

BILANGAN KROMATIK PERSEGI BEBERAPA KELAS GRAF

Loricha Dwi Reylawati

Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: lorichadwi.21019@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi S1 Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Misalkan G graf sederhana dan terhubung. Untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$, jarak dari titik u ke titik v di G , dinotasikan $d(u, v)$. Pewarnaan persegi pada G adalah fungsi: $w : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{Z}^+$, sedemikian hingga $w(u) \neq w(v)$ untuk setiap dua titik u, v dengan $d(u, v) \leq 2$. Minimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan persegi disebut bilangan kromatik persegi pada G , dinotasikan $\chi_p(G)$, adalah bilangan bulat positif minimum k sedemikian hingga ada pewarnaan- k persegi pada G menggunakan k warna berbeda. Pada penelitian ini dijelaskan terkait nilai eksak bilangan kromatik persegi dari beberapa kelas graf, yaitu graf komplet, graf bipartit, graf bipartit komplet, sikel, pohon, graf ulat, graf roda, dan graf lintasan blok komplet.

Kata Kunci: Pewarnaan persegi, bilangan kromatik persegi.

Abstract

Let G is a simple and connected graph. For two distinct vertices $u, v \in V(G)$, the distance from vertex u to vertex v in G is denoted by $d(u, v)$. A square coloring of G is the function: $w : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{Z}^+$, such that $w(u) \neq w(v)$ for any two distinct vertices u, v with $d(u, v) \leq 2$. The minimum number of colors required by a square coloring is called the square chromatic number of G , denoted by $\chi_p(G)$, is the minimum positive integer k such that admits a square k -coloring of G using k distinct colors. This study explains the exact value of the square chromatic number of several graph classes, namely complete graphs, bipartite graphs, complete bipartite graphs, cycles, trees, caterpillar graphs, wheel graphs, and complete block path graphs.

Keywords: Square coloring, square chromatic number

PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang memiliki peran penting dalam mendukung kemajuan teknologi dan ilmu pengetahuan. Peran matematika sangat membantu dalam menyelesaikan permasalahan di kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang dari matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua abad lalu adalah teori graf. Pada tahun 1736, teori graf pertama kali diperkenalkan melalui tulisan Leonhard Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf kurang signifikan karena sebagian besar teori graf digunakan untuk memecahkan teka-teki. Seiring berjalannya waktu, teori graf mengalami perkembangan yang sangat pesat karena memiliki aplikasi yang sangat luas di berbagai bidang ilmu, seperti ilmu komputer, teknik, sains, bisnis dan ilmu sosial (Budayasa, 2007).

Graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong hingga $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan hingga (boleh kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G , dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi. Pewarnaan graf merupakan topik dalam teori graf yang salah satunya membahas tentang pewarnaan titik. Pewarnaan titik graf dapat diterapkan dalam berbagai aplikasi, seperti penjadwalan kegiatan, pembagian tugas, serta penentuan frekuensi radio (Budayasa, 2007).

Salah satu perluasan dari pewarnaan graf adalah pewarnaan persegi. Misalkan G sebuah graf. Graf persegi dari graf G , dinotasikan G^2 , adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan $V(G)$, di mana setiap dua titik G yang jaraknya paling jauh

dua dihubungkan oleh sebuah sisi (Mahmoodian dan Mousavi, 2011). Sehingga pewarnaan persegi adalah pewarnaan semua titik G , sedemikian hingga setiap dua titik G yang jaraknya paling jauh dua mendapat warna yang berbeda.

Pewarnaan titik graf bertujuan untuk mendapatkan minimum banyaknya warna yang disebut bilangan kromatik. Untuk menentukan nilai bilangan kromatik dari sebuah graf bergantung pada struktur graf. Sehingga pada penelitian ini akan membahas tentang bilangan kromatik persegi dari sebuah graf, dengan mengkaji beberapa kelas graf, yaitu graf komplet, graf bipartit, graf sikel, graf ulat, graf roda, graf pohon, dan graf lintasan blok komplet.

KAJIAN TEORI

Definisi 1

Graf G berisikan dua himpunan, yaitu himpunan tak kosong hingga $V(G)$ dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan hingga (boleh kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasang tak terurut dari titik-titik di $V(G)$. Himpunan $V(G)$ disebut himpunan titik G , dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi. Misalkan u dan v adalah dua titik di G dan $e = \{u, v\}$ (sering ditulis $e = uv$) sisi di G . Titik u dan titik v dikatakan berhubungan langsung (*adjacent*) di G . Sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v di G . Titik u dan titik v merupakan titik-titik akhir dari sisi e . Sisi e terkait (*incident*) dengan titik u dan titik v (Budayasa, 2007).

Definisi 2

Sisi graf yang menghubungkan titik dengan dirinya sendiri disebut gelung (*loop*). Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik u dan titik v pada graf, maka sisi tersebut disebut sisi rangkap. Graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan gelung disebut graf sederhana (Budayasa, 2007).

Definisi 3

Graf komplet (graf lengkap) dengan n titik, dinotasikan K_n , adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi (Budayasa, 2007).

