

BILANGAN KROMATIK JARAK-2 PADA BEBERAPA KELAS GRAF

Dewi Suciningrum

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : dewi.22056@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: ketutbudayasa@unesa.ac.id*

Abstrak

Pewarnaan graf merupakan salah satu kajian dalam teori graf yang bertujuan memberikan warna pada titik-titik graf dengan aturan tertentu. Salah satu pengembangannya adalah pewarnaan jarak-2, yaitu pewarnaan titik-titik graf sehingga setiap dua titik yang berjarak paling jauh dua memiliki warna yang berbeda. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eksak bilangan kromatik jarak-2 pada beberapa kelas graf, yaitu graf sikel C_n , graf bipartit komplet $K_{m,n}$, graf komplet K_n , graf bayangan $D_2(G)$, dan graf sentral $C(G)$. Penelitian ini merupakan penelitian teoritis dengan pendekatan deduktif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan kromatik jarak-2 pada graf sikel bergantung pada nilai modulo tiga dari banyak titik, pada graf bipartit komplet sebesar jumlah titik pada kedua partisinya, dan pada graf komplet sebesar banyak titiknya. Selain itu, diperoleh hasil untuk graf bayangan dan graf sentral, dengan bilangan kromatik jarak-2 pada graf sentral dari graf komplet sebesar $n + 1$. Disimpulkan bahwa struktur graf sangat mempengaruhi nilai bilangan kromatik jarak-2. Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengkaji kelas graf lainnya.

Kata Kunci: pewarnaan graf, pewarnaan jarak-2, bilangan kromatik, graf bayangan dan graf sentral.

Abstract

Graph coloring is an important topic in graph theory that aims to assign colors to the vertices of a graph under certain constraints. One of its extensions is distance-2 coloring, where vertices are colored such that any two vertices at distance at most two receive different colors. This study aims to determine the exact value of the distance-2 chromatic number for several classes of graphs, namely cycle graphs C_n , complete bipartite graphs $K_{m,n}$, complete graphs K_n , shadow graphs $D_2(G)$, and central graphs $C(G)$. This research is theoretical in nature and employs a deductive approach. The results show that the distance-2 chromatic number of cycle graphs depends on the value of the number of vertices modulo three, that of complete bipartite graphs equals the total number of vertices in both partitions, and that of complete graphs equals the number of vertices. In addition, results are obtained for shadow graphs and central graphs, where the distance-2 chromatic number of the central graph of a complete graph is $n + 1$. It is concluded that the structure of a graph significantly influences the value of the distance-2 chromatic number. Future research is suggested to explore this problem for other classes of graphs.

Keywords: graph coloring, distance-2 coloring, chromatic number, shadow graph, central graph.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang mengkaji struktur hubungan antarobjek melalui representasi himpunan titik dan himpunan sisi.

Salah satu topik dasar dalam teori graf adalah pewarnaan graf, yaitu pemberian warna pada titik-titik graf dengan aturan tertentu. Pada pewarnaan graf standar, dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda. Konsep pewarnaan graf dan bilangan kromatik telah dibahas secara sistematis dalam literatur teori graf (Budayasa, 2007).

Dalam pewarnaan graf, dikenal bilangan kromatik, yaitu banyaknya minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik graf sehingga memenuhi aturan pewarnaan. Penentuan bilangan kromatik suatu graf merupakan permasalahan yang krusial karena dipengaruhi oleh struktur graf.

Seiring dengan perkembangan kajian teoritis, konsep pewarnaan graf diperluas dengan memperhatikan hubungan tidak langsung antar titik. Salah satu perluasan tersebut adalah pewarnaan jarak-2, yaitu pewarnaan graf di mana setiap dua titik yang berjarak paling jauh dua harus

memiliki warna yang berbeda. Konsep pewarnaan jarak-2 dan variasinya diperkenalkan dan dikaji dalam penelitian terdahulu, antara lain (Griggs & Yeh, 1992) serta (Borodin & Ivanova, 2013).

Bilangan kromatik jarak-2 suatu graf, yang dilambangkan dengan $\chi_2(G)$, menyatakan banyaknya minimum warna yang diperlukan untuk melakukan pewarnaan jarak-2 pada graf G . Penentuan nilai bilangan kromatik jarak-2 sangat bergantung pada struktur graf yang ditinjau.

Beberapa kelas graf memiliki karakteristik khusus yang menentukan nilai bilangan kromatik jarak-2, di antaranya graf sikel, graf bipartit komplet, dan graf komplet. Selanjutnya, graf bayangan dan graf sentral merupakan graf hasil konstruksi dari suatu graf G tertentu. Penelitian terdahulu telah mengkaji bilangan kromatik jarak-2 pada graf bayangan dan graf sentralnya, yang menjadi salah satu dasar dalam penelitian ini (Libao & Abarca, 2025). Berdasarkan kajian tersebut, penelitian ini difokuskan pada kajian teoritis bilangan kromatik jarak-2 pada graf sikel, graf bipartit komplet, graf komplet serta graf

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1:

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasang terurut yang terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Himpunan titik $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong, sedangkan himpunan sisi $E(G)$ adalah himpunan berhingga (boleh kosong) dengan setiap sisi merupakan pasang tak terurut titik-titik di $V(G)$.

Misalkan G graf, $u, v \in V(G)$, dan $e = \{u, v\} \in E(G)$. Titik u dan v dikatakan berhubungan langsung (*adjacent*) di graf G apabila terdapat sisi e yang menghubungkan keduanya. Sisi e menghubungkan (*joining*) titik u dan titik v , dan titik u serta v merupakan titik-titik akhir dari sisi tersebut. Selain itu, sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan titik v .

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.2:

Graf G disebut graf sederhana apabila G tidak memuat gelung, yaitu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri dan tidak memuat sisi rangkap.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.3:

Misalkan G adalah graf. Suatu jalan (walk) pada G adalah barisan berhingga $W = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, di mana setiap sisi e_i menghubungkan v_{i-1} dan v_i . Jalan W dikatakan dari v_0 ke v_k , dengan panjang k , yaitu banyaknya sisi yang dilalui.

