

## PEMODELAN SISTEM AUTOPARAMETRIK DUA DERAJAT KEBEBASAN YANG TEREKSITASI EKSTERNAL

**Tiara Mey Putri**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : [tiara.22093@mhs.unesa.ac.id](mailto:tiara.22093@mhs.unesa.ac.id)

**Abadi**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia

e-mail : [abadi@unesa.ac.id](mailto:abadi@unesa.ac.id)\*

### Abstrak

Getaran yang terjadi pada bangunan tinggi dapat dimodelkan dalam sistem pegas-massa dengan peredam linier yang berfungsi melepas energi atau meredam getaran. Meskipun peredam linier dapat digunakan untuk meredam getaran sistem, peredam ini memiliki keterbatasan saat sistem bekerja di dekat kondisi resonansi. Oleh karena itu, dapat digunakan sistem autoparametrik sebagai alternatif dalam meredam getaran. Salah satu model autoparametrik diperkenalkan oleh Tondl dan Nabergoj (1990), yaitu sistem autoparametrik dua derajat kebebasan yang tereksitasi eksternal yang dapat dijadikan sebagai model idealisasi dari bangunan yang bergetar dalam penelitian ini. Penelitian ini bertujuan untuk menurunkan model dari sistem tersebut melalui mekanika Lagrange. Selanjutnya, sebagai ilustrasi perilaku sistem, digunakan metode *multiple scales* untuk memperoleh solusi semitrivial dengan mempertimbangkan kondisi resonansi primer dan kondisi resonansi internal 1:2. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan menggunakan mekanika Lagrange model matematika sistem autoparametrik dua derajat kebebasan tereksitasi eksternal berhasil diturunkan. Selain itu, solusi semitrivial yang diperoleh menunjukkan bahwa saat sistem sekunder diam, sistem utama berosilasi dengan amplitudo yang dipengaruhi oleh amplitudo eksitasi eksternal ( $\bar{\alpha}$ ), parameter redaman ( $\bar{\kappa}$ ), serta parameter detuning ( $\sigma$ ) yang menyatakan besarnya penyimpangan dari kondisi resonansi tepat. Dengan mengambil parameter  $\epsilon = 0,1$ ,  $\bar{\alpha} = 0,08$ ,  $\bar{\kappa} = 0,1$ ,  $\sigma_1 = 0,8$ , dan  $\sigma_2 = 0,5$ , grafik visualisasi menunjukkan bahwa sistem utama berosilasi secara periodik dengan amplitudo sebesar 0,00998.

**Kata Kunci:** getaran, sistem autoparametrik, mekanika Lagrange, metode *multiple scales*, solusi semitrivial.

### Abstract

Vibrations occurring in high-rise buildings can be modeled as a mass-spring system with a linear damper that dissipates energy or dampens vibrations. Although linear dampers can be used to dampen system vibrations, they have limitations when the system operates near resonance conditions. Therefore, an autoparametric system can be used as an alternative for vibration damping. One such autoparametric model was introduced by Tondl and Nabergoj (1990): an externally excited two-degree-of-freedom system that can serve as an idealized model of the vibrating building in this study. This study aims to derive a model of this system using Lagrangian mechanics. Furthermore, to illustrate the system's behavior, the multiple-scale method was used to obtain a semitrivial solution that accounts for both the primary and the 1:2 internal resonances. The results show that by using Lagrangian mechanics, the mathematical model of the externally excited two-degree-of-freedom autoparametric system was successfully derived. Furthermore, the obtained semitrivial solution shows that when the secondary system is at rest, the primary system oscillates with an amplitude that depends on the external excitation amplitude ( $\bar{\alpha}$ ), the damping parameter ( $\bar{\kappa}$ ), and the detuning parameter ( $\sigma$ ) which represents the amount of deviation from the exact resonance condition. By setting  $\epsilon = 0.1$ ,  $\bar{\alpha} = 0.08$ ,  $\bar{\kappa} = 0.1$ ,  $\sigma_1 = 0.8$ , and  $\sigma_2 = 0.5$ , the visualization shows that the main system oscillates periodically with an amplitude of 0.00998.

**Keywords:** vibrations, autoparametric system, Lagrangian mechanics, multiple scales method, semitrivial solution.

## PENDAHULUAN

Seiring bertambahnya jumlah penduduk, maka kebutuhan akan lahan untuk tempat tinggal dan fasilitas publik juga meningkat, sehingga bangunan bertingkat dapat menjadi solusi untuk mengatasi lahan yang semakin terbatas. Meskipun begitu, semakin tinggi suatu bangunan, semakin rentan bangunan tersebut terhadap getaran. Getaran ini dapat berasal dari eksitasi eksternal seperti angin, gempa bumi, maupun aktivitas mesin dari dalam bangunan (Rimaza & Wiyono, 2014). Menurut Rao (2018), pada kondisi tertentu, getaran yang berlebihan dapat menimbulkan ketidaknyamanan bahkan kerusakan struktural yang berbahaya apabila terjadi resonansi (ketika frekuensi eksitasi bertepatan dengan frekuensi alami struktur).

Di bidang mekanika, getaran yang terjadi pada bangunan tinggi dapat dimodelkan dalam sistem pegas-massa yang terdiri dari massa yang berperan sebagai inersia dari struktur bangunan, pegas mewakili elastisitas material dan kekakuan struktural pada bangunan, serta peredam linier yang berfungsi melepaskan energi sehingga dapat menurunkan respons dari struktur (Diyanita, 2017). Meskipun peredam linier dapat digunakan untuk membantu meredam getaran, namun jenis peredam ini memiliki keterbatasan terutama saat sistem bekerja di dekat kondisi resonansi. Salah satu solusi untuk mengatasi keterbatasan tersebut adalah penggunaan perangkat mekanik dengan karakteristik nonlinier untuk meningkatkan kemampuan meredam getaran, misalnya sistem autoparametrik (Silva-Navarro G. & Abundis-Fong, 2017).