Definisi 4

Graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik G dapat dipartisi menjadi dua himpunan, namakan A

dan B , sedemikian hingga setiap sisi G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B . Graf bipartit dinotasikan dengan $B(A, B)$. Selanjutnya apabila G graf sederhana dan bipartit dengan bipartisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B , maka G disebut graf bipartit komplet, dinotasikan $K_{m,n}$ dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$ (Budayasa, 2007).

Definisi 5

Misalkan G graf. Jalan (*walk*) di G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Dapat dikatakan W adalah jalan dari titik v_0 ke titik v_k atau jalan- (v_0, v_k) . Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Sedangkan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W dan k disebut panjang jalan W . Panjang jalan W adalah banyaknya sisi dalam W . Titik di G , mungkin saja muncul lebih dari satu kali dalam jalan W , begitu juga dengan sisi di G . Jika semua sisi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut jejak (*trail*). Jika semua titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ dalam jalan W berbeda, maka W disebut lintasan (*path*). Jalan W dengan panjang positif disebut tertutup, jika titik awal dan titik akhir dari W identik (sama). Jejak tutup disebut sirkuit. Sikel (*cycle*) adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Banyaknya sisi dalam sikel disebut panjang dari sikel tersebut. Sikel dengan panjang n disebut sikel- n , dinotasikan C_n (Budayasa, 2007).

Definisi 6

Graf H disebut graf bagian dari graf G , ditulis $H \subset G$, jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ (Budayasa, 2007).

Definisi 7

Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Komponen graf G adalah graf bagian terhubung maksimal (titik dan sisi) dari G . Graf H dikatakan graf bagian terhubung maksimal dari graf G , jika tidak ada graf bagian lain dari G yang terhubung dan memuat H . Jadi setiap graf terhubung memiliki tepat satu komponen

sedangkan graf tak terhubung memiliki paling sedikit dua komponen (Budayasa, 2007).

Definisi 8

Misalkan G graf, $u, v \in V(G)$ dan u, v . Jarak dari titik u ke titik v di G , dinotasikan $d_G(u, v)$ atau $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v di G (Budayasa, 2007).

Definisi 9

Misalkan G graf dan v titik G . Derajat titik v , dinotasikan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait di titik v (setiap gelung dihitung dua kali). Selanjutnya derajat minimum G , dinotasikan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$\delta(G) = \min \{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

Sedangkan derajat maksimum graf G , dinotasikan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$\Delta(G) = \max \{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

(Budayasa, 2007).

Definisi 10

Titik yang berderajat satu pada G disebut titik penda. Sisi penda merupakan sisi pada graf G yang terkait pada titik penda (Faizah dan Narwen, 2016).

Definisi 11

Misalkan G graf terhubung dan $v \in V(G)$. Titik v disebut titik pemutus, jika $G - v$ graf tidak terhubung (Budayasa, 2007).

Definisi 12

Misalkan G graf terhubung. Blok adalah graf bagian maksimal G yang tidak memiliki titik pemutus (Budayasa, 2007).

Definisi 13

Pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki siklus (Budayasa, 2007).

Definisi 14

Graf ulat dibentuk dari sebuah lintasan $P_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ dengan menambah sebanyak n_i sisi penda pada setiap titik v_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Graf ulat dinotasikan $U(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Definisi 15

Graf roda, dinotasikan R_n , dibentuk dari satu siklus $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dengan $n \geq 3$ dan sebuah titik x di luar C_n dengan menghubungkan titik x ke setiap titik C_n dengan sebuah sisi. Selanjutnya titik x merupakan titik pusat roda (Rosen, 2012).

Definisi 16

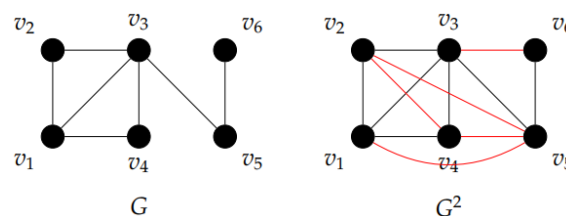
Graf lintasan blok komplet adalah graf terhubung yang memiliki t blok dan $t - 1$ titik pemutus dan setiap blok ke- i merupakan graf komplet K_{n_i} , untuk $1 \leq i \leq t$. Selanjutnya graf lintasan blok komplet dengan t blok dinotasikan dengan $L_tBK(n_1, n_2, \dots, n_t)$.

Definisi 17

Misalkan G graf. Graf persegi dari graf G , dinotasikan G^2 , adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan $V(G)$, di mana setiap dua titik G yang jaraknya paling jauh dua dihubungkan oleh sebuah sisi (Mahmoodian dan Mousavi, 2011).

Contoh:

Gambar 1 menunjukkan graf G^2 merupakan graf persegi dari G .



Gambar 1. Graf G^2 graf persegi G .