Jalan W disebut jejak apabila semua sisi $e_1, e_2, \dots, e_k$ saling berbeda, dan disebut lintasan apabila semua titik $v_0, v_1, \dots, v_k$ berbeda. Sirkuit adalah jejak tertutup, yaitu jejak dengan titik awal dan titik akhir yang sama, sedangkan sikel adalah sirkuit yang semua titik internalnya berbeda.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.4:

Graf G dikatakan terhubung apabila untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan dari titik u dan v . Sebaliknya, graf G dikatakan tak terhubung apabila terdapat sepasang titik di G yang tidak memiliki lintasan yang menghubungkan keduanya. Pada graf tak terhubung, jarak antara dua titik u dan v yang tidak memiliki lintasan didefinisikan tak hingga

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.5:

Misalkan G graf dan $v \in V(G)$. Derajat titik v , yang dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi pada graf G yang terkait dengan titik v . Derajat minimum graf G , dilambangkan dengan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$$

Sementara itu, derajat maksimum graf G , yang dilambangkan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.6:

Panjang suatu lintasan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang dilalui dalam lintasan tersebut. Misalkan G graf dan $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v , yang dilambangkan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan titik v di dalam graf G . Apabila tidak terdapat lintasan yang menghubungkan titik u dan v , maka $d(u, v) = \infty$.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.7:

Graf sikel (*cycle graph*) dengan n titik, dilambangkan dengan C_n , adalah graf terhubung

yang memiliki n titik dengan $n \geq 3$ dan n sisi, di mana setiap titik pada graf tersebut berderajat dua.

(Chartrand dan Lesniak, 1986)

Definisi 2.8:

Graf G disebut graf bipartit apabila himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua himpunan A dan B , dengan $A \cap B = \emptyset$, sedemikian sehingga setiap sisi pada graf G menghubungkan sebuah titik di A dengan sebuah titik di B .

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.9:

Graf bipartit komplet, dilambangkan dengan $K_{m,n}$, adalah graf bipartit dengan partisi titik A dan B , dengan $|A| = m$ dan $|B| = n$, sedemikian sehingga setiap titik di A dihubungkan oleh sebuah sisi dengan setiap titik di B .

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.10:

Graf komplet dengan n titik, dilambangkan dengan K_n adalah graf sederhana yang memiliki n titik, di mana setiap dua titik berbeda berhubungan langsung.

(Budayasa, 2007)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1:

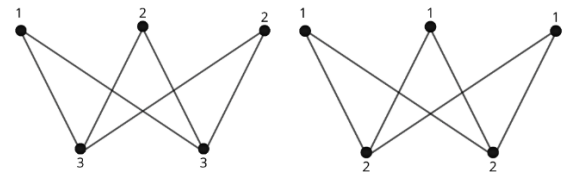
Misalkan G graf. Pewarnaan- k pada graf G adalah pewarnaan titik-titik G dengan k warna sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna berbeda.

Bilangan kromatik G dilambangkan dengan $\chi(G)$ adalah minimum banyaknya warna untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna berbeda.

Contoh 3.1:

Diberikan graf bipartit komplet $K_{3,2}$. Pada Gambar 3.1 (a) ditunjukkan pewarnaan titik pada graf $K_{3,2}$ menggunakan 3 warna, sedangkan pada Gambar 3.1 (b) ditunjukkan pewarnaan titik pada graf $K_{3,2}$ menggunakan 2 warna.

Dari kedua ilustrasi tersebut, didapatkan graf $K_{3,2}$ dapat diwarnai dengan 2 warna sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Selain itu, pewarnaan tidak dapat diwarnai dengan 1 warna karena terdapat sisi yang menghubungkan 2 titik. Dengan demikian, $\chi(K_{3,2}) = 2$.



Gambar 3. 1 (a) pewarnaan-3 Graf $K_{3,2}$; (b) pewarnaan-2 Graf $K_{3,2}$

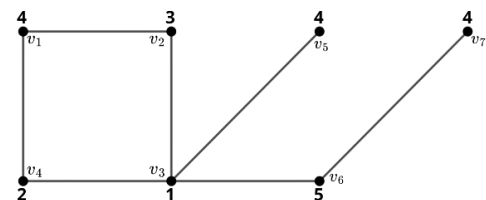
Definisi 3.2:

Misalkan G graf. Pewarnaan jarak-2 pada graf G adalah pewarnaan semua titik G sedemikian hingga $\forall u, v \in V(G)$ dengan $d(u, v) \leq 2$, warna titik u tidak sama dengan warna titik v .

Suatu pewarnaan mempartisi himpunan titik $V(G)$ ke dalam beberapa kelompok berdasarkan warna yang diberikan. Himpunan semua titik G yang mendapatkan warna i , dilambangkan dengan $\mathcal{A}_i$, disebut kelas warna i . Akibatnya, $\forall u, v \in \mathcal{A}_i$, $d(u, v) \geq 3$.

Contoh 3.2:

Perhatikan Gambar 3.2. Suatu Pewarnaan jarak-2 pada graf G dengan kelas warna sebagai berikut $\mathcal{A}_1 = \{v_3\}$, $\mathcal{A}_2 = \{v_4\}$, $\mathcal{A}_3 = \{v_2\}$, $\mathcal{A}_4 = \{v_1, v_5, v_7\}$, $\mathcal{A}_5 = \{v_6\}$.



Gambar 3. 2

Definisi 3.3:

Himpunan kelas warna dari suatu pewarnaan jarak-2 pada graf G dilambangkan dengan $\mathcal{C}$. Bilangan kromatik jarak-2 pada graf G dilambangkan dengan $\chi_2(G)$ dan didefinisikan sebagai

$$\chi_2(G) = \min \{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ adalah himpunan kelas warna dari pewarnaan jarak-2}\}$$

Contoh 3.3:

Perhatikan pewarnaan jarak-2 pada G , pada Gambar 3.2, dalam hal ini himpunan kromatik jarak-2 pada G adalah sebagai berikut.

$\mathcal{C} = \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{v_2\}, \{v_1, v_5, v_7\}, \{v_6\}\}$ dengan $|\mathcal{C}| = 5$.

Lemma 3.1:

Untuk setiap graf G , berlaku

$$\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$$

Bukti:

Misalkan G graf dan $v \in V(G)$ suatu titik dengan derajat maksimum, yaitu $d(v) = \Delta$.

Didefinisikan $N[v] = \{v\} \cup N(v)$, dengan $N(v)$ menyatakan himpunan semua tetangga titik v . $\forall x, y \in N[v] \ d(x, y) \leq 2$.

