots, 8t + 8k + 5\}$

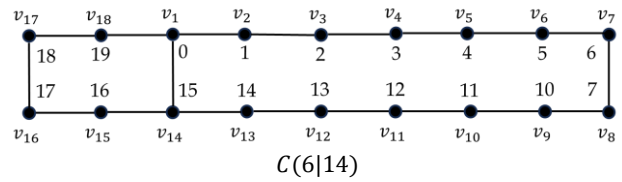
Dari pengonstruksian diatas, maka label sisi dari $C(m|n)$ dengan $m, n \equiv 2 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 &= \\ \{1, 3, 5, \dots, 4k + 1, 4k + 3, \dots, 8t + 8k + 5\}. \end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada $C(m|n)$, dengan demikian Lemma terbukti. ■

Contoh 3.9:

Graf $C(6|14)$ pada Gambar 3.10 merupakan ilustrasi Lemma 3.9.



Gambar 3. 10: Pelabelan harmonis ganjil $C(6|14)$

Lemma 3.10:

Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Bukti:

Diketahui $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$, maka dapat ditulis $m = 4t$ dan $n = 4k + 2$ dengan $t, k \in \mathbb{Z}^+$. Sehingga, didapatkan

$$|V(C(m|n))| = m + n - 2 = 4t + 4k$$

dan

$$|E(C(m|n))| = m + n - 1 = 4t + 4k + 1$$

misalkan $G = C(m|n)$, selanjutnya konstruksi pelabelan f sebagai berikut

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2(4k + 4t + 1) - 1\}$$

sedemikian hingga,

Kasus 1: $m < n$

$$f(v_i) = \begin{cases} i - 1, 1 \leq i \leq 2k + 3 \text{ atau} \\ 2k + 4 \leq i \leq 2t + 2k + 1, i \text{ ganjil}, t \neq 1 \\ \text{atau} \\ 2t + 2k + 2 \leq i \leq 4t + 4k, i \text{ ganjil} \\ i + 1, 2k + 4 \leq i \leq 2t + 2k + 1, i \text{ genap}, \\ t \neq 1 \\ i + 3, 2t + 2k + 2 \leq i \leq 4t + 4k, i \text{ genap} \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m|n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 4 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i < j \leq 2k + 3$

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2k + 4 \leq i < j \leq 2t + 2k + 1$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 2.1: i, j ganjil

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.2: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 1$. Karena i ganjil, maka $i - 1$ genap. Karena j genap, maka $j + 1$ ganjil. Akibatnya, $i - 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.3: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j - 1$. Karena i genap, maka $i + 1$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j - 1$ genap. Akibatnya, $i + 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 2.4: i, j genap

$f(v_i) = i + 1, f(v_j) = j + 1$. Karena $i \neq j$, maka $i + 1 \neq j + 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $2t + 2k + 2 \leq i < j \leq 4t + 4k$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 3.1: i, j ganjil

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j - 1$. Karena $i \neq j$, maka $i - 1 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.2: i ganjil, j genap

$f(v_i) = i - 1, f(v_j) = j + 3$. Karena i ganjil, maka $i - 1$ genap. Karena j genap, maka $j + 3$ ganjil. Akibatnya, $i - 1 \neq j + 3 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.3: i genap, j ganjil

$f(v_i) = i + 3, f(v_j) = j - 1$. Karena i genap, maka $i + 3$ ganjil. Karena j ganjil, maka $j - 1$ genap. Akibatnya, $i + 3 \neq j - 1 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.4: i, j genap

$f(v_i) = i + 3, f(v_j) = j + 3$. Karena $i \neq j$, maka $i + 3 \neq j + 3 \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $2t + 2k + 2 \leq j \leq 4t + 4k, 1 \leq i \leq 2k + 3$

Terdapat 2 subkasus:

Subkasus 4.1: j ganjil

Misal $j \geq 2t + 2k + 2$, maka $f(v_j) = j - 1 \geq 2t + 2k + 1$. Sedangkan, $i \leq 2k + 3$, maka $f(v_i) = i - 1 \leq 2k + 2$. Akibatnya, $f(v_j) > f(v_i) \Rightarrow f(v_j) \neq f(v_i)$

Subkasus 4.2: j genap

Misal $j \geq 2t + 2k + 2$, maka $f(v_j) = j + 3 \geq 2t + 2k + 5$. Sedangkan, $i \leq 2k + 3$, maka $f(v_i) = i - 1 \leq 2k + 2$. Akibatnya, $f(v_j) > f(v_i) \Rightarrow f(v_j) \neq f(v_i)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi- sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif.