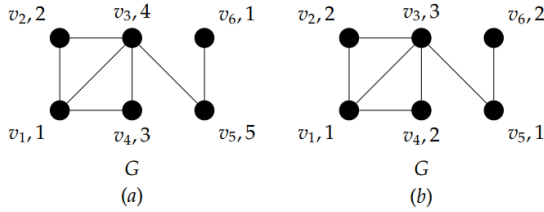
Definisi 18

Misalkan G graf. Sebuah pewarnaan- k sejati pada G adalah pewarnaan semua titik G , sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda. Jika G memiliki sebuah pewarnaan- k sejati maka G dapat diwarnai dengan k warna. Sebuah pewarnaan- k sejati pada G ditunjukkan dengan melabeli titik di G dengan warna $1, 2, 3, \dots, k$. Minimum banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan sejati pada G disebut bilangan kromatik, dinotasikan $\chi(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$\chi(G) = \min \{k \mid \text{ada pewarnaan-}k \text{ sejati pada } G\}$
(Budayasa, 2007)

Contoh:

Gambar 2 menunjukkan pewarnaan sejati G .



Gambar 2. (a) pewarnaan-5 sejati pada G .

(b) pewarnaan-3 sejati pada G .

Jelas bahwa $\chi(G) = 3$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pewarnaan Titik Persegi pada Graf

Misalkan G graf. Sebuah pewarnaan persegi pada G adalah fungsi:

$$w : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{Z}^+$$

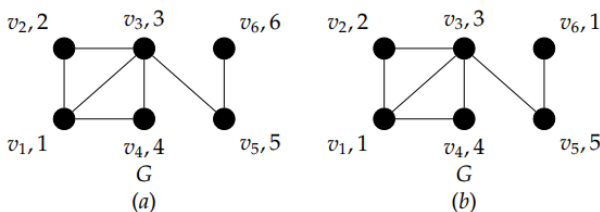
sedemikian hingga $w(u) \neq w(v), \forall u, v \in V(G)$ dengan $d(u, v) \leq 2$. Dengan kata lain, pewarnaan persegi pada G adalah pewarnaan semua titik G , sedemikian hingga setiap dua titik G yang jaraknya paling jauh dua mendapat warna yang berbeda (Kristiana dkk., 2018).

Bilangan kromatik persegi graf G , dinotasikan $\chi p(G)$, didefinisikan sebagai berikut.

$\chi p(G) = \min \{k \mid \text{ada pewarnaan-}k \text{ persegi pada } G\}$ (Budayasa, 2007).

Contoh:

Gambar 3 menunjukkan pewarnaan sejati G .



Gambar 3. (a) pewarnaan-6 persegi pada G .

(b) pewarnaan-5 persegi pada G .

Jelas bahwa $\chi p(G) = 5$

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $v \in V(G)$. Persekutaran titik v pada G , dinotasikan $NG(v)$ atau $N(v)$, didefinisikan sebagai berikut.

$$N(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\}$$

dan

$$N[v] = \{v\} \cup N(v)$$

Karena G graf sederhana, maka

$$d(v) = |N(v)|$$

Batas bawah $\chi p(G)$ diberikan berikut ini.

Lemma 3.1.

Untuk setiap graf G berlaku

$$\chi p(G) \geq \Delta(G) + 1$$

Bukti:

Misalkan G graf dan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta(G)$.

Karena

$$N[v] = \{v\} \cup N(v) \text{ dan } \{v\} \cap N(v) = \emptyset$$

maka

$$\begin{aligned} |N[v]| &= |\{v\}| + |N(v)| \\ &= 1 + d(v) \\ &= 1 + \Delta(G) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, $\forall x, y \in N[v]$ dengan $d_G(x, y) \leq 2$. Ini berarti dalam sebuah pewarnaan titik persegi pada G , semua titik pada $N[v]$ diberi warna berbeda. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi p(G) \geq |N[v]| = 1 + \Delta(G)$$

Dengan demikian bukti lemma lengkap. ■

Dari Definisi 2.19 dan Definisi 3.1, diperoleh pernyataan berikut.

Lemma 3.2.

Untuk setiap graf G berlaku

$$\chi(G) \leq \chi p(G) \quad \blacksquare$$

Misalkan K_n graf lengkap dengan n titik. Karena $\forall u, v \in V(K_n)$ dan u, v dengan $d(u, v) = 1$, maka berdasarkan Definisi 2.19 dan Definisi 3.1, diperoleh hasil berikut.

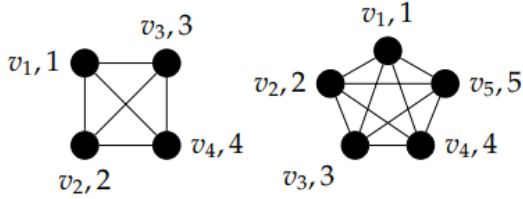
Lemma 3.3.

Untuk graf lengkap K_n berlaku

$$\chi(K_n) = \chi p(K_n) = n \quad \blacksquare$$

Contoh:

Gambar 4 menunjukkan menunjukkan pewarnaan-4 persegi pada K_4 dan pewarnaan-5 persegi pada K_5 .