Sistem autoparametrik merupakan sistem yang terdiri dari setidaknya dua subsistem yaitu sistem utama yang mengalami getaran akibat eksitasi eksternal, eksitasi sendiri, eksitasi parametrik, atau kombinasinya, dan sistem sekunder yang terangkai secara nonlinier pada sistem utama sehingga sistem sekunder diam (solusi semitrivial). Dalam kondisi tertentu, yaitu ketika sistem bekerja di dekat resonansi internal, energi dari sumber eksternal dapat berpindah ke sistem sekunder (Haxton & Barr, 1972; Nayfeh & Mook, 1979, dalam Silva-Navarro & Abundis-Fong, 2017). Kondisi ini disebut resonansi autoparametrik, yaitu ketika getaran dari sistem utama menjadi sumber eksitasi parametrik bagi

sistem sekunder, sehingga sistem sekunder ikut bergetar (Tondl dkk., 2000).

Salah satu contoh penerapan sistem autoparametrik diperkenalkan oleh Tondl dan Nabergoj (1990) dalam penelitiannya, yaitu sistem autoparametrik dua derajat kebebasan yang tereksitasi eksternal dan terdiri dari sistem pegas-massa sebagai sistem utama yang terangkai dengan pendulum sebagai sistem sekunder dengan eksitasi eksternal periodik. Meskipun model tersebut diperkenalkan dalam konteks kapal, bentuk persamaannya bersifat umum, sehingga dapat digunakan untuk sistem mekanik lain, misalnya sebagai model idealisasi dari bangunan tinggi yang bergetar.

Pada penelitian yang telah dilakukan oleh Tondl dan Nabergoj (1990), analisis difokuskan pada penentuan daerah kestabilan solusi saat sistem sekunder diam (solusi semitrivial), namun tidak membahas secara rinci proses terbentuknya sistem dan bagaimana solusi semitrivial diperoleh. Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk menurunkan model dari sistem autoparametrik dua derajat kebebasan yang tereksitasi eksternal menggunakan mekanika Lagrange. Selanjutnya, sebagai ilustrasi perilaku sistem, digunakan metode *multiple scales*, untuk memperoleh solusi semitrivial dengan mempertimbangkan kondisi resonansi primer dan kondisi resonansi internal 1:2.

## KAJIAN TEORI

### GETARAN

Getaran atau osilasi merupakan setiap gerakan yang berulang setelah suatu interval waktu tertentu. Getaran dapat diklasifikasikan menjadi getaran bebas (*free vibration*) yang terjadi ketika sebuah sistem bergetar sendiri tanpa adanya gaya eksternal yang bekerja untuk sistem dan getaran paksa (*forced vibration*) yang terjadi ketika suatu sistem dikenai gaya eksternal yang bekerja secara terus menerus dan umumnya bersifat periodik (Rao, 2018).

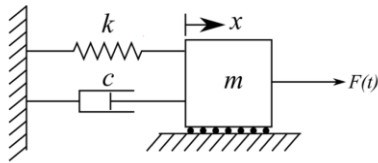
Selain getaran bebas dan getaran paksa, terdapat getaran parametrik dan getaran sendiri (*self excited*). Getaran parametrik merupakan getaran yang terjadi ketika parameter sistem, seperti konstanta pegas berubah secara periodik dan sistem berosilasi meskipun tidak ada gaya eksternal periodik. Sementara itu, getaran tereksitasi sendiri

adalah jenis getaran di mana energi yang digunakan untuk mempertahankan osilasi berasal dari mekanisme yang ada di dalam sistem (Nayfeh dan Mook, 1995).

### SISTEM PEGAS-MASSA-PEREDAM

Sistem getaran memiliki beberapa elemen penyusun yang terdiri dari pegas atau elastisitas, massa atau inersia, dan peredam (Rao, 2018). Dalam kondisi nyata, sistem ini umumnya menerima gaya eksternal misalnya gaya harmonik  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ . Berikut diberikan contoh persamaan gerak satu derajat kebebasan yang merepresentasikan sistem tersebut, yaitu

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = F(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$



Gambar 1. Model Pegas-Massa-Peredam dengan Gaya Eksternal (Downey & Micheli, 2024)

Pada persamaan (1)  $m$  mewakili massa,  $k$  konstanta kekakuan pegas, dan  $c$  koefisien redaman. Selain itu,  $x(t)$  menyatakan simpangan massa terhadap posisi setimbang. Dengan demikian, dalam sistem tersebut  $m\ddot{x}$  merepresentasikan gaya inersia,  $c\dot{x}$  gaya redaman, dan  $kx$  gaya pemulih akibat pegas (Downey & Micheli, 2024).