Terdapat 5 kasus:

Kasus 1: $1 \leq i \leq 2k + 2$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i - 1 + (1)) \\ &= 2i - 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1, 3, 5, \dots, 4k + 3\}$

Kasus 2: $v_1 v_{4k+2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k+2}) &= f(v_1) + f(v_{4k+2}) \\ &= (i - 1) + (i + 3) \\ &= 0 + (4k + 2) + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{4k + 5\}$

Kasus 3: $2k + 3 \leq i \leq 2t + 2k$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 1 + (1)), i \text{ ganjil atau} \\ &\quad (i + 1) + (i - 1 + (1)), i \text{ genap} \\ &= 2i + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4k + 7, 4k + 9, 4k + 11, \dots, 4t + 4k + 1\}$

Kasus 4: $v_1 v_{4t+4k}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4t+4k}) &= f(v_1) + f(v_{4t+4k}) \\ &= (i - 1) + (i + 3) \\ &= 0 + (4t + 4k) + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{4t + 4k + 3\}$

Kasus 5: $2t + 2k + 1 \leq i \leq 4t + 4k - 1$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) \\ &= (i - 1) + (i + 3 + (1)), i \text{ ganjil atau} \\ &\quad (i + 3) + (i - 1 + (1)), i \text{ genap} \\ &= 2i + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{4t + 4k + 5, 4t + 4k + 7, \dots, 8t + 8k + 1\}$

Dari pengonstruksian diatas, maka label sisi dari $C(m|n)$ dengan $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ ketika $m < n$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{1, 3, 5, \dots, 4k + 3, 4k + 5, \dots, 8t + 8k + 1\}.$$

Akibatnya, berdasarkan 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil.

Kasus 2: $m > n$

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, i = 1 \\ 4k + 4t + 3 - i, 2 \leq i \leq 2k + 2t + 2 \text{ atau} \\ 2k + 2t + 3 \leq i \leq 4k + 2t, i \text{ genap}, k \neq 1 \\ 4k + 4t + 1 - i, 2k + 2t + 3 \leq i \leq 4k + 2t, \\ i \text{ ganjil}, k \neq 1 \text{ atau} \\ 4k + 2t + 1 \leq i \leq 4k + 4t \end{cases}$$

Ditunjukkan fungsi f injektif. Misalkan $v_i, v_j \in V(C(m|n))$ dengan $i \neq j$.

Terdapat 5 kasus:

Kasus 1: $i = 1, j = 2$

$f(v_i) = 0, f(v_j) = 4k + 4t + 3 - j$. Karena $k, t \in \mathbb{Z}^+$, maka $f(v_i) < f(v_j) \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 2: $2 \leq i < j \leq 2k + 2t + 2$

$f(v_i) = 4k + 4t + 3 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 3 - j$. Karena $i \neq j$, maka $4k + 4t + 3 - i \neq 4k + 4t + 3 - j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 3: $2k + 2t + 3 \leq i \leq 4k + 2t$

Terdapat 4 subkasus:

Subkasus 3.1: i, j genap

$f(v_i) = 4k + 4t + 3 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 3 - j$. Karena $i \neq j$, maka $4k + 4t + 3 - i \neq 4k + 4t + 3 - j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.2: i genap, j ganjil

$f(v_i) = 4k + 4t + 3 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 1 - j$. Karena i genap, maka $4k + 4t + 3 - i$ ganjil. Karena j ganjil, maka $4k + 4t + 1 - j$ genap $\Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.3: i ganjil, j genap