Maka, dalam pewarnaan jarak-2 semua titik di $N[v]$ harus berwarna berbeda. Karena $|N[v]| = \Delta + 1$, sehingga diperoleh

$$\chi_2(G) \geq \Delta + 1. \blacksquare$$

Teorema 3.2:

Jika C_n sikel dengan n titik maka

$$\chi_2(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 4, & n \not\equiv 0(mod\ 3) \wedge n \neq 5 \\ 5, & n = 5 \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan sikel C_n

$$C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$$

Selanjutnya ditinjau tiga kasus

Kasus 1: $n \equiv 0(mod\ 3)$

Warnai semua titik di C_n sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1, v_4, v_7, \dots, v_{n-2}\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2, v_5, v_8, \dots, v_{n-1}\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3, v_6, v_9, \dots, v_n\}$

Jelas bahwa $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\} \in \mathcal{C}$ dengan $|\mathcal{C}_1| = 3$.
Sehingga berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(C_n) \leq |\mathcal{C}_1| = 3 \quad (3.1)$$

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$\chi_2(C_n) \geq \Delta(C_n) + 1 = 2 + 1 = 3 \quad (3.2)$$

Dari (3.1) dan (3.2), disimpulkan bahwa

$$\chi_2(C_n) = 3. \blacksquare$$

Kasus 2: $n \not\equiv 0(mod\ 3) \wedge n \neq 5$

Selanjutnya dibagi menjadi 2 subkasus.

Subkasus 2.1: $n \equiv 1(mod\ 3)$

Warnai semua titik di C_n sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1, v_4, v_7, \dots, v_{n-3}\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2, v_5, v_8, \dots, v_{n-2}\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3, v_6, v_9, \dots, v_{n-1}\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v_n\}$

Jelas bahwa $\mathcal{C}_2 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\} \in \mathcal{C}$ dengan $|\mathcal{C}_2| = 4$.

Sehingga berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(C_n) \leq |\mathcal{C}_2| = 4 \quad (3.3)$$

Karena $n \equiv 1(mod\ 3)$ maka tidak ada himpunan kromatik jarak-2 $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $|\mathcal{C}_3| < 4$.

Sehingga

$$\chi_2(C_n) \geq 4 \quad (3.4)$$

Dari (3.3) dan (3.4) disimpulkan

$$\chi_2(C_n) = 4. \blacksquare$$

Subkasus 2.2: $n \equiv 2(mod\ 3) \wedge n \neq 5$

Warnai semua titik di C_n sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1, v_5\} \cup \{v_{3i+6} \mid 1 \leq i \leq k-2, k \geq 3\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2, v_6\} \cup \{v_{3i+7} \mid 1 \leq i \leq k-2, k \geq 3\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3, v_7\} \cup \{v_{3i+8} \mid 1 \leq i \leq k-2, k \geq 3\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v_4, v_8\}$

Jelas bahwa $\mathcal{C}_4 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\} \in \mathcal{C}$ dengan $|\mathcal{C}_4| = 4$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(C_n) \leq |\mathcal{C}_4| = 4 \quad (3.5)$$

Karena $n \equiv 2(mod\ 3) \wedge n \neq 5$ maka tidak ada himpunan kromatik jarak-2 $\mathcal{C}_5 \in \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $|\mathcal{C}_5| < 4$.

Sehingga

$$\chi_2(C_n) \geq 4 \quad (3.6)$$

Dari (3.5) dan (3.6) disimpulkan

$$\chi_2(C_n) = 4. \blacksquare$$

Kasus 3: $n = 5$

Warnai semua titik di C_n sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v_4\}$
- (v) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_5$ berwarna 5 dengan $\mathcal{A}_5 = \{v_5\}$

Jelas bahwa $\mathcal{C}_6 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\} \in \mathcal{C}$ dengan $|\mathcal{C}_6| = 5$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(C_n) \leq |\mathcal{C}_6| = 5 \quad (3.7)$$

Karena $n = 5$ maka tidak ada himpunan kromatik jarak-2 $\mathcal{C}_7 \in \mathcal{C}$ sedemikian sehingga $|\mathcal{C}_7| < 5$.

Sehingga

$$\chi_2(C_n) \geq 5 \quad (3.8)$$

Dari (3.7) dan (3.8), disimpulkan bahwa

$$\chi_2(C_n) = 5. \blacksquare$$

Teorema 3.3:

Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet maka

$$\chi_2(K_{m,n}) = m + n$$

Bukti:

Pada graf bipartit komplet $K_{m,n}$, $\forall u, v \in V(K_{m,n})$, $d(u, v) \leq 2$. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 3.2, maka semua titik di $K_{m,n}$ harus berwarna berbeda pada pewarnaan jarak-2. Sehingga, diperlukan tepat $m + n$ warna.

$$\chi_2(K_{m,n}) = m + n. \blacksquare$$

Teorema 3.4:

Jika K_n graf komplet dengan n titik maka

$$\chi_2(K_n) = n$$

Bukti:

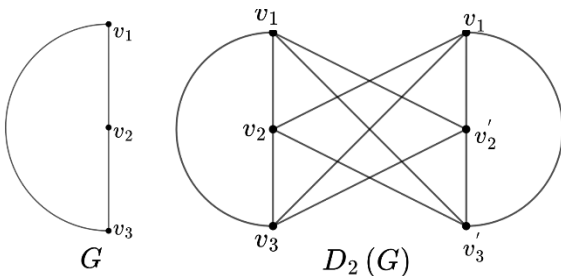
Pada graf komplet K_n , $\forall u, v \in V(K_n)$, berlaku $d(u, v) = 1$, karena $1 \leq 2$, maka berdasarkan Definisi 3.2, semua titik di K_n harus berwarna berbeda. Dengan demikian, diperlukan tepat n warna, sehingga

$$\chi_2(K_n) = n. \blacksquare$$

Definisi 3.4:

Misalkan G sebuah graf. Graf bayangan G dilambangkan dengan $D_2(G)$ adalah graf yang dibentuk dari G dan salinan G yang dilambangkan dengan G' , dan menghubungkan setiap titik $v \in V(G)$ ke setiap titik $u' \in V(G')$, dimana u adalah tetangga dari v di G .

Contoh 3.4:



Gambar 3.3 (a) Graf G ; (b) Graf bayangan G

Lemma 3.5:

Jika C_n graf sikel dengan n titik, $3 \leq n \leq 5$, maka

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 2n$$

Bukti:

Untuk $3 \leq n \leq 5$, berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh

$$\chi_2(C_n) = \begin{cases} 3, & n = 3 \\ 4, & n = 4 \\ 5, & n = 5 \end{cases}$$

Dengan demikian, untuk $3 \leq n \leq 5$ berlaku

$$\chi_2(C_n) = n$$

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dan salinan C_n adalah $C'_n = (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n, v'_1)$

maka $V(D_2(C_n)) = V(C_n) \cup V(C'_n)$ dan $E(D_2(C_n)) = E(C_n) \cup E(C'_n)$ dengan

$$E = \{v_i v'_{i-1}, v_i v'_{i+1} \mid 2 \leq i \leq n-1\} \cup$$

$$\{v_1 v'_2, v_1 v'_n, v_n v'_{n-1}, v_n v'_1\}.$$

Perhatikan bahwa untuk $3 \leq n \leq 5$, maka $\forall u, v \in V(D_2(C_n))$, $d(u, v) \leq 2$. Akibatnya dalam pewarnaan titik jarak-2 semua titik di $D_2(C_n)$ diwarnai dengan warna berbeda.