Gambar 4. Pewarnaan titik persegi graf komplet K4 dan K5.

Lemma 3.4.

Untuk graf bipartit komplet $K_{m,n}$ berlaku

$$\chi(K_{m,n}) = 2 \text{ dan } \chi_p(K_{m,n}) = m + n$$

Bukti:

Misal G graf bipartit komplet dengan bipartit (A, B) , $|A| = m$ dan $|B| = n$.

Pikirkan sebuah pewarnaan titik sejati pada G . Jika $x \in A$ dan $y \in B$, maka $xy \in E(G)$. Sehingga warna titik x dan titik y harus berbeda. Berdasarkan Definisi 2.19,

$$\chi(G) \geq 2 \quad (1)$$

Karena untuk setiap dua titik di A tidak terhubung langsung, maka boleh diwarnai dengan warna yang sama, namakan warna "1". Begitu juga, setiap titik di partisi B dapat diwarnai dengan warna yang sama, namakan warna "2". Jadi ada pewarnaan titik sejati pada G dengan dua warna. Sehingga berdasarkan Definisi 2.19,

$$\chi(G) \leq 2 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\chi(G) = \chi(K_{m,n}) = 2$$

Selanjutnya, pikirkan sebuah pewarnaan titik persegi pada G dengan mewarnai semua titik G dengan warna yang berbeda. Karena $|V(G)| = |V(K_{m,n})| = m + n$, maka berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_p(G) \leq m + n \quad (3)$$

Andaikan

$$\chi_p(G) < m + n$$

Karena $\chi_p(G)$ bilangan bulat positif, berlaku

$$\chi_p(G) \leq m + n - 1$$

Akibatnya, ada pewarnaan titik persegi pada G dengan menggunakan $m + n - 1$ warna. Ini berarti ada

dua titik G , namakan x dan y , dengan $w(x) = w(y)$, padahal $d(x, y) \leq 2$. Kontradiksi, sehingga

$$\chi_p(G) \geq m + n \quad (4)$$

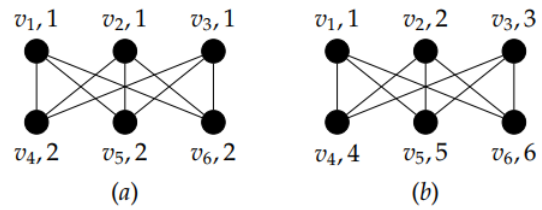
Dari (3) dan (4) disimpulkan

$$\chi_p(G) = \chi_p(K_{m,n}) = m + n$$

Dengan demikian bukti lemma lengkap. ■

Contoh:

Gambar 5 (a) menunjukkan pewarnaan-2 sejati pada $K_{3,3}$. Sedangkan Gambar 5 (b) menunjukkan pewarnaan-6 persegi pada $K_{3,3}$.



Gambar 5. Pewarnaan titik graf bipartit komplet $K_{3,3}$.

Untuk pewarnaan titik pesergi pada siklus diperoleh sebagai berikut.

Lemma 3.5.

Untuk siklus C_n berlaku

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } n \neq 5 \\ 5, & n = 5 \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$. Karena $\forall d(v) = 2$, $v \in V(C_n)$, maka $\Delta(C_n) = 2$. Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\chi_p(C_n) \geq 2 + 1 = 3 \quad (1)$$

Kasus 1. $n \equiv 0 \pmod{3}$

Definisikan pewarnaan titik

$$w_1 : V(C_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

sedemikian hingga, $\forall v \in V(C_n)$ berlaku

$$w_1(v) = \begin{cases} 1, & v = v_i, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, & v = v_i, i \equiv 2 \pmod{3} \\ 3, & v = v_i, i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

Jelas bahwa, $\forall x, y \in V(C_n)$ dengan $d(x, y) \leq 2$, diperoleh $w_1(x), w_1(y)$. Sehingga w_1 sebuah pewarnaan titik persegi pada C_n dengan 3 warna.

Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi p(Cn) \leq 3 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\chi p(Cn) = 3$$

Jadi lemma terbukti untuk kasus $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Kasus 2. $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ dan $n \neq 5$

Subkasus 2.1. $n \equiv 1 \pmod{3}$

Dalam hal ini, $n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

Didefinisikan pewarnaan titik

$$w_2 : V(Cn) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

sedemikian hingga

$$w_2(v) = \begin{cases} w_1(v), & v = v_i, 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & v = v_i, i = n \end{cases}$$

Jelas bahwa, $\forall x, y \in V(Cn)$ dengan $d(x, y) \leq 2$, diperoleh $w_2(x) \neq w_2(y)$. Sehingga w_2 sebuah pewarnaan titik persegi pada Cn dengan 4 warna.

Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi p(Cn) \leq 4 \quad (3)$$

Dari (1) dan (3) diperoleh

$$3 \leq \chi p(Cn) \leq 4 \quad (4)$$

Andaikan $\chi p(Cn) = 3$. Ini berarti, ada pewarnaan titik persegi pada Cn dengan menggunakan 3 warna. Misalkan pewarnaan titik persegi w_3 pada Cn dengan

$$w_3(v) = \begin{cases} w_1(v), & v = v_i, 1 \leq i \leq n-1 \\ k, & v = v_i, i = n \end{cases}$$

dengan $k \in \{1, 2, 3\}$.

