

MODEL PREDATOR-PREY DENGAN MUTUALISME PERLINDUNGAN BAGI PREY DAN KOMPETISI PADA PREDATOR

Dewi Rahmawati

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : dewirahmawati.22040@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : abadi@unesa.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas interaksi predator-prey yang melibatkan satu spesies prey yang memperoleh perlindungan melalui hubungan mutualisme, serta satu spesies predator yang mempertimbangkan adanya kompetisi, dengan model interaksi mengikuti *Lotka-Volterra* yang diasumsikan linear. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui konstruksi model, titik kesetimbangan, analisis kestabilan sistem dan simulasi numerik sistem. Hasil konstruksi model dan penentuan titik kesetimbangan menunjukkan terdapat tiga titik kesetimbangan yang memenuhi syarat biologis (non-negatif) yaitu $E_1 = (0,0)$ yang selalu bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle untuk berapapun nilai parameter, $E_2 = (K,0)$ yang bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik node jika memenuhi syarat kestabilan $\mu > \frac{eaK}{1+Mqu}$ dan $E_3 = (x^*, y^*)$ yang bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik node jika memenuhi kriteria *Routh-Hurwitz*. Kemudian, hasil simulasi numerik menunjukan terjadinya bifurkasi *transcritical* yang menyebabkan pertukaran kestabilan antara titik kesetimbangan $E_2 = (K,0)$ dan $E_3 = (x^*, y^*)$. Titik E_2 stabil asimtotik ketika $M > 71.2499$, $q > 0.1425$ dan $u > 0.4222$, sedangkan titik E_3 stabil asimtotik ketika $M < 71.2499$, $q < 0.1425$ dan $u < 0.4222$. Pertukaran kestabilan ini menunjukkan bahwa sistem dapat mengalami perubahan kondisi dimana predator akan mengalami kepunahan ketika sistem menuju E_2 , sedangkan predator dan prey dapat hidup berdampingan secara stabil ketika sistem menuju E_3 .

Kata Kunci: Model Predator-Prey, Mutualisme Perlindungan, *Lotka-Volterra*, Kompetisi

Abstract

This study discusses predator-prey interactions involving a prey species that gains protection through a mutualistic relationship and a predator species that accounts for competition, using assumed linear *Lotka-Volterra* model. The objective of this study is to model construction, equilibrium points, system stability analysis, and numerical simulation of the system. The results of the model construction and the determination of equilibrium points indicate that there are three equilibrium points that satisfy the biological (non-negative) condition: $E_1 = (0,0)$, which is always unstable and acts as a saddle point for any parameter value, $E_2 = (K,0)$ which is asymptotically stable as a node point if the stability condition $\mu > \frac{eaK}{1+Mqu}$ is satisfied, and $E_3 = (x^*, y^*)$, which is asymptotically stable as a node point if the *Routh-Hurwitz* criterion is satisfied. Furthermore, the results of the numerical simulation show the occurrence of a *transcritical* bifurcation, which causes a stability switch between the equilibrium points $E_2 = (K,0)$ and $E_3 = (x^*, y^*)$. Point E_2 is asymptotically stable when $M > 71.2499$, $q > 0.1425$ and $u > 0.4222$, whereas point E_3 is asymptotically stable when $M < 71.2499$, $q < 0.1425$ and $u < 0.4222$. This stability transition indicates that the system can undergo a change in conditions such that the predator goes extinct as the system moves toward E_2 , whereas the predator and prey can coexist stably as the system moves toward E_3 .

Keywords: Predator-Prey Model, Protective Mutualism, *Lotka-Volterra*, Competition

PENDAHULUAN

Ekologi adalah cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan timbal balik atau interaksi antara makhluk hidup dengan habitatnya. Dalam ekosistem, interaksi ini tidak dapat dipisahkan

sehingga makhluk hidup akan selalu bergantung pada makhluk hidup lainnya (Darmayani, 2021). Predasi merupakan interaksi yang terjadi antara suatu spesies (predator) memakan spesies lain (prey), sebagai contoh kumbang tanah (*Nebria brevicollis*) yang memakan larva fender's blue (*Icaricia icarioides*)

fenderi) karena kedua spesies menghuni ekosistem yang sama di wilayah padang rumput Oregon, Amerika Serikat (LaBonte, 2011; Thomas dkk., 2020).

Interaksi antara predator dan prey, dimana populasi predator dan prey saling bergantung sama lain dapat dimodelkan menjadi sebuah model matematika yang disebut model *Lotka Volterra*. Pada model *Lotka Volterra* terdapat faktor pengatur interaksi yang dikenal sebagai respon fungsional. Respon fungsional menggambarkan laju dimana predator membunuh prey pada kepadatan prey (Yoshida, 1966). Kondisi ketika laju predasi meningkat secara linear seiring bertambahnya kepadatan prey menjadi respon fungsional yang digunakan pada *Lotka Volterra* (LaBonte, 2011).).

Pada proses predasi, laju predasi dapat dipengaruhi oleh faktor lain, salah satunya yaitu perlindungan. Perlindungan ini bisa didapat melalui adaptasi dengan lingkungan atau menjalin hubungan dengan organisme lain. Pada penelitian ini, perlindungan didapat oleh prey (larva *fender's blue*) dengan menjalin hubungan saling menguntungkan (mutualisme) dengan organisme lain (semut). Dimana organisme lain ini memberikan perlindungan bagi spesies yang dilindungi (larva *fender's blue*) dari predator (kumbang tanah) dengan melemahkan kekuatan interaksi antara spesies yang dilindungi dengan predatornya. Sebagai imbalan, spesies pelindung (semut) mendapat sumber makanan atau manfaat lainnya dari spesies yang dilindungi (Revilla & Krivan., 2022).

Sedangkan pada predator, terdapat faktor lain yang mempengaruhi populasi predator yaitu kompetisi. Kompetisi merupakan interaksi perebutan sumber daya terbatas, baik antar individu sejenis (kompetisi intraspesifik) maupun antar spesies berbeda (kompetisi interspesifik) (Kusumawati, 2018). Kepadatan populasi kumbang tanah (*Nebria brevicollis*) yang sangat tinggi dan keterbatasan sumber daya makanan menjadi potensi dalam memicu kompetisi intraspesifik.