Karena $|V(D_2(C_n))| = 2n$, maka

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 2n. \blacksquare$$

Lemma 3.6:

Jika C_n graf sikel dengan n titik, $n \equiv 0(mod 3)$

dan $n \geq 6$, maka

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 6$$

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dan salinan C_n adalah $C'_n = (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n, v'_1)$. Selanjutnya, warnai semua titik-titik di $D_2(C_n)$ sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_{3i-2} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_{3i-1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_{3i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v'_{3i-2} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$
- (v) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_5$ berwarna 5 dengan $\mathcal{A}_5 = \{v'_{3i-1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$
- (vi) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_6$ berwarna 6 dengan $\mathcal{A}_6 = \{v'_{3i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$

Jelas bahwa himpunan $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6\}$ adalah sebuah partisi dari $V(D_2(C_n))$.

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{A}_i &= \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}, v'_{3i-2}, v'_{3i-1}, v'_{3i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\} \\ &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v'_1, v'_2, v'_3, v'_n, v'_1\} \\ &= V(D_2(C_n)) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa, $\forall 1 \leq i \leq 6$,

$\forall (u, v) \in \mathcal{A}_i, d(u, v) = 3$. Akibatnya pewarnaan titik di $D_2(C_n)$ merupakan pewarnaan jarak-2 pada $D_2(C_n)$. Berdasarkan Definisi 3.2

$$\chi_2(D_2(C_n)) \leq 6 \quad (3.9)$$

Misalkan $\chi_2(D_2(C_n)) < 6$. Misalkan kelas warna yang diberikan pada titik v'_{3i} adalah kelas warna di $\mathcal{A}_1$. Maka $d(v_{3i-2}, v'_{3i}) = 2$ akibatnya warna di titik v'_{3i-2} dan v'_{3i} harus berbeda. Hal ini menimbulkan kontradiksi.

Sehingga

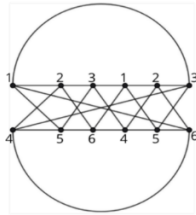
$$\chi_2(D_2(C_n)) \geq 6 \quad (3.10)$$

Dari (3.9) dan (3.10) disimpulkan

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 6. \blacksquare$$

Contoh 3.4:

Sebuah pewarnaan jarak-2 pada graf $D_2(C_6)$ dengan banyak warna minimum 6, ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3. 3 $\chi_2(D_2(C_6)) = 6$

Lemma 3.7:

Jika C_n graf sikel dengan n titik, $n \equiv 1(mod 3)$ dan $n \geq 6$, maka

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 7$$

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dan salinan C_n adalah $C'_n = (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n, v'_1)$. Selanjutnya, warnai semua titik-titik di $D_2(C_n)$ sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_{3i-2} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_{3i-1} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_{3i} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v_n\} \cup \{v_{3i} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\}$
- (v) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_5$ berwarna 5 dengan $\mathcal{A}_5 = \{v'_{3i+1} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (vi) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_6$ berwarna 6 dengan $\mathcal{A}_6 = \{v'_{3i+2} \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1\} \cup \{v'_1\}$
- (vii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_7$ berwarna 7 dengan $\mathcal{A}_7 = \{v'_2 \cup v'_{n-1}\}$

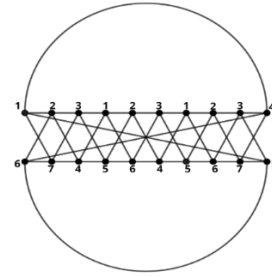
Jelas bahwa

$$\bigcup_{i=1}^7 \mathcal{A}_i = V(D_2(C_n)),$$

Ini berarti $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7\}$ sebuah partisi dari $V(D_2(C_n))$, karena setiap titik di $V(D_2(C_n))$ tepat berada pada satu kelas warna. Selanjutnya perhatikan bahwa, untuk $1 \leq i \leq 7, \forall u, v \in \mathcal{A}_i, d_G(u, v) \geq 3$ berarti pewarnaan diatas adalah sebuah pewarnaan jarak-2 pada G . Sehingga lemma terbukti. ■

Contoh 3.5:

Sebuah pewarnaan jarak-2 pada graf $D_2(C_{10})$ dengan banyak warna minimum 7, ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3. 4 $\chi_2(D_2(C_{10})) = 7$

Lemma 3.8:

Jika C_n graf sikel dengan n titik, $n \equiv 2(mod 3)$ dan $n \geq 6$, maka

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 8$$

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ dan salinan C_n adalah $C'_n = (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n, v'_1)$. Selanjutnya, warnai semua titik-titik di $D_2(C_n)$ sedemikian sehingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1, v_5\} \cup \{v_{3i} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2, v_6\} \cup \{v_{3i+1} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3, v_7\} \cup \{v_{3i+2} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (iv) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_4$ berwarna 4 dengan $\mathcal{A}_4 = \{v_4, v_8\}$
- (v) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_5$ berwarna 5 dengan $\mathcal{A}_5 = \{v'_1, v'_5\} \cup \{v'_{3i} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (vi) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_6$ berwarna 6 dengan $\mathcal{A}_6 = \{v'_2, v'_6\} \cup \{v'_{3i+1} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (vii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_7$ berwarna 7 dengan $\mathcal{A}_7 = \{v'_3, v'_7\} \cup \{v'_{3i+2} \mid 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\}$
- (viii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_8$ berwarna 8 dengan $\mathcal{A}_8 = \{v'_4, v'_8\}$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8\}$ sebuah partisi dari