Jika $k = 1$, $w_3(vn) = 1 = w_3(v1)$, padahal $d(vn, v1) = 1$. Kontradiksi, w_3 sebuah pewarnaan titik persegi pada Cn .

Jika $k = 2$, maka $w_3(vn) = 2 = w_3(v2)$ dengan $d(vn, v2) = 2$. Kontradiksi.

Jika $k = 3$, $w_3(vn) = 3 = w_3(vn-1)$ dengan $d(vn, vn-1) = 1$. Kontradiksi.

Sehingga

$$\chi p(Cn) \neq 3 \quad (5)$$

Dari (4) dan (5) disimpulkan

$$\chi p(Cn) = 4$$

Subkasus 2.2. $n \equiv 2 \pmod{3}$ dan $n \neq 5$

Dalam hal ini, $n - 2 \equiv 0 \pmod{3}$

Konstruksi pewarnaan titik

$$w_4 : V(Cn) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

sedemikian hingga

$$w_4(v_i) = \begin{cases} 1, & i \in \{1, 5\} \cup \{3k \mid 3 \leq k \leq \frac{n-2}{3}\} \\ 2, & i \in \{2, 6\} \cup \{3k+1 \mid 3 \leq k \leq \frac{n-2}{3}\} \\ 3, & i \in \{3, 7\} \cup \{3k+2 \mid 3 \leq k \leq \frac{n-2}{3}\} \\ 4, & i \in \{4, 8\} \end{cases}$$

Jelas bahwa, $\forall x, y \in V(Cn)$ dengan $d(x, y) \leq 2$, diperoleh $w_4(x) \neq w_4(y)$. Sehingga w_4 sebuah pewarnaan titik persegi pada Cn dengan 4 warna, yaitu warna-warna "1", "2", "3", dan "4".

Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi p(Cn) \leq 4 \quad (6)$$

Dari (1) dan (6) diperoleh

$$3 \leq \chi p(Cn) \leq 4 \quad (7)$$

Andaikan $\chi p(Cn) = 3$ seperti argumen sebelumnya akan terjadi kontradiksi. Jadi,

$$\chi p(Cn) \neq 3 \quad (8)$$

Dari (7) dan (8) disimpulkan

$$\chi p(Cn) = 4$$

Kasus 3. $n = 5$

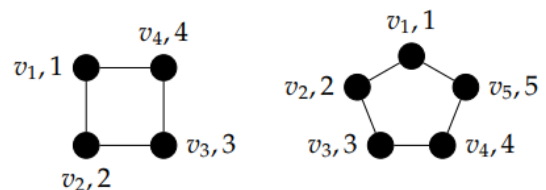
Misal siklus $C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$. Karena $\forall x, y \in V(C_5)$ dengan $d(x, y) \leq 2$, maka semua titik C_5 diberi warna berbeda. Akibatnya

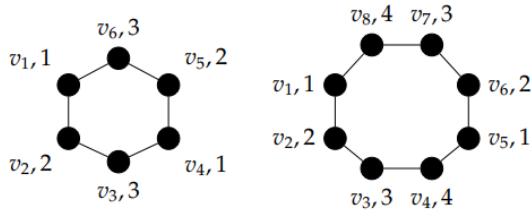
$$\chi p(Cn) = 5$$

Dengan demikian bukti lemma lengkap. ■

Contoh:

Gambar 6 menunjukkan pewarnaan-4 persegi pada C_4 , pewarnaan-5 persegi pada C_5 , pewarnaan-3 persegi pada C_6 , dan pewarnaan-4 persegi pada C_8 .





Gambar 6. Pewarnaan titik persegi sikel C_4 , C_5 , C_6 , dan C_8 .

Untuk pewarnaan titik persegi pada pohon diperoleh sebagai berikut.

Teorema 3.6.

Untuk pohon T berlaku

$$\chi_p(T) = \Delta(T) + 1$$

Bukti:

Misalkan T pohon, derajat maksimum $\Delta(T) = k$. Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\chi_p(T) \geq k + 1 \quad (1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan sebuah pewarnaan titik persegi dengan menggunakan $k+1$ warna dengan cara seperti berikut.

Misalkan $v \in V(T)$ dengan $d(v) = k$. Pertama-tama warnai semua titik di $N[v]$ dengan menggunakan $k+1$ warna berbeda. Selanjutnya misalkan $u \in N[v]$ sedemikian hingga $uv \in E(T)$. Kita akan mewarnai semua titik di $N[u]$ dengan menggunakan warna-warna di $N[v]$ tanpa harus menambahkan warna baru. Hal ini dapat dilakukan karena

$$N[u] \cap N[v] = \{u, v\}$$

sehingga

$$\begin{aligned} |N[v] - \{u, v\}| &= k + 1 - 2 \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |N[u] - \{u, v\}| &\leq |N[v] - \{v_1, v_2\}| \\ &\leq k - 1 \end{aligned}$$

Semua titik di $N[u] - \{u, v\}$ diwarnai menggunakan paling banyak $k-1$ warna yang ada di $N[v] - \{u, v\}$. Sehingga perluasan pewarnaan titik menggunakan sebanyak $k+1$ warna.