### MEKANIKA LAGRANGE

Mekanika Lagrange merupakan metode yang menurunkan persamaan gerak berdasarkan energi yang dimiliki sistem, yaitu energi kinetik dan energi potensial, sehingga cocok digunakan pada sistem yang memiliki lebih dari satu derajat kebebasan. Secara umum fungsi Lagrangian dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L = T - V, \quad (2)$$

dengan  $T$  merupakan total energi kinetik dan  $V$  merupakan total energi potensial sistem. Secara umum energi kinetik dapat dinyatakan sebagai

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3)$$

dengan  $m$  adalah massa sistem dan  $v$  adalah kecepatan. Sementara itu, energi potensial secara umum dinyatakan sebagai

$$V = mgh, \quad (4)$$

dengan  $g$  adalah percepatan gravitasi dan  $h$  adalah tinggi benda. Untuk energi potensial pada pegas dinyatakan sebagai

$$v = \frac{1}{2}kx^2, \quad (5)$$

dengan  $k$  adalah konstanta pegas dan  $x$  menyatakan simpangan pegas terhadap posisi setimbangnya. Selanjutnya, untuk memperoleh persamaan gerak dapat digunakan persamaan Lagrange untuk setiap koordinat umum  $q_\alpha$  dengan rumus sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) = \Phi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Pada persamaan tersebut,  $q_\alpha$  menyatakan koordinat umum sistem,  $\dot{q}_\alpha$  menyatakan turunan dari koordinat umum terhadap waktu, dan  $\Phi_\alpha$  merupakan gaya umum nonkonservatif yang bekerja pada sistem, seperti gesekan (gaya redaman) dan sebagainya. Jika sistem hanya dipengaruhi oleh gaya konservatif, maka  $\Phi_\alpha = 0$  (Spiegel, 1967; Giancoli, 2014).

### SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan yang merupakan laju perubahan suatu besaran (Boyce dkk., 2017). Persamaan diferensial disebut persamaan diferensial biasa apabila fungsi tak diketahui hanya bergantung pada satu variabel bebas (Maya, 2014). Jika terdapat dua atau lebih persamaan diferensial yang saling berhubungan dalam satu sistem, maka disebut sebagai sistem persamaan diferensial.

Sistem persamaan diferensial berfungsi untuk mengubah persamaan diferensial orde tinggi menjadi bentuk sistem persamaan diferensial orde pertama. Sebagai contoh, persamaan diferensial orde ke- $n$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (7)$$

Sehingga secara umum, persamaan (7) dapat dituliskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde pertama yang terdiri dari  $n$  persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (8)$$

atau

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \quad (9)$$

dengan  $t \in \mathbb{R}$  dan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (Boyce dkk., 2017).

## SISTEM AUTOPARAMETRIK

Salah satu contoh sistem autoparametrik disajikan dalam sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x'' + \kappa_1 x' + x + \gamma_1 y^2 &= a\eta^2 \cos \eta \tau, \\ y'' + \kappa_2 y' + q^2 y + \gamma_2 xy &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Sistem persamaan (10) merupakan sistem autoparametrik dengan sistem utama yang tereksitasi eksternal, dengan  $x$  dan  $y$  menyatakan simpangan terhadap waktu,  $\kappa_1 > 0$  dan  $\kappa_2 > 0$  merupakan koefisien redaman,  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  merupakan koefisien keterkaitan nonlinier,  $q = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  merupakan koefisien tuning yang menggambarkan rasio dari frekuensi alami sistem sekunder tak teredam dan sistem utama,  $a\eta^2$  merupakan amplitudo eksitasi eksternal,  $\eta = \frac{\omega}{\omega_1}$  merupakan frekuensi eksitasi dengan  $\omega$  merupakan frekuensi eksitasi, sedangkan  $\omega_1$  dan  $\omega_2$  masing-masing merupakan frekuensi alami dari sistem utama dan sistem sekunder (Tondl dkk., 2000).

Pada sistem autoparametrik, terdapat berbagai jenis resonansi yang bergantung pada hubungan antara frekuensi eksitasi, frekuensi alami sistem utama, dan frekuensi sistem sekunder. Dalam penelitian ini difokuskan pada resonansi primer yaitu ketika frekuensi eksitasi mendekati frekuensi sistem utama ( $\Omega \approx \omega_1$ ) dan resonansi internal 1:2 yaitu ketika frekuensi alami sistem utama mendekati dua kali frekuensi alami sistem sekunder ( $\omega_1 \approx 2\omega_2$ ) (Nayfeh & Mook, 1995).

## METODE MULTIPLE SCALES

Metode *multiple scales* merupakan salah satu metode perturbasi yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinier yang mengandung suku perturbasi dalam beberapa skala. Sebagai contoh, diberikan persamaan diferensial nonlinier sebagai berikut:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \sum_{n=2}^N \alpha_n x^n = 0 \quad (11)$$

Dalam metode ini dikenalkan variabel independen baru (skala waktu) sebagai berikut:

$$T_n = \epsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

sehingga turunan terhadap  $t$  menjadi ekspansi dalam turunan terhadap  $T_n$ , yaitu

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \epsilon D_1 + \dots \quad (13)$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa solusi dari (11) dapat direpresentasikan oleh ekspansi berbentuk

$$\begin{aligned} x(t; \epsilon) &= \epsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) \\ &\quad + \epsilon^3 x_3(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

dengan jumlah skala waktu yang diperlukan tergantung pada orde ekspansi yang dilakukan. Jika ekspansi dilakukan hingga  $O(\epsilon^2)$  maka skala waktu yang dibutuhkan adalah  $T_0$  dan  $T_1$ . Sementara itu, dalam contoh ini akan dilakukan ekspansi hingga orde  $O(\epsilon^3)$ , sehingga skala waktu yang dibutuhkan adalah  $T_0, T_1$ , dan  $T_2$ . Selanjutnya melalui substitusi (13) dan (14) ke (11) serta pengelompokan pada tiap orde, maka dihasilkan sistem persamaan diferensial  $O(\epsilon), O(\epsilon^2), O(\epsilon^3)$ . Pada  $O(\epsilon)$  diperoleh