$f(v_i) = 4k + 4t + 1 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 3 - j$. Karena i ganjil, maka $4k + 4t + 1 - i$ genap. Karena j genap, maka $4k + 4t + 3 - j$ ganjil $\Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Subkasus 3.4: i, j ganjil

$f(v_i) = 4k + 4t + 1 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 1 - j$. Karena $i \neq j$, maka $4k + 4t + 1 - i \neq 4k + 4t + 1 - j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 4: $4k + 2t + 1 \leq i < j \leq 4k + 4t$

$f(v_i) = 4k + 4t + 1 - i, f(v_j) = 4k + 4t + 1 - j$. Karena $i \neq j$, maka $4k + 4t + 1 - i \neq 4k + 4t + 1 - j \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Kasus 5: $4k + 2t + 1 \leq j \leq 4k + 4t, i = 1$

$f(v_i) = 0, f(v_j) = 4k + 4t + 1 - j$. Karena $k, t \in \mathbb{Z}^+$, maka $f(v_i) < f(v_j) \Rightarrow f(v_i) \neq f(v_j)$

Jadi, fungsi f injektif.

Selanjutnya dibuktikan sisi- sisi yang terinduksi merupakan fungsi bijektif.

Terdapat 6 kasus:

Kasus 1: $v_1 v_{4k+4t}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k+4t}) &= f(v_1) + f(v_{4k+4t}) \\ &= (0) + (4k + 4t + 1 - i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_1 = \{1\}$

Kasus 2: $4k + 2t + 2 \leq i \leq 4k + 4t$

$$\begin{aligned} f^*(v_{i-1} v_i) &= f(v_{i-1}) + f(v_i) \\ &= (4k + 4t + 1 - i - (1)) + (4k + 4t + 1 - i) \\ &= 2(4k + 4t + 1 - i) + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_2 = \{4t - 1, \dots, 3\}$

Kasus 3: $v_1 v_{4k+2}$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_{4k+2}) &= f(v_1) + f(v_{4k+2}) \\ &= (0) + (4k + 4t + 3 - i) \\ &= 4t + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_3 = \{4t + 1\}$

Kasus 4: $4k + 2t + 1 \leq i \leq 2t + 2k + 3$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i-1}) &= f(v_i) + f(v_{i-1}) \\ &= (4k + 4t + 1 - i) + (4k + 4t + 3 - i - (1)), i = 4k + 2t + 1 \text{ atau } (4k + 4t + 3 - i) + (4k + 4t + 1 - i - (1)), \\ &4k + 2t + 1 < i \leq 2t + 2k + 3 \\ &= 2(4k + 4t + 1 - i) + 3 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_4 = \{4t + 3, \dots, 4t + 4k - 1\}$

Kasus 5: $v_1 v_2$

$$\begin{aligned} f^*(v_1 v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= (0) + (4k + 4t + 3 - i) \\ &= 4k + 4t + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_5 = \{4k + 4t + 1\}$

Kasus 6: $2k + 2t + 2 \leq i < 2$

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i-1}) &= f(v_i) + f(v_{i-1}) \\ &= (4k + 4t + 3 - i) + (4k + 4t + 3 - i - (1))) \\ &= 2(4k + 4t + 3 - i) + 1 \end{aligned}$$

Sehingga menghasilkan himpunan label sisi $A_6 = \{4t + 4k + 3, \dots, 8t + 8k + 1\}$

Dari pengonstruksian diatas, maka label sisi dari $C(m|n)$ dengan $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ ketika $m > n$

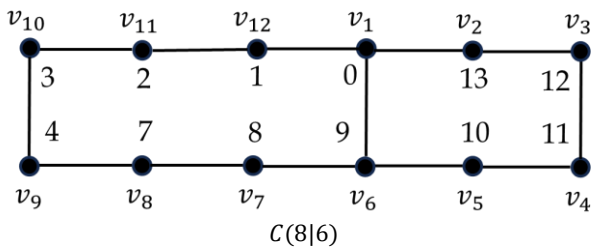
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 =$$

$$\{1, 3, 5, \dots, 4k + 3, 4k + 5, \dots, 8t + 8k + 1\}$$

Akibatnya, berdasarkan Definisi 3.1, f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada $C(m|n)$, dengan demikian Lemma terbukti. ■

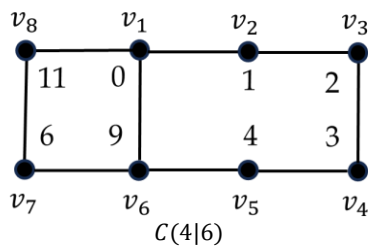
Contoh 3.10:

Graf $C(8|6)$ pada Gambar 3.11 merupakan ilustrasi Lemma 3.11 saat $m > n$.