Penelitian Revilla & Krivan (2022) yang mengkaji model *Lotka-Volterra* dengan mempertimbangkan perlindungan mutualistik bagi prey dari predator dengan dua populasi yaitu prey dan predator. Dimana pertumbuhan populasi predator bergantung pada keberadaan prey, sementara pertumbuhan populasi prey bergantung pada laju reproduksi alamnya yang dipengaruhi oleh perlindungan

mutualistik pada prey dari semut dengan preferensi perlindungan semut yang adaptif.

Penelitian Putri dkk (2023) yang menyederhanakan model dari Revilla & Krivan dengan mengasumsikan preferensi perlindungan semut yang adaptif menjadi konstan pada rentang nilai 0 hingga 1, kemudian melanjutkannya dengan analisis bifurkasi terhadap parameter preferensi perlindungan tersebut.

Penelitian ini akan merekonstruksi model predator-prey yang telah dikaji oleh Revilla & Krivan (2022) dengan menggunakan penyederhanaan oleh Putri dkk (2023) yaitu parameter preferensi perlindungan yang konstan karena berdasarkan interaksi yang terjadi pada larva *fender's blue* (*Icaricia icarioides fenderi*) yang bersimbiosis mutualisme dengan semut, semut memberikan perlindungan kepada larva dari ancaman predator, sehingga tingkat preferensi perlindungan dianggap tetap selama interaksi berlangsung. Kemudian pada predator ditambahkan kompetisi intraspesifik sebab dari penelitian yang telah dilakukan oleh LaBonte (2011) menunjukkan adanya kepadatan populasi yang besar pada kumbang tanah (*Nebria brevicollis*) yang berpotensi memunculkan kompetisi yang dapat menjadi penyebab kematian selain kematian alami pada kumbang tanah. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui konstruksi model, titik kesetimbangan, analisis kestabilan sistem dan simulasi numerik sistem untuk memahami kondisi di mana populasi tetap stabil atau mengalami perubahan dari model predator-prey dengan adanya perlindungan mutualistik bagi prey dan kompetisi pada predator.

KAJIAN TEORI

MODEL PREDATOR-PREY

Model predator-prey merupakan sebuah model matematika yang menggambarkan interaksi spesies (predator) yang memangsa spesies lain (prey). Model pertama dari model predator prey dirumuskan pada tahun 1925 dan 1926 oleh Alfred J. Lotka dan Vito Volterra, yang membuat model ini disebut juga sebagai model *Lotka-Volterra*. Model *Lotka-Volterra* mempertimbangkan dua populasi dengan interaksi antara satu spesies predator dan satu spesies prey, dimana x dinotasikan sebagai populasi spesies prey pada waktu t dan y dinotasikan sebagai populasi

spesies predator pada waktu t , dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy\end{aligned}\quad (1)$$

(Boyce dan D'Prima, 2012)

Dalam perkembangannya, model *Lotka-Volterra* telah dimodifikasi dengan menambahkan berbagai faktor ekologis, salah satunya adalah perlindungan mutualistik yang direpresentasikan melalui beberapa parameter, sebagaimana dilakukan oleh Revilla & Krivan (2022).

MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Model pertumbuhan logistik merupakan model pertumbuhan populasi yang mempertimbangkan bahwa individu tidak dapat berkembang secara tak terbatas dalam lingkungan yang terbatas, maka laju pertumbuhan populasi bergantung pada kepadatan populasinya. Terbatasnya lingkungan membuat populasi yang dapat ditampung dalam lingkungan memiliki batas maksimal (*carrying capacity*) seperti akibat karena adanya kompetisi, sehingga membatasi pertumbuhan populasi (Aprilia dkk, 2022). Persamaan model pertumbuhan logistik dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2)$$

(Salisbury, 2011)

KOMPETISI

Kompetisi merupakan interaksi yang terjadi antara individu dalam spesies yang sama atau antara spesies berbeda, yang bersaing menggunakan sumber daya yang sama dan terbatas. Berdasarkan Campbell & Haberman (2008) model matematika dua populasi dengan mempertimbangkan persaingan pada kedua populasi dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy - cx^2 \\ \frac{dy}{dt} &= qy - rxy - sy^2\end{aligned}\quad (3)$$

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan merupakan solusi dari persamaan diferensial yang konstan karena tidak berubah di sepanjang waktu, yang dapat dituliskan

$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, dimana persamaan diferensial tersebut memiliki solusi konstan karena tidak $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ dengan $\mathbf{x}^*$ merupakan titik kesetimbangan ketika memenuhi $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ (Logan, 2015)

ANALISIS TITIK KESETIMBANGAN

Analisis kestabilan dilakukan untuk menyelidiki perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangannya. Pada sistem persamaan diferensial terdapat sistem linear dan sistem nonlinear, untuk sistem nonlinear perlu dilakukan linearisasi untuk bisa mengetahui nilai eigen dari sistem sehingga jenis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut dapat diketahui (Boyce dan D'Prima, 2012). Untuk menganalisis kestabilan nonlinear, sistem dilinearisasi di sekitar titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobian yang kemudian menghasilkan persamaan karakteristik yang digunakan untuk mengetahui nilai eigen sistem. Ketika persamaan karakteristik suatu persamaan sulit difaktorkan atau diketahui nilainya, maka analisis kestabilannya dapat menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* (Brauer & Castillo-chavez, 2011).

BIFURKASI

Bifurkasi merupakan proses perpindahan solusi sistem karena adanya perubahan nilai parameter yang dapat membawa solusi sistem menjadi semakin mendekati titik kesetimbangan (stabil) atau menjauhi titik kesetimbangan (tidak stabil) seperti pada bifurasi *saddle-node*, *transcritical*, *pitchfork*, dan *hopf* (Strogatz, 2015). Analisis bifurkasi berperan untuk mengetahui kondisi parameter yang menyebabkan sistem berada dalam keadaan stabil akibat perubahan nilai parameter sehingga kondisi keseimbangan ekosistem dapat diketahui.

METODE

Penelitian yang dilakukan menggunakan metode studi literatur yang mengkaji teori dan konsep dari berbagai sumber literatur seperti artikel, jurnal, skripsi, dan *e-book* yang relevan dengan topik serta relevansi untuk dijadikan sebagai rujukan dalam permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini. Penelitian ini berfokus pada konsep dan teori tentang model predator-prey yang mempertimbangkan mutualisme perlindungan bagi prey dan adanya kompetisi pada predator.