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0, \quad (15)$$

yang memiliki solusi umum

$$x_1 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0}. \quad (16)$$

dengan  $A$  adalah fungsi kompleks yang belum diketahui dan  $\bar{A}$  merupakan konjugat kompleks dari  $A$ . Solusi orde pertama kemudian disubstitusikan ke orde berikutnya dan pada orde berikutnya muncul suku sekuler (*secular terms*) yang menyebabkan solusi menjadi tak terbatas. Untuk menghindari hal tersebut, dilakukan eliminasi suku sekuler dengan mensyaratkan koefisiennya sama dengan nol. Dari eliminasi tersebut diperoleh sistem persamaan amplitudo fase yang kemudian digunakan untuk memperoleh solusi hampiran sistem (Nayfeh & Mook, 1995).

## TITIK KESETIMBANGAN (STEADY STATE)

Titik kesetimbangan atau *steady state* merupakan solusi khusus dari sistem persamaan diferensial di mana sistem tidak mengalami perubahan terhadap waktu. Secara umum, jika terdapat sistem persamaan diferensial otonom sebagai berikut.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (17)$$

dengan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Titik kesetimbangan pada sistem tersebut dapat didefinisikan sebagai titik  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  yang memenuhi

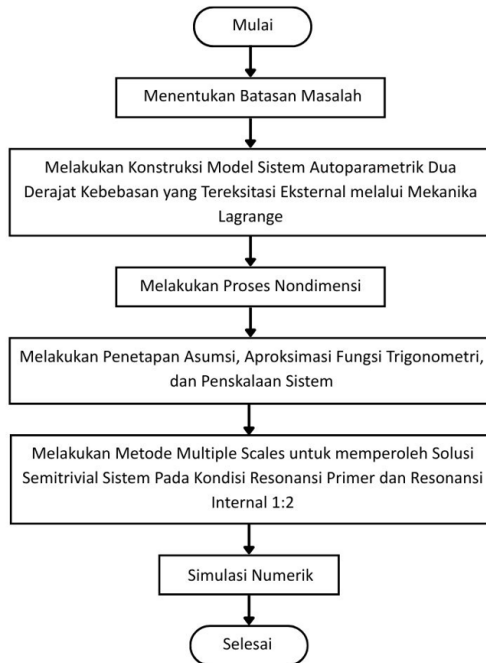
$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (18)$$

(Wiggins, 2003).

## METODE

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan simulasi numerik. Studi literatur dilakukan melalui buku, jurnal ilmiah, artikel ilmiah, serta penelitian terdahulu yang relevan dengan topik penelitian. Untuk simulasi numerik dilakukan melalui *software* komputasi matematis. Sementara itu,

tahapan yang dilakukan pada penelitian ini ditunjukkan oleh *flowchart* berikut.

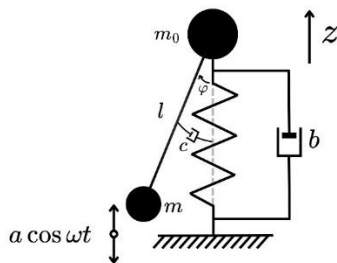


Gambar 2. *Flowchart* Rancangan Penelitian

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### KONSTRUKSI MODEL

Pada penelitian ini dikaji kembali model matematika sistem autoparametrik dua derajat kebebasan yang tereksitasi eksternal dengan mengacu pada model yang dikemukakan oleh Tondl dan Nabergoj (1990). Sistem tersebut terdiri dari dua subsistem yang saling berinteraksi, yaitu sistem utama dan sistem sekunder. Sistem tersebut ditunjukkan pada Gambar 3 berikut:



Gambar 3. Model sistem berdasarkan Tondl & Nabergoj (1990)

Pada gambar tersebut ditunjukkan bahwa sistem utama dimodelkan sebagai sistem pegas-massa dengan massa  $m_0$  yang bergerak secara vertikal dan dikenai eksitasi eksternal harmonik  $a \cos \omega t$ . Sementara itu, sistem sekunder dimodelkan sebagai pendulum yang terangkai pada sistem utama dengan massa  $m$  dan panjang tali  $l$ . Sistem ini memiliki dua koordinat independen yaitu  $z(t)$  yang

merupakan perpindahan vertikal relatif pada sistem utama dan  $\varphi(t)$  yang merupakan perpindahan sudut pendulum atau sistem sekunder.

Untuk memperoleh persamaan gerak dari sistem, digunakan mekanika Lagrange dengan mempertimbangkan energi yang bekerja pada sistem, seperti:

#### 1. Energi Kinetik

Pada sistem utama, karena gerakan vertikal dipengaruhi oleh eksitasi eksternal harmonik  $a \cos \omega t$ , sehingga energi kinetik dari sistem utama adalah

$$T_1 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{z} - a \omega \sin \omega t)^2. \quad (19)$$

Sementara itu, energi kinetik pada sistem sekunder meliputi energi kinetik untuk gerak arah vertikal, yaitu

$$T_2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2, \quad (20)$$

dan energi kinetik untuk gerak arah horizontal, yaitu

$$T_3 = \frac{1}{2} m (\dot{z} - a \omega \sin \omega t + l \dot{\varphi} \sin \varphi)^2. \quad (21)$$

#### 2. Energi Potensial

Sistem utama yang merupakan sistem pegas-massa memiliki energi potensial sebagai berikut:

$$V_1 = \frac{1}{2} k z^2. \quad (22)$$

dengan  $k$  adalah kekakuan pegas. Sementara itu, energi potensial pada sistem sekunder yaitu

$$V_2 = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (23)$$

#### 3. Gaya Nonkonservatif

Pada sistem utama dan sistem sekunder, terdapat gaya nonkonservatif yang bekerja yaitu gaya redamannya masing-masing yaitu  $b$  dan  $c$  pada sistem yang mengikuti prinsip redaman viskos yaitu  $F_b = -b\dot{z}$  dan  $F_c = -c\dot{\varphi}$  dengan  $b$  dan  $c$  merupakan koefisien redaman serta  $\dot{z}$  dan  $\dot{\varphi}$  merupakan kecepatan vertikal sistem utama dan kecepatan sudut sistem sekunder.