$V(D_2(C_n))$. Karena $n \equiv 2(mod 3)$ dan $n \geq 6$, maka

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor = \frac{n-2}{3}$$

Perhatikan bahwa

$$\mathcal{A}_1 = \{v_1, v_5\} \cup \{v_9, v_{12}, \dots, v_{n-2}\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_1| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{v_2, v_6\} \cup \{v_{10}, v_{13}, \dots, v_{n-1}\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_2| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{v_3, v_7\} \cup \{v_{11}, v_{14}, \dots, v_n\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_3| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{v_4, v_8\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_4| = 2$$

$$\mathcal{A}_5 = \{v'_1, v'_5\} \cup \{v'_9, v'_{12}, \dots, v'_{n-2}\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_5| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{v'_2, v'_6\} \cup \{v'_{10}, v'_{13}, \dots, v'_{n-1}\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_6| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_7 = \{v'_3, v'_7\} \cup \{v'_{11}, v'_{14}, \dots, v'_n\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_7| = \frac{n-2}{3}$$

$$\mathcal{A}_8 = \{v'_4, v'_8\}, \text{ dengan } |\mathcal{A}_8| = 2$$

Jelas bahwa

$$\bigcup_{i=1}^8 \mathcal{A}_i = V(D_2(C_n))$$

dan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^8 |\mathcal{A}_i| &= \sum_{i=1}^3 |\mathcal{A}_i| + |\mathcal{A}_4| + \sum_{i=5}^7 |\mathcal{A}_i| + |\mathcal{A}_8| \\ &= 3 \left(\frac{n-2}{3} \right) + 2 + \end{aligned}$$

$$3 \left(\frac{n-2}{3} \right) + 2$$

$$= 6 \left(\frac{n-2}{3} \right) + 4$$

$$= 2n = |V(D_2(C_n))|$$

Ini berarti $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8\}$ sebuah partisi dari $V(D_2(C_n))$, karena setiap titik di $V(D_2(C_n))$ tepat berada pada satu kelas warna. Selanjutnya perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq 8, \forall u, v \in \mathcal{A}_i, d_G(u, v) \geq 3$. Berdasarkan Definisi 3.2 pewarnaan tersebut adalah sebuah pewarnaan jarak-2 pada G dengan 8 warna. Dengan demikian,

$$\chi_2(D_2(C_n)) \leq 8 \quad (3.11)$$

Misalkan $\chi_2(D_2(C_n)) < 8$ maka tidak ada kelas warna 8. Ini berarti $v'_4 \vee v'_8$ harus terletak di salah satu kelas warna $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7$.

Misalkan titik v'_8 terletak pada kelas $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \mathcal{A}_8\}$ akan diperoleh kontradiksi. Sehingga

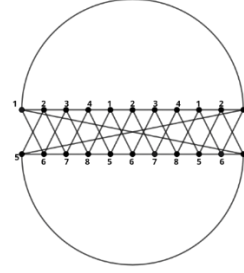
$$\chi_2(D_2(C_n)) \geq 8 \quad (3.12)$$

Berdasarkan (3.11) dan (3.12) disimpulkan

$$\chi_2(D_2(C_n)) = 8. \blacksquare$$

Contoh 3.6:

Sebuah pewarnaan jarak-2 pada graf $D_2(C_{11})$ dengan banyak warna minimum 8, ditunjukkan pada Gambar 3.5.



Gambar 3. 5 $\chi_2(D_2(C_{11})) = 8$

Berdasarkan Lemma 3.5 sampai Lemma 3.8, diperoleh hasil umum mengenai bilangan kromatik jarak-2 pada graf bayangan dari graf siklus C_n .

Teorema 3.9:

$$\chi_2(D_2(C_n)) = \begin{cases} 2n, & 3 \leq n \leq 5 \\ 6, & n \equiv 0 (mod 3), n \geq 6 \\ 7, & n \equiv 1 (mod 3), n \geq 6 \\ 8, & n \equiv 2 (mod 3), n \geq 6 \end{cases}$$

Teorema 3.10

Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet, maka

$$\chi_2(D_2(K_{m,n})) = 2(m+n)$$

Bukti:

Misalkan A dan B bipartisi dari $K_{m,n}$ dengan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Misalkan A' dan B' adalah salinan A dan B , dengan $A' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\}$ dan $B' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\}$. Selanjutnya, perhatikan bahwa dalam graf $G = D_2(K_{m,n})$, diperoleh:

- 1) $\forall u \in A \cup A'$ dan $v \in B \cup B', uv \in E(G)$;
- 2) $\forall u \in A \cup A', u \neq v, uv \notin E(G)$;
- 3) $\forall v \in B \cup B', u \neq v, uv \notin E(G)$.

Sehingga G graf bipartit komplet dengan bipartisi $A \cup A'$ dan $B \cup B'$. Karena $|A \cup A'| = |A| + |A'| = m + m = 2m$ dan $|B \cup B'| = |B| + |B'| = n + n = 2n$, maka

$$G \cong K_{2m, 2n}$$

Akibatnya, $\forall u, v \in V(G), d_G(u, v) \leq 2$. Sehingga, dalam pewarnaan titik jarak-2 pada G , semua titik G memperoleh warna yang berbeda.

Perhatikan bahwa,

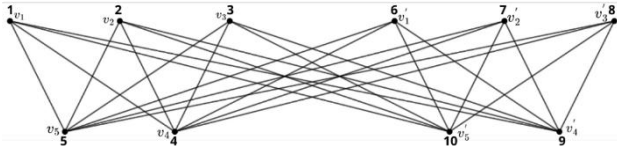
$$\begin{aligned} |V(G)| &= |V(D_2(K_{m,n}))| \\ &= |V(K_{2m, 2n})| \\ &= 2m + 2n \\ &= 2(m+n) \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \chi_2(G) &= \chi_2(D_2(K_{m,n})) \\ &= 2(m+n). \blacksquare \end{aligned}$$

Contoh 3.7:

Sebuah pewarnaan jarak-2 pada graf $D_2(K_{3,2})$ dengan banyak warna minimum 10, ditunjukkan pada Gambar 3.6.

Gambar 3. $6\chi_2(D_2(K_{3,2})) = 10$ **Teorema 3.11:**

Jika K_n graf lengkap dengan n titik, maka

$$\chi_2(D_2(K_n)) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:**Kasus 1:** $n = 1$

Dalam hal ini, graf bayangan K_1 berupa graf kosong dengan 2 titik. Dalam pewarnaan jarak-2 kedua titik tersebut boleh terletak pada kelas warna yang sama. Sehingga, jelas kedua titik tersebut boleh terletak pada kelas warna yang sama. Sehingga, jelas bahwa $\chi_2(D_2(K_1)) = 1$.

Kasus 2: $n \geq 2$

Misalkan

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} = A$$

Duplikat $V(K_n)$ adalah

$$V(K'_n) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\} = A'$$

Perhatikan bahwa, dalam graf $G = D_2(K_n)$, diperoleh: $\forall i, 1 \leq i \leq n$,

- (1) $v_i v_j \in E(G), \forall j, j \neq i, 1 \leq j \leq n$;
- (2) $v_i v'_j \in E(G), \forall j, j \neq i, 1 \leq j \leq n$;
- (3) $v'_i v'_j \in E(G), \forall j, j \neq i, 1 \leq j \leq n$.