Selain itu, penelitian ini juga melakukan penentuan titik kesetimbangan, analisis kestabilan

dan simulasi numerik untuk mengetahui kesesuaian antara hasil perhitungan analitik sistem yang diperoleh dengan perhitungan secara numerik dari model dengan menggunakan software matematika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

KONSTRUKSI MODEL PREDATOR PREY DENGAN MUTUALISME PERLINDUNGAN BAGI PREY DAN KOMPETISI PADA PREDATOR

Berdasarkan fenomena di padang rumput Oregon, Amerika Utara, terjadi interaksi predator-prey antara larva fender's blue (*Icaricia icarioides fenderi*) sebagai prey dan kumbang tanah (*Nebria brevicollis*) sebagai predator. Pada tahap instar awal, larva memperoleh perlindungan mutualistik dari semut yang menghambat proses predasi, sementara pada predator terjadi kompetisi intraspesifik. Model pada penelitian ini mengacu pada Putri dkk (2023), yang merupakan penyederhanaan dari model Revilla & Krivan (2022) dengan mengasumsikan parameter preferensi perlindungan bersifat konstan karena tidak adanya sumber daya alternatif di habitat predator dan prey.

Adapun asumsi yang digunakan pada penelitian ini, yaitu :

1. Populasi prey bertumbuh secara logistik dengan laju pertumbuhan dan dibatasi oleh kapasitas tampung prey.
2. Proses predasi mengikuti model *Lotka-Volterra* yang diasumsikan linear dengan laju predasi yang mengalami hambatan akibat kehadiran koloni semut sebagai pelindung mutualistik prey, kekuatan perlindungan mutualistik terhadap predasi dan preferensi perlindungan semut sebagai pelindung mutualistik terhadap sumber daya prey yang menyebabkan laju predasi menjadi lemah atau gagal dilakukan.
3. Proses konversi biomassa terhadap prey yang dikonsumsi juga dipengaruhi oleh adanya perlindungan mutualistik yang diberikan oleh ukuran koloni semut sebagai pelindung mutualistik prey, kekuatan perlindungan mutualistik terhadap predasi dan preferensi perlindungan semut sebagai pelindung mutualistik terhadap sumber daya prey yang menyebabkan proses konversi biomassa dapat berkurang atau gagal dilakukan.
4. Kematian alami pemangsa menyebabkan berkurangnya populasi predator.

5. Kompetisi antar individu yang terjadi pada predator menyebabkan kematian tambahan selain kematian alami pada predator sehingga populasi predator berkurang.

Keterangan parameter dari asumsi yang digunakan sebagai berikut:

Tabel 1: Keterangan Parameter

Parameter	Keterangan
r	Laju pertumbuhan prey
K	Kapasitas tampung prey
a	Laju predasi prey oleh predator
M	Ukuran koloni semut sebagai pelindung mutualistik
q	Kekuatan perlindungan semut terhadap predasi
u	Preferensi semut sebagai pelindung mutualistik dalam melindungi prey
μ	Laju kematian alami predator
e	Laju konversi biomassa
δ	Laju kematian akibat kompetisi antar individu predator

Berdasarkan asumsi yang digunakan, diperoleh model predator-prey yang terdiri atas dua populasi, yaitu populasi prey yang memperoleh perlindungan mutualistik dan populasi predator yang mengalami kompetisi intraspesifik, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1 + Mqu} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{eaxy}{1 + Mqu} - \mu y - \delta y^2\end{aligned}\quad (4)$$

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4) diperoleh dengan membuat ruas kanan setiap persamaan sama dengan nol, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1 + Mqu} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{eaxy}{1 + Mqu} - \mu y - \delta y^2 = 0 \quad (6)$$

Persamaan (5) dan persamaan (6) difaktorkan, sehingga diperoleh:

$$x \left(r - \frac{rx}{K} - \frac{ay}{1 + Mqu} \right) = 0 \quad (7)$$

$$y \left(\frac{eax}{1 + Mqu} - \mu - \delta y \right) = 0 \quad (8)$$

Dari persamaan (7) diperoleh

$$x = 0 \quad \text{atau} \quad r - \frac{rx}{K} - \frac{ay}{1 + Mqu} = 0 \quad (9)$$

Dari persamaan (8) diperoleh

$$y = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{eax}{1 + Mqu} - \mu - \delta y = 0 \quad (10)$$

Maka kemungkinan titik kesetimbangan yang diperoleh dari sistem persamaan (4) yang merupakan model predator prey dengan adanya mutualisme perlindungan pada prey dan kompetisi pada predator adalah empat titik kesetimbangan, yaitu sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan kepunahan prey dan predator yaitu ketika $(x, y) = (0, 0)$
2. Titik kesetimbangan kepunahan prey yaitu ketika $(x, y) = \left(0, -\frac{\mu}{\delta}\right)$
3. Titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu ketika $(x, y) = (K, 0)$
4. Titik kesetimbangan hidup berdampingan yaitu ketika

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\delta rK + 2\delta rKMqu + M^2 q^2 u^2 \delta rK + \mu aK + \mu aKMqu}{\frac{kea^2 + r\delta + 2Mqu\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta}{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}}, \frac{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}{\frac{kea^2 + r\delta + 2Mqu\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta}{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}} \right)$$

Berdasarkan kemungkinan titik kesetimbangan yang telah dianalisis, terdapat tiga titik kesetimbangan yang memenuhi syarat biologis (non-negatif), yaitu sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan kepunahan prey dan predator yang dimisalkan dengan $E_1 = (0, 0)$ yang merepresentasikan bahwa ketika tidak ada prey di dalam ekosistem maka predator tidak dapat bertahan hidup sehingga mengalami kepunahan.
2. Titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yang dimisalkan dengan $E_2 = (K, 0)$ yang merepresentasikan bahwa ketika tidak ada predator, populasi prey akan tumbuh hingga mencapai kapasitas tampung prey yaitu sebesar K dalam ekosistem.
3. Titik kesetimbangan hidup berdampingan yang dimisalkan dengan

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\delta rK + 2\delta rKMqu + M^2 q^2 u^2 \delta rK + \mu aK + \mu aKMqu}{\frac{kea^2 + r\delta + 2Mqu\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta}{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}}, \frac{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}{\frac{kea^2 + r\delta + 2Mqu\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta}{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}} \right)$$

dengan $y^* > 0$ jika dan hanya jika $eaK > \mu(1 + Mqu)$, yang merepresentasikan bahwa prey dan predator dapat hidup berdampingan dalam ekosistem dengan adanya interaksi predasi tanpa ada populasi yang mengalami kepunahan.