Proses ini dilanjutkan sampai semua titik T terwarnai hanya menggunakan $k+1$ warna yang berbeda, sehingga ada pewarnaan titik persegi pada

T dengan menggunakan $k+1$ warna. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_p(T) \leq k + 1 \quad (2)$$

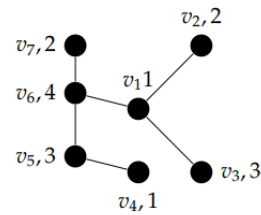
Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\begin{aligned} \chi_p(T) &= k + 1 \\ &= \Delta(T) + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Contoh:

Pohon T dengan $\Delta(T) = 3$, diperoleh pewarnaan-4 persegi ditunjukkan pada Gambar 7.



Gambar 7. Pewarnaan titik persegi pohon.

Pembahasan tentang pewarnaan titik persegi pada pohon dapat diperluas, salah satunya pada graf ulat.

Misalkan $G = U(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Perhatikan bahwa

$$|V(G)| = k + \sum_{i=1}^k n_i$$

dan

$$|E(G)| = k - 1 + \sum_{i=1}^k n_i$$

Begitu juga

$$d(v_i) = \begin{cases} n_i + 1, & i = 1 \text{ atau } i = k \\ n_i + 2, & 2 \leq i \leq k-1 \end{cases}$$

sehingga

$$\Delta(G) = \max \{n_1 + 1, n_k + 1, x\}$$

dengan

$$x = \max \{n_i + 2 \mid 2 \leq i \leq k-1\}$$

Untuk pewarnaan titik persegi pada graf ulat diperoleh sebagai berikut.

Akibat 3.7.

Untuk graf ulat $G = U(n_1, n_2, \dots, n_k)$ berlaku

$$\chi_p(G) = \Delta(G) + 1$$

Bukti:

Misalkan $G = U(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dan $v_i \in V(G)$ dengan $d(v_i) = \Delta(G)$. Maka

$$\Delta(G) = \begin{cases} n_i+1, & i = 1 \text{ atau } i = k \\ n_i+2, & 2 \leq i \leq k-1 \end{cases}$$

Kasus 1: $i = 1$ atau $i = k$

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $i = 1$. Dalam hal ini

$$\Delta(G) = n_1 + 1 = d(v_1)$$

sehingga, $\forall v \in V(G) - \{v_1\}$

$$d(v) \leq n_1 + 1$$

Misalkan himpunan titik pendan G yang terkait dengan titik v_i adalah $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ini}\}$, maka

$$N[v_1] = \{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n_1}\} \cup \{v_1, v_2\}$$

sehingga

$$|N[v_1]| = n_1 + 2$$

Karena $\forall x, y \in N[v_1]$ dengan $d(x, y) \leq 2$, maka semua titik G di $N[v_1]$ harus berwarna berbeda. Selanjutnya akan dikonstruksi sebuah pewarnaan titik persegi pada G menggunakan $n_1 + 2$ warna.

Pertama-tama warnai semua titik di himpunan $N[v_1]$ dengan $n_1 + 2$ warna berbeda. Selanjutnya kita akan mewarnai semua titik di $N[v_2]$ dengan menggunakan warna-warna di $N[v_1]$ tanpa harus menambahkan warna baru. Hal ini dapat dilakukan karena

$$N[v_1] \cap N[v_2] = \{v_1, v_2\}$$

sehingga

$$\begin{aligned} |N[v_1] - \{v_1, v_2\}| &= n_1 + 2 - 2 \\ &= n_1 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |N[v_2] - \{v_1, v_2\}| &\leq |N[v_1] - \{v_1, v_2\}| \\ &\leq n_1 \end{aligned}$$

Karena $\forall x \in N[v_1] - \{v_1, v_2\}$ dan $y \in N[v_2] - \{v_1, v_2\}$ dengan $d(x, y) \geq 3$, maka x dan y dapat diwarnai dengan warna yang sama. Kita dapat mewarnai $N[v_2] - \{v_1, v_2\}$ dengan menggunakan n_1 warna yang ada di $N[v_1] - \{v_1, v_2\}$. Sehingga kita telah mewarnai semua titik di $N[v_1] \cup N[v_2]$ menggunakan $n_1 + 2$ warna.