Dari (1), (2), dan (3) diperoleh

$$\forall u, v \in V(G), d_G(u, v) \leq 2.$$

Sehingga, dalam pewarnaan jarak-2 pada G , semua titik G harus memperoleh warna berbeda. Akibatnya,

$$\chi_2(G) = |V(G)| \quad (3.13)$$

Karena

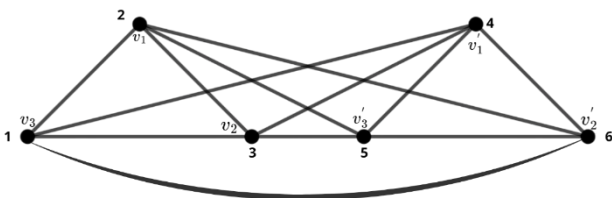
$$|V(G)| = |V(D_2(K_n))| = 2n \quad (3.14)$$

Maka (3.13) dan (3.14) disimpulkan

$$\chi_2(D_2(K_n)) = 2n. \blacksquare$$

Contoh 3.8:

Sebuah pewarnaan jarak-2 pada graf $D_2(K_3)$ dengan banyak warna minimum 6, ditunjukkan pada Gambar 3.7.

Gambar 3. $7\chi_2(D_2(K_3)) = 6$ **Definisi 3.5:**

Misalkan G sebuah graf. Graf sentral dari G dilambangkan dengan $C(G)$ adalah graf yang diperoleh dari menyisipkan (mensubdivisi) tepat satu titik di setiap sisi G dan menghubungkan dengan sebuah sisi setiap dua titik yang tidak berhubungan langsung di G . Selanjutnya titik yang disisipkan disebut titik sentral, dinotasikan dengan c .

Lemma 3.12:

Jika G graf dengan n titik dan m sisi dan graf sentral G adalah $C(G)$, maka

$$|V(C(G))| = n + m \quad \text{dan} \quad |E(C(G))| = \frac{n^2 - n + 2m}{2}$$

Bukti:

Dari Definisi 3.5,

$$\begin{aligned} |V(C(G))| &= |V(G)| + |E(G)| \\ &= n + m \end{aligned}$$

Setiap menyisipkan tepat satu titik pada setiap sisi, maka menambahkan satu sisi baru, sedangkan banyaknya pasang titik yang tidak berhubungan langsung di G adalah

$$\binom{n}{2} - |E(G)| = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

akibatnya

$$\begin{aligned} |E(C(G))| &= 2|E(G)| + \left\{ \binom{n}{2} - |E(G)| \right\} \\ &= 2m + \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - m \right\} \\ &= m + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2m}{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.13:

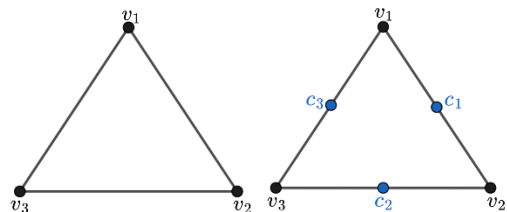
Jika G adalah C_n sikel dengan n titik dan $n \geq 3$ maka

$$\chi_2(C(C_n)) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 3 \\ n + 2, & \text{jika } n \text{ genap}, n \geq 4 \\ n + 3, & \text{jika } n \text{ ganjil}, n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti: Kita akan tinjau 3 kasus

Kasus 1: $n = 3$

Perhatikan graf C_3 dan $C(C_3)$ pada gambar berikut.

Gambar 3. 8 (a) graf C_3 dan (b) graf $C(C_3)$

Perhatikan bahwa $C(C_3)$ adalah C_6 .

Misalkan $G = C(C_3)$. Warnai semua titik G sedemikian hingga

- (i) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_1$ berwarna 1 dengan $\mathcal{A}_1 = \{v_1, c_2\}$
- (ii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_2$ berwarna 2 dengan $\mathcal{A}_2 = \{v_2, c_3\}$
- (iii) semua titik di himpunan $\mathcal{A}_3$ berwarna 3 dengan $\mathcal{A}_3 = \{v_3, c_1\}$

Jelas $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$ sebuah partisi dari $V(G)$, karena setiap titik. Sehingga pewarnaan tersebut adalah pewarnaan jarak-2 pada G dengan menggunakan sebanyak 3 warna. Karena tidak ada pewarnaan jarak-2 dengan menggunakan 2 warna maka dapat disimpulkan

$$\chi_2(G) = \chi_2(C_3) = 3. \blacksquare$$

Kasus 2: $n \geq 4$

Misalkan

$$C_n = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1) \\ V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V_1$$

dan

$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} = e_i / 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} = e_n$
 Karena $|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$, berdasarkan Lemma 3.12 $|V(C(C_n))| = n + n = 2n$.

Misalkan $\forall i, 1 \leq i \leq n$, titik sentral c_i terletak di sisi e_i . Misalkan $G = C(C_n)$, maka

$$V(G) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} = V_1 \cup V_2 \quad \text{dengan} \quad V_2 = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}.$$

Perhatikan bahwa, $\forall x, y \in V_1, d_G(x, y) \leq 2$, sehingga berdasarkan Definisi 3.2, warna x dan warna y di graf G harus berbeda. Dengan kata lain, dalam pewarnaan jarak-2 pada G , semua titik pada V_1 harus terletak dalam kelas-kelas warna berbeda. Misal $\mathcal{A}_i = \{v_i\}, 1 \leq i \leq n$. Kita tinjau 2 kasus, yaitu n genap $\vee n$ ganjil.

Sub Kasus 2.1: n genap

Misal A dan B sebuah partisi dari V_2 dengan $A = \{c_1, c_3, c_5, \dots, c_{n-1}\}$ dan $B = \{c_2, c_4, c_6, \dots, c_n\}$. Perhatikan bahwa $\forall x, y \in A, d_G(x, y) \geq 3$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2 dalam pewarnaan-2 pada G , titik x dan y boleh mendapat warna yang sama. Jadi semua titik di A terletak pada kelas warna yang sama, katakan kelas warna $\mathcal{A}_{n+1}$. Perhatikan kelas warna ini harus berbeda dengan kelas warna $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$, karena $\forall i, c_i \in A$, berhubungan langsung dengan v_i dan v_{i+1} di graf G .

Begitu juga $\forall w, z \in B, d_G(w, z) \geq 3$. Maka semua titik di B boleh terletak pada kelas warna yang sama, katakan kelas warna $\mathcal{A}_{n+2}$. Perhatikan kelas warna

$\mathcal{A}_{n+2}$ harus berbeda dengan kelas warna $\mathcal{A}_{n+1}$ dan $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$.