Gambar 3.11: Pelabelan harmonis ganjil $C(8|6)$

Graf $C(4|6)$ pada Gambar 3.12 merupakan ilustrasi Lemma 3.11 saat $m < n$.



Gambar 3.12: Pelabelan harmonis ganjil $C(4|6)$

Teorema 3.11:

Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil, jika m dan n bilangan bulat genap.

Bukti:

Misalkan m dan n adalah bilangan bulat genap. Setiap bilangan genap memenuhi $m, n \equiv 0 \pmod{4}$ atau $m, n \equiv 2 \pmod{4}$. Dengan demikian ada beberapa kasus,

Kasus 1: $m, n \equiv 0 \pmod{4}$

Berdasarkan Lemma 3.8, graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil.

Kasus 2: $m, n \equiv 2 \pmod{4}$

Berdasarkan Lemma 3.9, graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil.

Kasus 3: $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$

Berdasarkan Lemma 3.10, graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

PENUTUP**SIMPULAN**

1. Jika G graf bipartit, maka setiap siklus di G panjangnya genap.
2. Jika G graf harmonis ganjil, maka G adalah graf bipartit.

3. Graf C_n merupakan graf harmonis ganjil kuat jika dan hanya jika $n \equiv 0 \pmod{4}$.
4. Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 2 \pmod{4}$.
5. Graf $C(m \circ n)$ adalah graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$.
6. Graf $C(m \circ n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$ atau $m, n \equiv 0 \pmod{4}$.
7. Misalkan graf G_1 dengan n_1 titik, m_1 sisi adalah graf harmonis ganjil kuat dan graf G_2 dengan n_2 titik, m_2 sisi adalah sebarang graf harmonis ganjil. Misalkan $e_1 = xy$ adalah sebuah sisi pada graf G_1 dengan label x adalah m_1 dan label y adalah $m_1 - 1$ dan $e_2 = uv$ adalah sebuah sisi pada graf G_2 dengan u berlabel 0 dan v berlabel 1. Maka, graf G yang diperoleh dengan menghimpitkan sisi e_1 dan e_2 adalah graf harmonis ganjil.
8. Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 0 \pmod{4}$.
9. Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m, n \equiv 2 \pmod{4}$.
10. Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil jika $m \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$.
11. Graf $C(m|n)$ merupakan graf harmonis ganjil, jika m dan n bilangan bulat genap.

SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan skripsi ini, saran bagi pembaca adalah agar bisa mencari pelabelan harmonis ganjil pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Gallian, J. A. (2022). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 1-623.
- Jeyanthi, P., Philo, S., & Youssef, M. Z. (2019). Odd Harmonious Labeling of Grid Graph. *PROYECCIONES*, 411-428.
- Liang, Z. -H., & Bai, Z. -L. (2009). On The Odd Harmonious Graphs with Applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 105-116.
- Panjaitan, D. J., & Aprilia, R. (2022). *TEORI GRAF*. Medan: LPPM UMNAW.
- Sari, J. M., & Budayasa, I. K. (2023). PELABELAN HARMONIS GANJIL KUAT BEBERAPA KELAS GRAF. *MATHunesa : Jurnal Ilmiah*

Matematika, 328-338.

Taheri-Dehkordi, M. (2024). Graph Theory; History, Applications and Vision. *Journal of Mathematics and Society*, 1-8.

Vaidya, S. K., & Shah, N. H. (2012). Odd Harmonious Labeling of Some Graphs. *Intenational J.Math*, 105-112.