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi Lagrange  $L = T - V$ , dan menerapkan rumus umum persamaan Lagrange (6), diperoleh sistem persamaan gerak sistem autoparametrik dua derajat kebebasan tereksitasi eksternal sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (m_0 + m)(\ddot{z} - a\omega^2 \cos \omega t) + b\dot{z} + kz + ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= 0, \\ ml^2 \ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi + ml(\ddot{z} - a\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

Tabel 1. Tabel keterangan variabel

| Variabel            | Keterangan                                |
|---------------------|-------------------------------------------|
| $z(t)$              | Perpindahan vertikal relatif sistem utama |
| $\varphi(t)$        | Perpindahan sudut sistem sekunder         |
| $\dot{z}(t)$        | Kecepatan vertikal sistem utama           |
| $\ddot{z}(t)$       | Percepatan vertikal sistem utama          |
| $\dot{\varphi}(t)$  | Kecepatan sudut sistem sekunder           |
| $\ddot{\varphi}(t)$ | Percepatan sudut sistem sekunder          |

Tabel 2. Tabel keterangan parameter

| Parameter | Keterangan                                      |
|-----------|-------------------------------------------------|
| $m_0$     | Massa sistem utama                              |
| $m$       | Massa sistem sekunder                           |
| $l$       | Jarak pusat $m_0$ ke titik tumpu (panjang tali) |
| $k$       | Kekakuan pegas sistem utama                     |
| $b$       | Koefisien redaman sistem utama                  |
| $c$       | Koefisien redaman sistem sekunder               |
| $g$       | Percepatan gravitasi                            |
| $a$       | Amplitudo eksitasi                              |
| $\omega$  | Frekuensi eksitasi                              |
| $t$       | Waktu                                           |

### PROSES NONDIMENSI

Proses nondimensi berfungsi untuk mengurangi parameter dalam sistem persamaan (24) melalui transformasi variabel waktu dan parameter sistem. Dengan memperkenalkan variabel waktu nondimensi sebagai

$$\tau = \omega_0 t, \quad (25)$$

dengan  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dengan transformasi waktu tersebut diperoleh

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_0. \quad (26)$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan variabel perpindahan nondimensi

$$w = \frac{z}{l} \text{ atau } z = wl, \quad (27)$$

dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh turunan variabel  $z$  dan  $\varphi$  terhadap waktunya sebagai berikut:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 l w', \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dz}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \omega_0^2 l w''. \quad (28)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \varphi', \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \omega_0^2 \varphi''.$$

dengan tanda aksent (' ) menyatakan turunan terhadap  $\tau$ .

Hasil turunan pada persamaan (28) disubstitusikan ke dalam sistem persamaan (24) dan

mendefinisikan parameter karakteristik sistem sebagai berikut:

$$\kappa = \frac{b}{\omega_0(m+m_0)}, \quad q^2 = \frac{k}{\omega_0^2(m+m_0)}, \quad \kappa_0 = \frac{c}{\omega_0 m l^2},$$

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ dan } \alpha = \frac{a}{l}. \quad (29)$$

dengan  $\kappa$  dan  $\kappa_0$  merupakan parameter redaman nondimensi,  $q^2$  merupakan parameter kekakuan nondimensi,  $\eta$  menyatakan rasio frekuensi eksitasi terhadap frekuensi alami sistem, serta  $\alpha$  merupakan amplitudo eksitasi nondimensi. Dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan gerak sistem autoparametrik dua derajat kebebasan tereksitasi eksternal dalam bentuk nondimensi adalah sebagai berikut:

$$w'' + \kappa w' + q^2 w + \frac{m}{m+m_0} (\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = \alpha \eta^2 \cos \eta \tau,$$

$$\varphi'' + \kappa_0 \varphi' + \sin \varphi + (w'' - \alpha \eta^2 \cos \eta \tau) \sin \varphi = 0. \quad (30)$$

### PENETAPAN ASUMSI, APROKSIMASI FUNGSI TRIGONOMETRI, DAN PENSKALAAN SISTEM

Pada tahapan ini, persamaan gerak nondimensi pada sistem persamaan (30) diasumsikan berada pada kondisi resonansi primer dan resonansi internal 1:2, sehingga untuk resonansi primer dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\eta \approx q,$$

$$\eta = q + \epsilon \sigma_1. \quad (31)$$

Dikarenakan resonansi internal yaitu

$$q \approx 2,$$

$$q = 2 - \epsilon \sigma_2, \quad (32)$$

sehingga secara lengkap (31) dapat dituliskan menjadi

$$\eta = 2 + \epsilon(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (33)$$

Selanjutnya, dilakukan aproksimasi fungsi trigonometri untuk menyederhanakan bentuk persamaan gerak sebagai berikut:

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad (34)$$

dan

$$\cos \varphi \approx 1. \quad (35)$$

Setelah itu, parameter  $\kappa$  dan  $\kappa_0$  diskalakan pada  $O(\epsilon)$  dan parameter  $\alpha$  diskalakan pada  $O(\epsilon^2)$ . Penskalaan ini dilakukan agar nantinya di tahap *multiple scales* redaman dan gaya eksitasi eksternal memiliki orde yang sama dengan nonlinieritas di sistem sebagai gangguan. Sehingga setelah proses ini dilakukan, diperoleh sistem persamaan gerak sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w'' + \epsilon \bar{\kappa} w' + (2 - \epsilon \sigma_2)^2 w + \frac{m}{m + m_0} (\varphi'' \varphi + \varphi'^2) \\
 = \epsilon^2 \bar{\alpha} (2 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2))^2 \cos(2 \\
 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2)) \tau, \\
 \varphi'' + \epsilon \bar{\kappa}_0 \varphi' + \varphi + (w'' \\
 - \epsilon^2 \bar{\alpha} (2 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2))^2 \cos(2 \\
 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2)) \tau) \varphi = 0.
 \end{aligned} \quad (36)$$

### SOLUSI SEMITRIVIAL SISTEM

Untuk memperoleh solusi hampiran sistem digunakan metode *multiple scales* dengan menggunakan skala waktu (12) dan ekspansi dalam turunan terhadap  $T_n$  (13) serta asumsi bahwa solusi dari (36) diekspansikan berbentuk

$$w(\tau; \epsilon) = \epsilon w_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 w_2(T_0, T_1, \dots) + \dots, \quad (37)$$

$$\varphi(\tau; \epsilon) = \epsilon \varphi_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 \varphi_2(T_0, T_1, \dots) + \dots. \quad (38)$$

Dari persamaan (13) dan (37) diperoleh ekspansi turunan pertama dan kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{d\tau} &= \left( \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right) (\epsilon w_1(T_0, T_1, \dots) \\
 &\quad + \epsilon^2 w_2(T_0, T_1, \dots) + \dots) \\
 &= \epsilon \frac{\partial w_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial w_2}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial w_1}{\partial T_1} \\
 &\quad + O(\epsilon^3) + \dots,
 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 w}{d\tau^2} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) (\epsilon w_1(T_0, T_1, \dots) \\
 &\quad + \epsilon^2 w_2(T_0, T_1, \dots) + \dots) \\
 &= \epsilon \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} \\
 &\quad + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\epsilon^3) + \dots.
 \end{aligned} \quad (40)$$

Sementara itu, dari (13) dan (38) diperoleh

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + O(\epsilon^3) + \dots, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = \epsilon \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\epsilon^3) + \dots. \quad (42)$$

Persamaan-persamaan yang diperoleh tersebut, selanjutnya disubstitusikan pada sistem persamaan (36) untuk menentukan solusi sistem, salah satunya semitrivial.

Solusi semitrivial merupakan solusi yang terjadi ketika salah satu variabel sistem bernilai nol dan variabel lainnya bernilai tidak nol. Dengan mengambil  $\varphi = 0$  pada persamaan (36), diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w'' + \epsilon \bar{\kappa} w' + (2 - \epsilon \sigma_2)^2 w \\
 = \epsilon^2 \bar{\alpha} (2 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2))^2 \cos(2 \\
 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2)) \tau.
 \end{aligned} \quad (43)$$

Karena  $\varphi = 0$ , dengan mensubstitusikan (37), (39), dan (40) ke dalam (43) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left( \epsilon \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\epsilon^3) + \dots \right) \\
 + \epsilon \bar{\kappa} \left( \epsilon \frac{\partial w_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial w_2}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial w_1}{\partial T_1} \right. \\
 \left. + O(\epsilon^3) + \dots \right) \\
 + (4 - \epsilon 4\sigma_2 + \epsilon^2 \sigma_2^2) (\epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 \\
 + \dots) \\
 = \epsilon^2 \bar{\alpha} (4 - \epsilon 4(\sigma_1 - \sigma_2) \\
 + \epsilon^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2) \cos(2 \\
 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2)) T_0.
 \end{aligned} \quad (44)$$

Dikarenakan redaman, nonlinieritas, dan eksitasi eksternal telah tertangkap pada  $O(\epsilon^2)$ , maka ekspansi dibatasi hingga  $O(\epsilon^2)$ . Dengan menyamakan koefisien dari  $\epsilon$  dan  $\epsilon^2$  dengan nol, diperoleh

$$O(\epsilon) : \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + 4w_1 = 0, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
 O(\epsilon^2) : \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} + 4w_2 = -2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_1} - \bar{\kappa} \frac{\partial w_1}{\partial T_0} \\
 + 4\sigma_2 w_1 \\
 + 4\bar{\alpha} \cos(2 \\
 + \epsilon (\sigma_1 - \sigma_2)) T_0.
 \end{aligned} \quad (46)$$

Solusi dari (45) adalah

$$w_1 = A(T_1) e^{2iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-2iT_0}, \quad (47)$$

atau dalam bentuk polar, misalkan  $A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}$ , maka (47) dapat ditulis sebagai

$$w_1 = a(T_1) \cos(2T_0 + \beta(T_1)). \quad (48)$$

Selanjutnya, substitusi (47) ke (46), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} + 4w_2 = -4i \frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} e^{2iT_0} - 2i\bar{\kappa} A(T_1) e^{2iT_0} \\
 + 4\sigma_2 A(T_1) e^{2iT_0} \\
 + 2\bar{\alpha} e^{i(2T_0 + (\sigma_1 - \sigma_2)T_1)} + cc.
 \end{aligned} \quad (49)$$