Jelas bahwa

$$\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i = V(G)$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n+2} |\mathcal{A}_i| = \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}_i| + |\mathcal{A}_{n+1}| + |\mathcal{A}_{n+2}| \\ = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ = 2n = |V(G)|.$$

Jelas $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n+2}\}$ sebuah partisi dari $V(G)$, karena setiap titik di $V(G)$ tepat berada pada satu kelas warna. Sehingga pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan jarak-2 pada G . Dengan menggunakan $n + 2$ warna. Berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(G) = \chi_2(C(C_n)) \leq n + 2 \quad (3.15)$$

Misalkan $\chi_2(G) < n + 2$ maka tidak ada kelas warna $\mathcal{A}_{n+2}$. Maka titik $c_2 \in \mathcal{A}_i$, untuk i , dengan $1 \leq i \leq n + 1$. Jika $1 \leq i \leq n$ maka $d_G(c_1, c_2) = 2$, kontradiksi. Jadi

$$\chi_2(G) \geq n + 2 \quad (3.16)$$

Dari (3.15) dan (3.16) disimpulkan

$$\chi_2(G) = n + 2. \blacksquare$$

Sub Kasus 2.2: n ganjil

Misal A, B , dan C sebuah partisi dari V_2 dengan $A = \{c_1, c_3, c_5, \dots, c_{n-2}\}$, $B = \{c_2, c_4, c_6, \dots, c_{n-1}\}$, dan $C = \{c_n\}$

Perhatikan bahwa $\forall x, y \in A, d_G(x, y) \geq 3$. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2 dalam pewarnaan-2 pada G , titik x dan y boleh mendapat warna yang sama. Jadi semua titik di A terletak pada kelas warna yang sama, katakan kelas warna $\mathcal{A}_{n+1}$. Perhatikan kelas warna ini harus berbeda dengan kelas warna $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$, karena $\forall i, c_i \in A$, berhubungan langsung dengan v_i dan v_{i+1} di graf G . Begitu juga $\forall w, z \in B, d_G(w, z) \geq 3$. Maka semua titik di B boleh terletak pada kelas warna yang sama, katakan kelas warna $\mathcal{A}_{n+2}$. Perhatikan kelas warna $\mathcal{A}_{n+2}$ harus berbeda dengan kelas warna $\mathcal{A}_{n+1}$ dan $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$.

Jika $c_n \in \mathcal{A}_{n+1}$ maka $d_G(c_n, c_1) = 2$, berarti warna c_n tidak boleh berwarna $n + 1$.

Jika $c_n \in \mathcal{A}_{n+2}$ maka $d_G(c_n, c_{n-1}) = 2$, berarti warna c_n tidak boleh berwarna $n + 2$.

Karena $\forall i, 1 \leq i \leq n$, dengan $d_G(c_n, v_i) \leq 2$ maka warna c_n harus berbeda dengan warna $i, 1 \leq i \leq n$. Akibatnya c_n harus diwarnai dengan warna $n + 3$.

Jelas bahwa

$$\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i = V(G)$$

dan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+3} |\mathcal{A}_i| &= \sum_{i=1}^n |\mathcal{A}_i| + |\mathcal{A}_{n+1}| + |\mathcal{A}_{n+2}| + |\mathcal{A}_{n+3}| \\ &= n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 \\ &= 2n = |V(G)|. \end{aligned}$$

Ini berarti $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n+3}\}$ sebuah partisi dari $V(G)$, karena setiap titik di $V(G)$, tepat berada pada satu kelas warna. Sehingga pewarnaan tersebut merupakan pewarnaan jarak-2 pada G . Dengan menggunakan $n + 3$ warna. Berdasarkan Definisi 3.3

$$\chi_2(G) = \chi_2(C(C_n)) \leq n + 3 \quad (3.17)$$

Andaikan $\chi_2(G) < n + 3$ maka tidak ada kelas warna $\mathcal{A}_{n+3}$. Tadi sudah disebutkan bahwa jika c_n terletak pada kelas warna yang lain terjadi kontradiksi. Sehingga

$$\chi_2(G) \geq n + 3 \quad (3.18)$$

Dari (3.17) dan (3.18) disimpulkan

$$\chi_2(G) = n + 3. \blacksquare$$

Teorema 3.14:

Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet dan $m \geq n$, maka

$$\chi_2(C(K_{m,n})) = 2m + n$$

Bukti:

Misalkan A dan B adalah bipartisi $K_{m,n}$ dengan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dan $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Pada graf $G = C(K_{m,n})$, titik sentral pada sisi $y_i x_j$ dilambangkan dengan c_{ij} , $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq m$.

Misalkan $S = \{c_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Perhatikan bahwa

$$V(G) = A \cup B \cup S$$

dan

$$E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

dengan

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x_k x_l \mid k \neq l, 1 \leq k, l \leq m\}, \\ E_2 &= \{y_k y_l \mid k \neq l, 1 \leq k, l \leq n\}, \end{aligned}$$

dan

$$E_3 = \{y_i c_{ij} c_{ij} x_j \mid 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}.$$

Misalkan G_1 subgraf G dengan

$$V(G_1) = A \cup B \cup S_1$$

dengan

$$S_1 = \{c_{1j} \mid 1 \leq j \leq m\};$$

dan

$$E(G_1) = E_1 \cup E_2 \cup E_3^{(1)}$$

dengan

$$E_3^{(1)} = \{y_1 c_{1j}, c_{1j} x_j \mid 1 \leq j \leq m\}$$

Jelas bahwa

$$\begin{aligned} |V(G_1)| &= |A| + |B| + |S_1| \\ &= m + n + m \\ &= 2m + n \end{aligned}$$

Karena $\forall u, v \in V(G_1), d_{G_1}(u, v) \leq 2$, maka berdasarkan Definisi 3.2, setiap dua titik pada $V(G_1)$ harus diberi warna yang berbeda dalam pewarnaan jarak-2. Dengan demikian, semua titik pada G_1 harus memiliki warna yang berbeda. Akibatnya,

$$\chi_2(G) \geq 2m + n \quad (3.19)$$

Selanjutnya, konstruksi pewarnaan jarak-2 pada graf G dengan $2m + n$ warna sebagai berikut:

$$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2m + n\}$$

Sedemikian hingga,

$$(i) \quad \forall i, 1 \leq i \leq m, x_i \in A,$$

$$f(x_i) = i$$

$$(ii) \quad \forall j, 1 \leq j \leq n, y_j \in B,$$

$$f(y_j) = m + j$$

$$(iii) \quad \forall i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, c_{ij} \in S_1$$

$$f(c_{ij}) =$$

$$\begin{cases} m + n + i + j - 1, & i + j \leq m + 1 \\ n + i + j - 1, & i + j \geq m + 2 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa, $\forall u, v \in V(G)$, dengan $d(u, v) \leq 2$, $f(u) \neq f(v)$.