Proses ini dilanjutkan sampai kita mewarnai titik G hanya dengan menggunakan $n_1 + 2$ warna dan

pewarnaan yang diperoleh adalah pewarnaan titik persegi. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_p(G) \leq n_1 + 2 \quad (1)$$

Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

$$\chi_p(G) \geq n_1 + 2 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\begin{aligned} \chi_p(G) &= n_1 + 2 \\ &= n_1 + 1 + 1 \\ &= \Delta(G) + 1 \end{aligned}$$

Kasus 2: $2 \leq i \leq k - 1$

Misal $i = t$, $2 \leq t \leq k - 1$. Dalam hal ini

$$\Delta(G) = n_t + 2$$

sehingga, $\forall v \in V(G) - \{v_t\}$,

$$d(v) \leq n_t + 2$$

Perhatikan bahwa

$$N[v_t] = \{v_{t1}, v_{t2}, \dots, v_{tnt}\} \cup \{v_t, v_{t-1}, v_{t+1}\}$$

sehingga

$$|N[v_t]| = n_t + 3$$

Karena $\forall x, y \in N[v_t]$ dengan $d(x, y) \leq 2$, maka dalam pewarnaan titik persegi pada G semua titik di $N[v_t]$ harus berwarna berbeda. Ini berarti ada sebanyak $n_t + 3$ warna yang digunakan untuk mewarnai $N[v_t]$ dengan argumen yang sama pada kasus 1. Kita bisa mengontruksi pewarnaan titik persegi dengan menggunakan $n_t + 3$ warna. Berdasarkan Definisi 3.1,

$$\chi_p(G) \leq n_t + 3 \quad (3)$$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\chi_p(G) \geq n_t + 3 \quad (4)$$

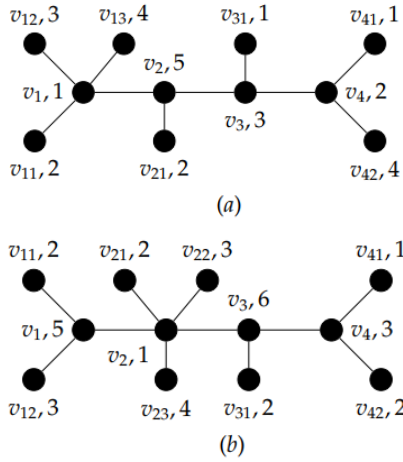
Dari (3) dan (4) disimpulkan

$$\begin{aligned} \chi_p(G) &= n_t + 3 \\ &= n_t + 2 + 1 \\ &= \Delta(G) + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian bukti teorema lengkap. ■

Contoh:

Gambar 8 (a) menunjukkan pewarnaan-5 persegi pada $U(3,1,1,2)$. Sedangkan Gambar 8 (b) menunjukkan pewarnaan-6 persegi pada $U(2,3,1,2)$.



Gambar 8. Pewarnaan titik persegi graf ulat.

Misalkan R_n graf roda. Perhatikan bahwa

$$|V(R_n)| = n + 1$$

dan

$$|E(R_n)| = 2n$$

Untuk pewarnaan titik persegi graf roda diperoleh hasil berikut.

Teorema 3.8.

Untuk graf roda R_n berlaku

$$\chi_p(R_n) = n + 1$$

Bukti:

Misal $u, v \in V(R_n)$. Ada dua kemungkinan yaitu $u, v \in V(C_n)$ atau $u \in V(C_n)$ dan $v = x$.

Kemungkinan 1: $u, v \in V(C_n)$

Jika $uv \in E(C_n)$, maka $d(u, v) = 1$

Jika $uv \notin E(C_n)$, maka $d(u, v) = 2$

Kemungkinan 2: $u \in V(C_n)$ dan $v = x$

Karena $uv \in E(R_n)$, maka $d(u, v) = 1$

Dari kemungkinan 1 dan 2 disimpulkan, $\forall u, v \in V(R_n)$ dan u, v dengan $d(u, v) \leq 2$, maka semua titik R_n diberi warna berbeda. Akibatnya

$$\begin{aligned} \chi_p(R_n) &= |V(R_n)| \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian bukti teorema lengkap. ■

Untuk pewarnaan titik persegi graf lintasan blok komplet diperoleh hasil berikut.

Teorema 3.9.

Untuk graf lintasan blok komplet $G = LtBK(n_1, n_2, \dots, nt)$ berlaku

$$\chi_p(G) = \Delta(G) + 1$$

Bukti:

Misalkan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta(G)$. Jelas bahwa, v sebuah titik pemutus di G . Misalkan v_i merupakan titik pemutus antara blok B_i dan blok B_{i+1} , $\forall i, 1 \leq i \leq t - 1$. Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan $v = v_i, 1 \leq i \leq t - 1$. Sehingga

$$d(v_i) = (n_i - 1) + (n_{i+1} - 1) = \Delta(G)$$

Dalam hal ini

$$V_i = NB_i(v_i) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_i-1}\}$$

$$V_{i+1} = NB_{i+1}(v_i) = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_{i+1}-1}\}$$

Karena $\forall u, v \in V_i \cup V_{i+1} \cup \{v_i\}$, $d(u, v) \leq 2$. Sehingga dalam pewarnaan titik persegi semua titik di $V_i \cup V_{i+1} \cup \{v_i\}$ diberi warna berbeda.