Persamaan (49) memiliki suku-suku yang koefisiennya memuat faktor resonansi ( $e^{2iT_0}$ ) yang disebut suku sekuler. Untuk menghilangkan pengaruh suku sekuler tersebut, koefisien yang bersesuaian harus dibuat sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$-4i \frac{\partial A(T_1)}{\partial T_1} - 2i\bar{\kappa} A(T_1) + 4\sigma_2 A(T_1) + 2\bar{\alpha} e^{i((\sigma_1 - \sigma_2)T_1)} = 0,$$

dengan mempertimbangkan bentuk polar

$$\begin{aligned}
 -4i \frac{\partial \left( \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \right)}{\partial T_1} - 2i\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \right) \\
 + 4\sigma_2 \left( \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \right) \\
 + 2\bar{\alpha} e^{i((\sigma_1 - \sigma_2)T_1)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2i \left( \frac{\partial a(T_1)}{\partial T_1} + a(T_1)i \frac{\partial \beta(T_1)}{\partial T_1} \right) e^{i\beta(T_1)} \\
& \quad - i\bar{\kappa}a(T_1)e^{i\beta(T_1)} \\
& \quad + 2\sigma_2 a(T_1)e^{i\beta(T_1)} \\
& \quad + 2\bar{\alpha}e^{i(\sigma_1 - \sigma_2)T_1} = 0 \\
& -2i \left( \frac{\partial a(T_1)}{\partial T_1} + a(T_1)i \frac{\partial \beta(T_1)}{\partial T_1} \right) - i\bar{\kappa}a(T_1) \\
& \quad + 2\sigma_2 a(T_1) \\
& \quad + 2\bar{\alpha}e^{i((\sigma_1 - \sigma_2)T_1 - \beta(T_1))} = 0 \\
& -2ia' + 2a(T_1)\beta' - i\bar{\kappa}a(T_1) + 2\sigma_2 a(T_1) \\
& \quad + 2\bar{\alpha} \cos((\sigma_1 - \sigma_2)T_1 - \beta(T_1)) \\
& \quad + i2\bar{\alpha} \sin((\sigma_1 - \sigma_2)T_1 - \beta(T_1)) \\
& \quad = 0,
\end{aligned} \tag{50}$$

diperoleh bagian real dan bagian imajiner sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
2a(T_1)\beta' + 2\sigma_2 a(T_1) + 2\bar{\alpha} \cos \gamma &= 0, \\
-2a' - \bar{\kappa}a(T_1) + 2\bar{\alpha} \sin \gamma &= 0,
\end{aligned} \tag{51}$$

dengan

$$\gamma = (\sigma_1 - \sigma_2)T_1 - \beta(T_1). \tag{52}$$

Untuk mempermudah perhitungan, dengan mempertimbangkan (52), sistem persamaan (51) dapat ditulis menjadi

$$\gamma' = \sigma_1 + \frac{\bar{\alpha}}{a(T_1)} \cos \gamma, \text{ dan } a' = -\frac{\bar{\kappa}a(T_1)}{2} + \bar{\alpha} \sin \gamma. \tag{53}$$

Untuk mendapatkan nilai  $a$  (amplitudo), sistem persamaan (53) tidak dapat diselesaikan langsung dengan integral. Oleh karena itu, untuk memperoleh amplitudo saat laju perubahannya sama dengan 0 atau solusi *steady state* dari (53), dapat diambil  $a' = \gamma' = 0$  (Nayfeh & Mook, 1995), diperoleh

$$-\sigma_1 = \frac{\bar{\alpha}}{a(T_1)} \cos \gamma, \text{ dan } \frac{\bar{\kappa}a(T_1)}{2} = \bar{\alpha} \sin \gamma. \tag{54}$$

Dengan mengeliminasi fase melalui pengkuadratan kedua ruas pada masing-masing persamaan dan menjumlahkan keduanya, diperoleh  $a$  (amplitudo) sebagai berikut:

$$a = \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\frac{\bar{\kappa}^2}{4} + \sigma_1^2}} \tag{55}$$

Selanjutnya, untuk solusi dari (46) yaitu

$$w_2 = 0. \tag{56}$$

Dari perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa solusi semitrivial dari sistem persamaan gerak (43) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
w(\tau; \epsilon) &= \epsilon w_1(T_0, T_1, \dots), \\
w(\tau) &= \epsilon a \cos(2T_0 + \beta(T_1)), \\
w(\tau) &= \epsilon \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\frac{\bar{\kappa}^2}{4} + \sigma_1^2}} \cos(2T_0 + \beta(T_1)).
\end{aligned} \tag{57}$$

dengan  $\beta(T_1) = (\sigma_1 - \sigma_2)T_1 - \gamma$ .