ANALISIS KESTABILAN LOKAL TITIK KESETIMBANGAN

Sistem persamaan (4) merupakan persamaan nonlinear, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1 &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{axy}{1 + Mqu} \\ f_2 &= \frac{eaxy}{1 + Mqu} - \mu y - \delta y^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Dari persamaan (11) akan dilakukan linearisasi dengan matriks jacobian dari masing-masing persamaan pada sistem, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} r - \frac{2xr}{K} - \frac{ay}{1 + Mqu} & -\frac{ax}{1 + Mqu} \\ \frac{eay}{1 + Mqu} & \frac{eax}{1 + Mqu} - \mu - 2y\delta \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks jacobian pada persamaan (12) dapat dilakukan analisis kestabilan lokal untuk masing-masing titik kesetimbangan sebagai berikut:

1. Analisis kestabilan lokal pada titik kesetimbangan kepunahan prey dan predator $E_1 = (0, 0)$.

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$ ke dalam matriks jacobian pada persamaan (12) sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \quad (13)$$

Setelah diperoleh matriks jacobian E_1 , akan dicari nilai eigennya dengan $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut:

$$\det \begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

$$(r - \lambda)(-\mu - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = r \text{ dan } \lambda_2 = -\mu$$

Dari kedua nilai eigen, diketahui bahwa $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, karena dalam konteks biologis parameter r dan parameter μ yang merepresentasikan laju pertumbuhan prey dan kematian alami predator selalu bernilai positif. Maka kestabilan titik kesetimbangan E_1 adalah tidak stabil dengan jenis titik saddle point.

2. Analisis kestabilan lokal pada titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator $E_2 = (K, 0)$. Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $E_2 = (K, 0)$ ke dalam matriks jacobian pada persamaan (12) sehingga diperoleh

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -r & -\frac{aK}{1 + Mqu} \\ 0 & \frac{eaK}{1 + Mqu} - \mu \end{bmatrix} \quad (15)$$

Setelah diperoleh matriks jacobian E_2 , akan dicari nilai eigennya dengan $\det(J(E_2) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut:

$$\det \begin{bmatrix} -r - \lambda & -\frac{aK}{1 + Mqu} \\ 0 & \frac{eaK}{1 + Mqu} - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

$$(-r - \lambda) \left(\frac{eaK}{1 + Mqu} - \mu - \lambda \right) = 0$$

$$\lambda_1 = -r \text{ dan } \lambda_2 = \frac{eaK}{1 + Mqu} - \mu$$

Dari kedua nilai eigen, diketahui bahwa $\lambda_1 < 0$ karena dalam konteks biologis parameter r yang merepresentasikan laju pertumbuhan prey selalu bernilai positif. Kemudian λ_2 memiliki dua kemungkinan nilai, yaitu $\lambda_2 < 0 \leftrightarrow \mu > \frac{eaK}{1 + Mqu}$ sehingga kestabilan E_2 merupakan stabil asimtotik dengan jenis titik node. Kemungkinan kedua yaitu $\lambda_2 > 0 \leftrightarrow \mu < \frac{eaK}{1 + Mqu}$ sehingga kestabilan E_2 merupakan tidak stabil dengan jenis titik saddle.

3. Analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan hidup berdampingan

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\delta r K + 2\delta r K Mqu + M^2 q^2 u^2 \delta r K + \mu a K + \mu a K Mqu}{kae^2 + r\delta + 2Mqur\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta}, \frac{earK + earMquK - r\mu - 2r\mu Mqu - M^2 q^2 u^2 \mu r}{kae^2 + r\delta + 2Mqur\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta} \right)$$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $E_3 = (x^*, y^*)$ ke dalam matriks jacobian pada persamaan (12) sehingga diperoleh

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rA}{C} - \frac{arB}{(1+Mqu)C} & -\frac{aKA}{(1+Mqu)} \\ \frac{earB}{(1+Mqu)C} & \frac{eakA}{(1+Mqu)C} - \mu - \frac{2r\delta B}{C} \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \delta r + 2\delta r Mqu + M^2 q^2 u^2 \delta r + \mu a + \mu a Mqu$$

$$B = eaK + eaMquK - \mu - 2\mu Mqu - M^2 q^2 u^2$$

$$C = kea^2 + r\delta + 2Mqur\delta + M^2 q^2 u^2 r\delta$$

Setelah diperoleh matriks jacobian E_3 , akan dicari nilai eigennya dengan $\det(J(E_3) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut:

$$\det \begin{bmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} r - \frac{2rA}{C} - \frac{arB}{(1+Mqu)C} - \lambda & -\frac{aKA}{(1+Mqu)} \\ \frac{earB}{(1+Mqu)C} & \frac{eakA}{(1+Mqu)C} - \mu - \frac{2r\delta B}{C} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Karena nilai eigen dari determinan dari persamaan (18) sulit difaktorkan untuk menegathui nilainya maka kestabilan E_3 menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dari persamaan karakteristiknya dengan tabel *Routh-Hurwitz* yaitu sebagai berikut:

$$\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + (J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}) = 0 \quad (19)$$

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0$$

dengan $a_1 = J_{11} + J_{22}$

$$a_2 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

Tabel 2: Tabel *Routh-Hurwitz* Kestabilan Titik E_3

λ^2	1	a_2	0
λ^1	$-a_1$	0	0
λ^0	$\frac{a_2(-a_1)}{-a_1} = a_2$	0	0

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* kestabilan titik E_3 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika setiap elemen kolom pertama dari Tabel 2 tidak mengalami perubahan tanda, maka bagian real dari nilai eigennya bernilai negatif.

Elemen pertama Tabel 2 adalah 1 yang bernilai positif. Elemen kedua adalah $a_1 = J_{11} + J_{22}$ yang ketika A, B, C disubstitusikan ke J_{11} dan J_{22} diperoleh

$$J_{11} = r - \frac{2rA}{C} - \frac{arB}{(1+Mqu)C}$$

$$= \frac{-r[r\delta(1+Mqu)^3 + \mu a(1+Mqu)^2]}{(1+Mqu)[Kea^2 + r\delta(1+Mqu)^2]}$$

sehingga $J_{11} < 0$ karena faktor yang dikeluarkan dari pembilangnya yaitu $-r$ bernilai negatif dan penyebutnya bernilai positif.