Misalkan k sebuah pewarnaan titik persegi pada G , maka

$$\begin{aligned} |k| &= |V_i \cup V_{i+1} \cup \{v_i\}| = |V_i| + |V_{i+1}| + |\{v_i\}| \\ &= (n_i - 1) + (n_{i+1} - 1) + 1 \\ &= d(v_i) + 1 \\ &= \Delta(G) + 1 \end{aligned}$$

Perhatikan blok B_{i-1} . Karena v_i titik di G dengan derajat maksimum, maka $n_{i-1} - 1 \leq n_{i+1} - 1$

Sehingga semua titik di $B_{i-1} - \{v_{i-1}\}$ bisa diwarnai sama dengan warnawarna di $B_{i+1} - \{v_i\}$. Ini berarti pewarnaan titik diperluas ke B_{i-1} dengan tanpa menambahkan warna baru. Ini berarti ada pewarnaan titik persegi pada $B_{i-1} \cup B_i \cup B_{i+1}$ dengan k warna.

Dengan argumen yang sama, pewarnaan titik persegi dengan k warna dapat diperluas

$$G = \bigcup_{i=1}^t B_i$$

sehingga berdasarkan Definisi 3.1,

$$\begin{aligned} \chi_p &\leq k \\ \chi_p &\leq \Delta(G) + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\chi_p(G) \geq \Delta(G) + 1 \quad (2)$$

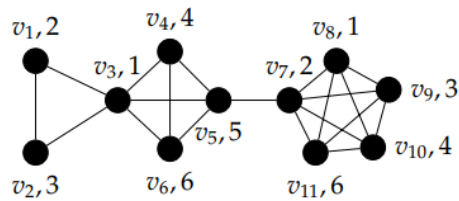
Dari (1) dan (2) disimpulkan

$$\chi_p(G) = \Delta(G) + 1$$

Dengan demikian bukti lengkap.

Contoh:

Graf lintasan blok komplet $G = L4BK(3, 4, 2, 5)$ dengan $\Delta(G) = 5$, diperoleh pewarnaan-6 persegi ditunjukkan pada Gambar 9.



Gambar 8. Pewarnaan titik persegi graf lintasan blok komplet $L4BK(3, 4, 2, 5)$.

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik persegi beberapa kelas graf yaitu sebagai berikut:

1. Untuk graf komplet K_n berlaku

$$\chi_p(K_n) = \chi_p(K_n) = n$$
2. Untuk graf bipartit komplet $K_{m,n}$ berlaku

$$\chi_p(K_{m,n}) = m + n$$
3. Untuk sikel C_n berlaku

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } n \neq 5 \\ 5, & n = 5 \end{cases}$$
4. Untuk pohon T berlaku

$$\chi_p(T) = \Delta(T) + 1$$
5. Untuk graf ulat $G = U(n_1, n_2, \dots, n_k)$ berlaku

$$\chi_p(G) = \Delta(G) + 1$$
6. Untuk graf roda R_n berlaku

$$\chi_p(R_n) = n + 1$$
7. Untuk graf lintasan blok komplet $G = L4BK(n_1, n_2, \dots, n_k)$ berlaku

$$\chi_p(G) = \Delta(G) + 1$$

SARAN

Pada penelitian ini hanya dibahas bilangan kromatik persegi pada beberapa kelas graf, yaitu graf komplet, graf bipartit, graf bipartit komplet, sikel, pohon, graf ulat, graf roda, dan graf lintasan blok komplet, dengan pendekatan menggunakan pembuktian langsung. Sebagai saran untuk

penelitian selanjutnya, topik ini dapat dikembangkan dengan mengkaji kelas graf lainnya, seperti graf hasil operasi. Serta dapat menggunakan pendekatan lain, seperti algoritma pewarnaan dengan berbagai metode, untuk memperoleh nilai eksak bilangan kromatik persegi pada graf yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Alon, N., dan Mohar, B., 1993. The chromatic number of graph powers. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11(1), 1-10.
- Budayasa, I. K., 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Effantin, B., dan Kheddou, H., 2003. The b-chromatic number of power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6(1), 45-54.
- Faizah, dan Narwen, 2016. Karakterisasi graf pohon dengan bilangan kromatik lokasi 3. *Jurnal Matematika UNAND*, 5(12), 71-77.
- Kristiana, A. I., Imam, U. M., Dafik, D., dan Alfarisi, R., 2018. 2-distance chromatic number of some wheel related graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 103(3), 645-657.
- Mahmoodian, E. S., dan Mousavi, F. S., 2011. Coloring the square of products of cycles and paths. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 76, 101-119.
- Mojdeh, D. A., dan Samadi, B., 2023. Further results on 2-distance coloring of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 45(7).
- Niranjan, P. K., dan Kola, S. R., 2019. The k-distance chromatic number of trees and cycles. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 16, 230-235.
- Okamoto, F., dan Zhang, P., 2010. A note on 2-distance chromatic numbers of graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 7(1), 5-9.
- Rosen, K. H., 2012. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGrawHill.
- Saraswathi, S., dan Poobalaranjani, M., 2020. Exact 2-distance bcoloring of some classes of graphs. *Malaya Journal of Matematik*, 8(1), 195-200.