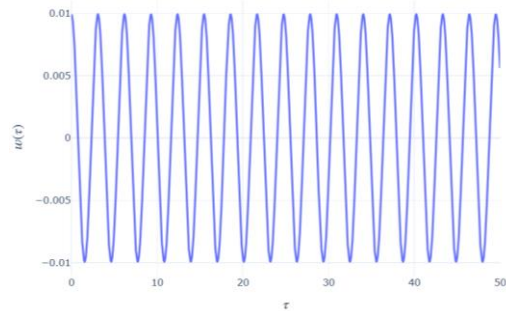
Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk memvisualisasikan hasil perhitungan analitik yaitu solusi hampiran yang telah diperoleh melalui metode *multiple scales* menggunakan parameter-parameter

yang telah ditentukan. Parameter-parameter tersebut disajikan pada tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 3. Tabel Nilai Parameter

| Parameter      | Nilai | Sumber                   |
|----------------|-------|--------------------------|
| $\epsilon$     | 0,1   | Asumsi                   |
| $\bar{\alpha}$ | 0,08  | Asumsi                   |
| $\bar{\kappa}$ | 0,1   | Tondl dan Nabergoj, 1990 |
| $\sigma_1$     | 0,8   | Asumsi                   |
| $\sigma_2$     | 0,5   | Asumsi                   |

Berdasarkan parameter-parameter tersebut dan dengan memisalkan fase  $\gamma = 0$ , diperoleh grafik visualisasi sebagai berikut:



Gambar 4. Grafik Visualisasi Solusi Semitrivial

Dari Gambar 4 diperoleh informasi bahwa pada saat  $\varphi(\tau) = 0$  atau sistem sekunder berada pada kondisi diam,  $w(\tau)$  atau sistem utama berosilasi secara periodik dengan amplitudo pada kondisi *steady state* sebesar 0,00998. Nilai  $\epsilon$  menunjukkan bahwa getaran yang terjadi merupakan getaran lemah. Selain itu, besar amplitudo getaran dipengaruhi oleh besarnya amplitudo eksitasi eksternal, redaman, dan juga detuning yang menyatakan kedekatan frekuensi alami sistem dengan frekuensi eksitasi.

## PENUTUP

## SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian tersebut dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan mekanika Lagrange model matematika sistem autoparametrik dua derajat kebebasan tereksitasi eksternal berhasil diturunkan dengan memanfaatkan energi kinetik, energi potensial, dan gaya nonkonservatif yang bekerja pada sistem. Persamaan gerak yang dihasilkan yaitu

$$(m_0 + m)(\ddot{z} - a\omega^2 \cos \omega t) + b\dot{z} + kz + ml(\ddot{\phi} \sin \varphi + \dot{\phi}^2 \cos \varphi) = 0,$$

$ml^2 \ddot{\phi} + c\dot{\phi} + mgl \sin \varphi + ml(\ddot{z} - a\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi = 0$ . Persamaan gerak yang telah dihasilkan kemudian dinyatakan dalam bentuk nondimensi untuk

mengurangi jumlah parameter dalam sistem. Kemudian, melalui metode *multiple scales*, pada kondisi resonansi primer dan resonansi internal 1:2, diperoleh solusi semitrivial yang menunjukkan bahwa saat sistem sekunder diam, sistem utama berosilasi dengan amplitudo yang dipengaruhi oleh amplitudo eksitasi eksternal, parameter redaman, serta parameter detuning yang menyatakan besarnya penyimpangan dari kondisi resonansi tepat sebagai berikut:

$$w(\tau) = \epsilon \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\frac{\bar{\kappa}^2}{4} + \sigma_1^2}} \cos(2T_0 + \beta(T_1)),$$

$$\varphi(\tau) = 0.$$

Hasil perhitungan analitik yang diperoleh kemudian divisualisasikan melalui grafik dengan parameter  $\epsilon = 0,1$ ,  $\bar{\alpha} = 0,08$ ,  $\bar{\kappa} = 0,1$ ,  $\sigma_1 = 0,8$ , dan  $\sigma_2 = 0,5$ . Grafik menunjukkan bahwa sistem utama berosilasi secara periodik dengan amplitudo sebesar 0,00998.

#### SARAN

Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menyelesaikan solusi lain dari sistem yaitu solusi nontrivial beserta visualisasinya, melakukan analisis kestabilan dari solusi yang telah diperoleh, dan melakukan analisis bifurkasi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Diyanita, A. (2017). *Analisis Respons Vibrasi Bangunan Bertingkat Tinggi untuk Deteksi Bangunan*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Downey, A. R. J., & Micheli, L. (2024). *Vibration Mechanics: A Practical Introduction for Mechanical, Civil, and Aerospace Engineers*.
- Giancoli, D. C. (2014). *Physics: Principles with applications* (7th ed.). Pearson Education.
- Maya, R. (2014). *Diktat Kuliah Persamaan Diferensial Biasa Revisi Keenam*. IKIP Siliwangi.
- Nayfeh, A. Hasan., & Mook, D. T. . (1995). *Nonlinear oscillations*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.
- Rao, S. S. (2018). *Mechanical Vibrations Sixth Edition in SI Units*. [www.pearsonglobal editions.com/rao](http://www.pearsonglobal editions.com/rao).
- Rimaza, D. C., & Wiyono, D. R. (2014). Pengaruh Getaran pada Struktur Bangunan Satu Tingkat Akibat Gerakan Manusia. Dalam *Jurnal Teknik Sipil* (Vol. 10).
- Silva-Navarro, G., & Abundis-Fong, H. F. (2017). Evaluation of Autoparametric Vibration Absorbers on N-Story Building-Like Structures. Dalam G. Kerschen (Ed.), *Nonlinear Dynamics, Volume 1* (hlm. 177–184). Springer International Publishing.
- Spiegel, M. R. (1967). *Schaum's outline of theory and problems of theoretical mechanics: With an introduction to Lagrange's equations and Hamiltonian theory*. McGraw-Hill.
- Tondl, A., & Nabergoj, R. (1990). *Model Simulation of Parametrically Excited Ship Rolling*.
- Tondl, A., Ruijgrok, T., Verhulst, F., & Nabergoj, R. (2000). *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*. Cambridge University Press.