Kemudian

$$J_{22} = \frac{eakA}{(1+Mqu)C} - \mu - \frac{2r\delta B}{C}$$

$$= \frac{r\delta[-eakK(1+Mqu)^2 + \mu(1+Mqu)^2]}{(1+Mqu)[Kea^2 + r\delta(1+Mqu)^2]}$$

Berdasarkan syarat eksis $y^* > 0$ yaitu $eakK > \mu(1+Mqu)$ diperoleh pembilang J_{22} bernilai negatif sedangkan penyebutnya bernilai positif maka $J_{22} < 0$. Sehingga diperoleh $a_1 = J_{11} + J_{22} < 0$ dan $-a_1 > 0$.

Elemen ketiga adalah $a_2 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$ dengan substitusi A, B, C ke $J_{12}J_{21}$ diperoleh

$$J_{12}J_{21} = -\frac{a^2KerAB}{(1+Mqu)^2C^2}$$

dengan $A > 0, C > 0$ dan berdasarkan syarat eksis $y^* > 0$ yaitu $eakK > \mu(1+Mqu)$ diperoleh $B > 0$ sehingga diperoleh $J_{12}J_{21} < 0$.

Karena diperoleh $J_{11} < 0$ dan $J_{22} < 0$ berdasarkan syarat eksis $y^* > 0$ maka $J_{11}J_{22} > 0$ sehingga $a_2 = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} > 0$.

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dilakukan untuk mengonfirmasi hasil analisis secara analitik terhadap titik kesetimbangan dengan melakukan variasi parameter guna mengetahui kondisi eksistensi dan kestabilan asimtotik titik kesetimbangan E_3 , serta pengaruhnya terhadap kestabilan E_2 .

Parameter yang akan divariasi adalah M, q dan u , karena ketiga parameter tersebut merepresentasikan kondisi biologis perlindungan mutualistik yang dialami oleh prey. Dimana parameter M menyatakan

ukuran koloni semut sebagai pelindung mutualistik, parameter q menyatakan kekuatan perlindungan mutualistik terhadap predasi dan parameter u yang menyatakan preferensi perlindungan semut dalam melindungi prey. Dengan nilai parameter yang digunakan sebagai berikut:

Tabel 3: Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Referensi
r	0.1	Revilla & Křivan (2022)
a	0.04	Asumsi
μ	0.05	Revilla & Křivan (2022)
K	50	Revilla & Křivan (2022)
e	0.5	Revilla & Křivan (2022)
δ	0.02	Asumsi

Berikut hasil simulasi numerik dengan variasi parameter yang dikonfirmasi melalui analisis bifurkasi dan diperkuat dengan visualisasi potret fase yaitu sebagai berikut:

Simulasi Numerik Dengan Variasi Parameter M

1. Nilai parameter $M = 65$, $u = 0.888889$ dan $q = 0.3$, dengan parameter u diambil dari Putri dkk (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.0045454481$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eakK = 1 > \mu(1+Mqu) = 0,9166666775$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (49.76599100, 0.2145082790)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.0992644487968238$ dan $\lambda_2 = -0.0045576987931761$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

2. Nilai parameter $M = 71.2$, $u = 0.888889$ dan $q = 0.3$, dengan parameter u diambil dari Putri dkk (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.00003334965$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eaK = 1 > \mu(1 + Mqu) = 0,999333452$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (49.99841096, 0.001587977664)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.0999952312427948$ dan $\lambda_2 = -0.0000333501837651920$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

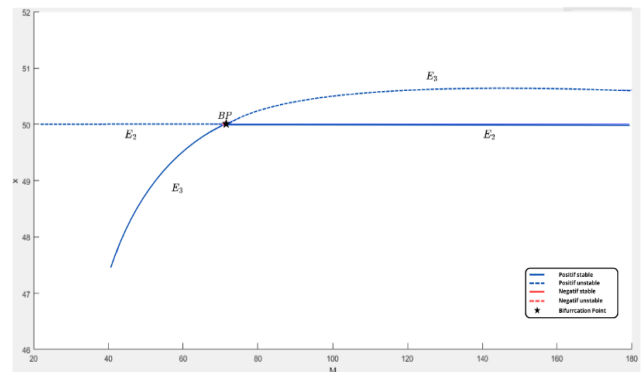
3. Nilai parameter $M = 150$, $u = 0.888889$ dan $q = 0.3$, dengan parameter u diambil dari Putri dkk (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = -0.02560975907$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka kestabilan E_2 bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik node.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* tidak terpenuhi karena $eaK = 1 < \mu(1 + Mqu) = 2.05000025$.

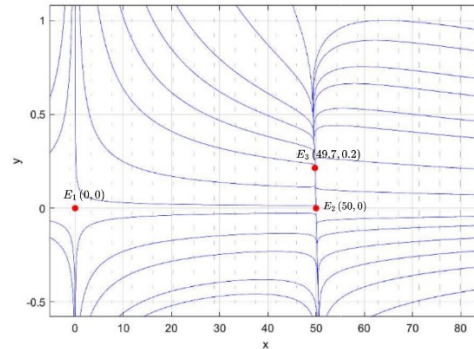
Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (50.61728395, -1.265432249)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.101475002332130$ dan $\lambda_2 = 0.0255490794121297$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_3 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan Mapple2024, dapat dinyatakan dalam diagram bifurkasi untuk variasi parameter M yaitu sebagai berikut:

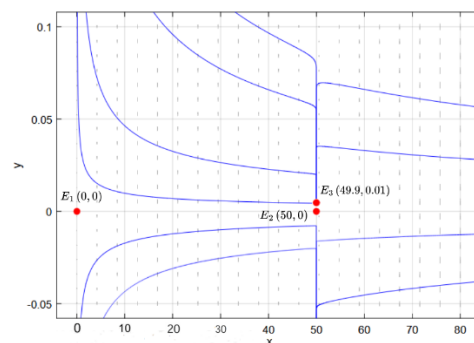


Gambar 1: Diagram Bifurkasi M

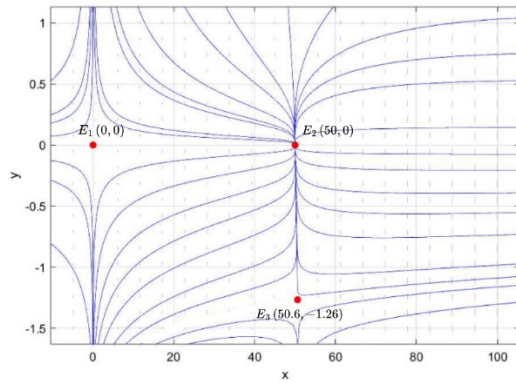
Gambar 1 menunjukkan ditemukan titik cabang (BP) pada $M = 71.2499$ yang menandakan terjadinya bifurkasi *transcritical*, dimana kedua cabang kesetimbangan berpotongan dan saling bertukar kestabilan. Pada titik BP , pertukaran kestabilan terjadi antara E_2 dan E_3 . Pertukaran kestabilan ini dikonfirmasi dengan menggunakan potrait fase sebagai berikut:



(a). Potrait fase Variasi $M = 65$



(b). Potrait fase Variasi $M = 71.2$

(c). Potrait fase Variasi $M = 150$ Gambar 2: Potrait Fase Variasi M

Gambar 2 menunjukkan perubahan potret fase akibat perubahan nilai parameter M . Pada Gambar 2(a), ketika $M < 71.2499$, trajektori pada potret fase bergerak menuju titik kesetimbangan E_3 sehingga E_3 bersifat stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_2 yang menyebabkan E_2 bersifat tidak stabil. Pada Gambar 2(b) saat $M \approx 71.249$, titik kesetimbangan E_2 dan E_3 berada sangat berdekatan sehingga potret fase menunjukkan kondisi kritis yang mengindikasikan terjadinya bifurkasi. Selanjutnya, pada Gambar 2(c) ketika $M > 71.2499$, trajektori pada potret fase berubah menuju E_2 sehingga E_2 menjadi stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_3 yang menyebabkan E_3 menjadi tidak stabil dan menghasilkan nilai predator negatif sehingga tidak memiliki makna biologis.

Simulasi Numerik Dengan Variasi Parameter q

1. Nilai parameter $q = 0.07$, $M = 150$ dan $u = 0.888889$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter u diambil dari Putri, dkk (2023). Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.0467741826$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle. Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eaK = 1 > \mu(1 + Mqu) = 0.103$. Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (46.18755596, 1.969762975)$ dengan nilai eigen

$\lambda_1 = -0.0703670760809704$ dan $\lambda_2 = -0.0614032953090296$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

2. Nilai parameter $q = 0.14$, $M = 150$ dan $u = 0.888889$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter u diambil dari Putri, dkk (2023).

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.0008474516$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eaK = 1 > \mu(1 + Mqu) > 0.19666$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (49.95902788, 0.04028925231)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.0998760326084878$ dan $\lambda_2 = 0.000847808173512149$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

3. Nilai parameter $q = 0.3$, $M = 150$ dan $u = 0.888889$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter u diambil dari Putri, dkk (2023).

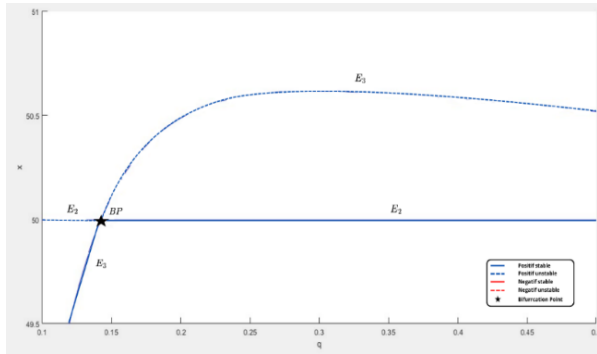
Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = -0.02560975907$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka kestabilan E_2 bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik node.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* tidak terpenuhi karena $eaK = 1 < \mu(1 + Mqu) = 2.05000025$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (50.61728395, -1.265432249)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.101475002332130$ dan $\lambda_2 = 0.0255490794121297$. Karena terdapat nilai

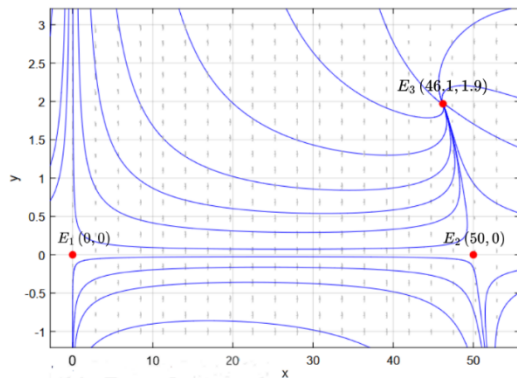
eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_3 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan Mapple2024, dapat dinyatakan dalam diagram bifurkasi untuk variasi parameter q yaitu sebagai berikut:

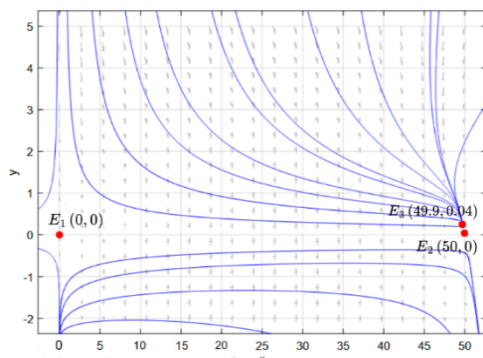


Gambar 3: Diagram Bifurkasi q

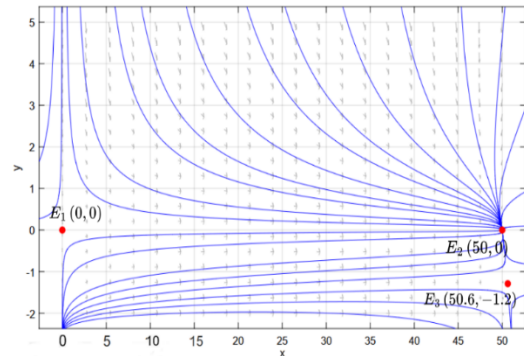
Gambar 3 menunjukkan ditemukan titik cabang (BP) pada $q = 0.1425$ yang menandakan terjadinya bifurkasi *transcritical*, dimana kedua cabang kesetimbangan berpotongan dan saling bertukar kestabilan. Pada titik BP , pertukaran kestabilan terjadi antara E_2 dan E_3 . Pertukaran kestabilan ini dikonfirmasi dengan menggunakan potrait fase sebagai berikut:



(a). Potrait fase Variasi $q = 0.07$



(b). Potrait fase Variasi $q = 0.14$



(c). Potrait fase Variasi $q = 0.3$
Gambar 4: Potrait Fase Variasi q

Gambar 4 menunjukkan perubahan potret fase akibat perubahan nilai parameter q . Pada Gambar 4(a), ketika $q < 0.1425$, trajektori pada potret fase bergerak menuju titik kesetimbangan E_3 sehingga E_3 bersifat stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_2 yang menyebabkan E_2 bersifat tidak stabil. Pada Gambar 4(b) saat $q \approx 0.1424$, titik kesetimbangan E_2 dan E_3 berada sangat berdekatan sehingga potret fase menunjukkan kondisi kritis yang mengindikasikan terjadinya bifurkasi. Selanjutnya, pada Gambar 4(c) ketika $q > 0.1424$, trajektori pada potret fase berubah menuju E_2 sehingga E_2 menjadi stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_3 yang menyebabkan E_3 menjadi tidak stabil dan menghasilkan nilai predator negatif sehingga tidak memiliki makna biologis.

Simulasi Numerik Dengan Variasi Parameter u

1. Nilai parameter $u = 0.25$, $M = 150$ dan $q = 0.3$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.03163265305$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle. Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eaK = 1 > \mu(1 + Mqu) = 0.1125$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (47.72142595, 1.395626607)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.0896960266174421$ dan $\lambda_2 =$

-0.0336593574125579 . Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

2. Nilai parameter $u = 0.4$, $M = 150$ dan $q = 0.3$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = 0.00263157895$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_2 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* terpenuhi yaitu $eaK = 1 > \mu(1 + Mqu) = 0.19$.

Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (49.86876640, 0.1246719161)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.0995956430628245$ dan $\lambda_2 = -0.00263532805117546$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil asimtotik dengan titik node.

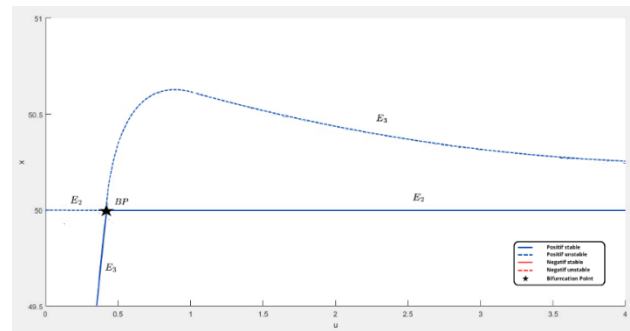
3. Nilai parameter $u = 0.888889$, $M = 150$ dan $q = 0.3$, dengan parameter M diambil dari Revilla & Křivan (2022) sedangkan parameter q merupakan asumsi.

Dengan bantuan Maple 2024 diperoleh titik kesetimbangan kapasitas maksimum populasi prey dan kepunahan predator yaitu $E_2 = (50, 0)$, dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.1$ dan $\lambda_2 = -0.02560975907$. Karena kedua nilai eigen bernilai negatif, maka kestabilan E_2 bersifat stabil asimtotik dengan jenis titik node.

Sedangkan untuk titik kesetimbangan hidup berdampingan, berdasarkan substitusi nilai parameter tersebut dan Tabel 3 diperoleh bahwa syarat eksis y^* tidak terpenuhi karena $eaK = 1 < \mu(1 + Mqu) = 2.05000025$.

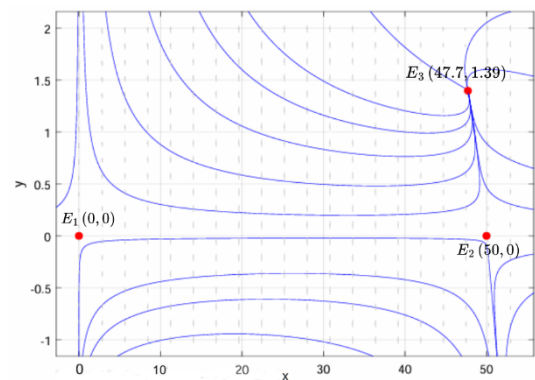
Titik kesetimbangan yang diperoleh $E_3 = (50.61728395, -1.265432249)$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0.101475002332130$ dan $\lambda_2 = 0.0255490794121297$. Karena terdapat nilai eigen yang positif yaitu λ_2 , maka kestabilan E_3 bersifat tidak stabil dengan jenis titik saddle.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan Maple2024, dapat dinyatakan dalam diagram bifurkasi untuk variasi parameter u yaitu sebagai berikut:

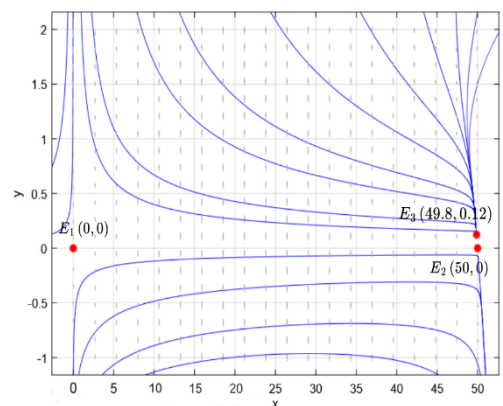


Gambar 5: Diagram Bifurkasi u

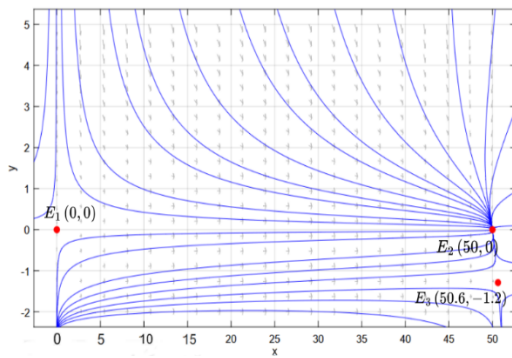
Gambar 5 menunjukkan ditemukan titik cabang (BP) pada $u = 0.4222$ yang menandakan terjadinya bifurkasi *transcritical*, dimana kedua cabang kesetimbangan berpotongan dan saling bertukar kestabilan. Pada titik BP , pertukaran kestabilan terjadi antara E_2 dan E_3 . Pertukaran kestabilan ini dikonfirmasi dengan menggunakan potrait fase sebagai berikut:



(a). Potrait fase Variasi $u = 0.25$



(b). Potrait fase Variasi $u = 0.4$

(c). Potrait fase Variasi $u = 0.888889$ Gambar 6: Potrait Fase Variasi u

Gambar 6 menunjukkan perubahan potret fase akibat perubahan nilai parameter u . Pada Gambar 6(a), ketika $u < 0.4222$, trajektori pada potret fase bergerak menuju titik kesetimbangan E_3 sehingga E_3 bersifat stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_2 yang menyebabkan E_2 bersifat tidak stabil. Pada Gambar 6(b) saat $u \approx 0.4222$, titik kesetimbangan E_2 dan E_3 berada sangat berdekatan sehingga potret fase menunjukkan kondisi kritis yang mengindikasikan terjadinya bifurkasi. Selanjutnya, pada Gambar 6(c) ketika $u > 0.4222$, trajektori pada potret fase berubah menuju E_2 sehingga E_2 menjadi stabil asimtotik, sedangkan trajektori menjauhi E_3 yang menyebabkan E_3 menjadi tidak stabil dan menghasilkan nilai predator negatif sehingga tidak memiliki makna biologis.

Berdasarkan simulasi numerik dan diagram bifurkasi, parameter ukuran koloni semut sebagai pelindung mutualistik M , kekuatan perlindungan mutualistik terhadap predasi q dan preferensi perlindungan semut u mempengaruhi dinamika sistem dan keberadaan kondisi hidup berdampingan. Sistem mengalami bifurkasi *transcritical* pada nilai kritis tertentu. Ketika ada nilai parameter M , q , atau u berada di bawah nilai kritis, sistem stabil pada kondisi hidup berdampingan, sedangkan ketika ketiga parameter berada di atas nilai kritis, tingkat perlindungan mutualistik yang terlalu besar menyebabkan predator mengalami kepunahan.

PENUTUP

SIMPULAN

Penelitian ini menghasilkan konstruksi model predator-prey dengan mutualisme perlindungan pada prey dan kompetisi pada predator berdasarkan

model Lotka-Volterra yang diasumsikan linear. Hasil analisis dinamik menunjukkan adanya tiga titik kesetimbangan yang memenuhi syarat biologis (non-negatif), yaitu titik kesetimbangan kepunahan prey dan predator $E_1 = (0,0)$, titik kapasitas maksimum prey dan kepunahan predator $E_2 = (K,0)$ serta titik hidup berdampingan $E_3 = (x^*, y^*)$. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa kestabilan sistem dapat dipengaruhi oleh parameter ukuran koloni semut M , kekuatan perlindungan mutualistik q dan preferensi perlindungan u .

Hasil simulasi numerik dan diagram bifurkasi menunjukkan terjadinya bifurkasi *transcritical* (branch point) pada titik kritis $M = 71.2499$, $q = 0.1425$ dan $u = 0.4222$, yang ditandai dengan pertukaran kestabilan antara titik kesetimbangan E_2 dan E_3 . Ketika nilai variasi ketiga parameter tersebut berada di atas titik kritis, sistem stabil asimtotik ketika menuju kepunahan predator, sedangkan ketika ada parameter dari ketiga parameter tersebut berada di bawah atau mendekati titik kritis, sistem berada pada kondisi hidup berdampingan secara stabil asimtotik.

SARAN

Pada penelitian ini mengkaji analisis model predator-prey dengan adanya mutualisme perlindungan pada prey mengikuti model Lotka-Volterra yang diasumsikan linear dan kompetisi pada predator. Untuk penelitian selanjutnya, model dapat dikembangkan dengan bentuk rekonstruksi yang berbeda, seperti dengan menambahkan parameter lain atau dengan mengubah nilai parameter untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter terhadap kestabilan dan solusi model.

DAFTAR PUSTAKA

- Aprilia, R., Panjaitan, D. J. (2022). *Pemodelan Matematika*. Medan: LPPM UMNAW.
- Boyce, W.E., dan DiPrima, R. C., (2012). *Elementary Differential equations and Boundary Value Problems (10th Edition)*. USA: John Wiley Sons, Inc.
- Brauer, F., & Castillo-chavez, C. *Texts in Applied Mathematics Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*.
- Campbell, & Haberman, R. (2008). *Introduction to with Dynamical Systems*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540.

- Darmayani. (2021). *Ekologi, Lingkungan Hidup dan Pembangunan*. Paper Knowledge . Toward a Media History of Documents. www.penerbitwidina.com
- LaBonte, J. R. (2011). *Nebria brevicollis* (Fabricius, 1792) in North America, benign or malign? (Coleoptera, Carabidae, Nebriini). *ZooKeys*, 147, 527–543.
<https://doi.org/10.3897/zookeys.147.2119>
- Logan, J. D. (2015). *A First Course in Differential Equations Third Edition*. New York : Springer-Verlag.
- Putri, L. K. M., Savitri, D., Abadi. (2023). *Dynamical Behavior in Predator-prey Model with Mutualistic*. *Jambura J. Biomath*, vol. 4, no. 2, pp. 103–109, 2023,
<https://doi.org/10.37905/jjbm.v4i2.21541>
- Revilla, T. A., & Křivan, V. (2022). *Prey–predator dynamics with adaptive protection mutualism*. *Applied Mathematics and Computation*, 433. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127368>
- Salisbury, A. (2011). *Mathematical Models in Population Dynamics*. New Collage of Florida: Sarasota, FL.
- Strogats, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos (2th Edition)*. New York: Taylor & Francis Group.
- Thomas, C. C., Tillberg, C. V., & Schultz, C. B. (2020). *Facultative mutualism increases survival of an endangered ant-tended butterfly*. *Journal of Insect Conservation*, 24(2), 385–395.
<https://doi.org/10.1007/s10841-020-00218-2>.
- Yoshida, M. (1966). *Mathematical Analysis of Handling*. *Sen'i Gakkaishi*, 22(1). <https://doi.org/10.2115/fiber.22.S11>