Dari (i), diperoleh m kelas warna, untuk mewarnai semua titik G di A , yaitu

$$A_i = \{x_i\}, \quad 1 \leq i \leq m$$

Dari (ii), diperoleh n kelas warna, untuk mewarnai semua titik G di B , yaitu

$$A_{m+i} = \{y_i\}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Dari (iii), diperoleh m kelas warna, untuk mewarnai titik-titik sentral G , yaitu

$$A_{m+n+i} = \{c_{1i}, c_{2,i-1}, c_{3,m+i-2}, \dots, c_{n,m-n+i+1}\}$$

Total seluruh warna adalah

$$m + n + m = 2m + n$$

Jelas bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{i=m+1}^{m+n} |A_i| + \sum_{i=1}^m |A_{m+n+i}| &= m + n + mn \\ &= |V(G)| \end{aligned}$$

Jadi f adalah sebuah pewarnaan jarak-2 pada G , dengan $2m + n$ warna. Akibatnya

$$\chi_2(G) \leq 2m + n \quad (3.20)$$

Dari (3.19) dan (3.20), disimpulkan

$$\chi_2(G) = 2m + n. \blacksquare$$

Teorema 3.15:

Jika K_n graf komplet dengan n titik, maka

$$\chi_2(C(K_n)) = n + 1$$

Bukti:

Misalkan $G = K_n$ adalah graf komplet dengan himpunan titik

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Graf sentral dari G dinotasikan dengan $C(K_n)$, diperoleh dengan:

- 1) Menyisipkan satu titik sentral $c_{i,j}$ pada setiap sisi $v_i v_j$,
- 2) Menghubungkan setiap dua titik yang tidak berhubungan langsung di K_n .

Karena K_n memiliki $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi, maka terdapat $\frac{n(n-1)}{2}$ titik sentral.

Pembuktian dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: n genap

Misalkan n genap. Akan dibentuk $n + 1$ kelas warna dengan kardinalitas sama. Misalkan masing-masing kelas berukuran k . Karena

$$|V(C(K_n))| = \frac{n(n+1)}{2}$$

maka berlaku

$$(n+1)k = \frac{n(n+1)}{2}$$

sehingga diperoleh

$$k = \frac{n}{2}$$

karena n genap, maka k merupakan bilangan bulat.

Selanjutnya, akan dikonstruksi suatu pewarnaan jarak-2 pada $C(K_n)$ dengan menggunakan tepat $n + 1$ warna. Misalkan k adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga kelas-kelas warna yang akan dibentuk memiliki kardinalitas yang sama.

Definisikan kelas-kelas warna sebagai berikut:

$$\mathcal{A}_1 = \{v_1, c_{2,3}, c_{n,n-2}, c_{n-1,n-4}, \dots, c_{n-k+3,n-2k+4}\} \\ \text{dengan } |\mathcal{A}_1| = k$$

$$\mathcal{A}_2 = \{v_2, c_{3,4}, c_{1,n-1}, c_{n,n-3}, \dots, c_{n-k+4,n-k+1}\} \text{ dengan } |\mathcal{A}_2| = k$$

:

$$\mathcal{A}_n = \{v_n, c_{1,2}, c_{n-1,n-3}, c_{n-2,n-4}, \dots, c_{n-k+2,n-k}\} \\ \text{dengan } |\mathcal{A}_n| = k$$

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{c_{1,k+1}, c_{2,k+2}, \dots, c_{k,2k}\} \text{ dengan } |\mathcal{A}_{n+1}| = k$$

Ini berarti $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}\}$ sebuah partisi dari $V(C(K_n))$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap kelas warna $\mathcal{A}_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n + 1$, merupakan himpunan titik-titik yang berjarak lebih dari dua pada graf sentral $C(K_n)$.

Untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, kelas warna $\mathcal{A}_i$ memuat tepat satu titik v_i . Selanjutnya, titik sentral $c_{i,j}$ yang berada dalam kelas warna yang sama dipilih sedemikian sehingga tidak memiliki titik ujung yang sama. Dengan demikian, jarak antara setiap dua titik

sentral dalam satu kelas warna berjarak lebih dari dua. Oleh karena itu, setiap kelas warna $\mathcal{A}_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n + 1$, merupakan himpunan titik-titik yang berjarak lebih dari dua pada graf sentral $C(K_n)$.

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 3.2, pewarnaan yang dihasilkan merupakan pewarnaan jarak-2 pada graf sentral $C(K_n)$ dengan menggunakan $n + 1$ warna. Hal ini menunjukkan bahwa

$$\chi_2(C(K_n)) \leq n + 1 \quad (3.21)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pewarnaan jarak-2 pada $C(K_n)$ tidak dapat dilakukan dengan kurang dari $n + 1$ warna. Untuk setiap dua titik asli v_i dan v_j dengan $i \neq j$, sisi $v_i v_j$ pada K_n telah disubdivisi oleh titik $c_{i,j}$, sehingga pada $C(K_n)$ berlaku $d(v_i, v_j) = 2$. Berdasarkan Definisi 3.2 semua titik harus diberi warna yang berbeda. Selain itu, setiap titik $c_{i,j}$ berjarak paling jauh dua terhadap dua titik $v_i v_j$ sehingga tidak dapat menggunakan warna yang sama. Sehingga

$$\chi_2(C(K_n)) \geq n + 1 \quad (3.22)$$

Dari (3.21) dan (3.22) disimpulkan

$$\chi_2(C(K_n)) = n + 1. \blacksquare$$

Kasus 2: n ganjil

Konstruksi pewarnaan untuk n ganjil diperoleh dengan memperluas konstruksi pada kasus n genap. Misalkan n ganjil. Perhatikan bahwa graf K_n dapat diperoleh dari graf K_{n-1} dengan menambahkan satu titik baru v_n dan menghubungkannya dengan seluruh titik yang telah ada pada graf K_{n-1} .

Pada graf sentralnya, penambahan tersebut mengakibatkan munculnya satu titik asli baru dan sejumlah titik sentral baru pada sisi-sisi yang ditambahkan.

Karena untuk K_{n-1} telah berlaku

$$\chi_2(C(K_{n-1})) = n,$$

maka pada graf $C(K_n)$:

- Titik baru v_n berjarak paling jauh dua terhadap seluruh titik pada $C(K_n)$
- Titik-titik sentral yang baru dapat dialokasikan ke dalam kelas warna yang telah ada sesuai pola konstruksi sebelumnya

Dengan demikian, untuk n ganjil tetap berlaku

$$\chi_2(C(K_n)) = n + 1. \blacksquare$$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dari bab sebelumnya, terdapat beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Untuk setiap graf G , berlaku
 $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$
2. Jika C_n sikel dengan n titik maka

$$\chi_2(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \wedge n \neq 5 \\ 5, & n = 5 \end{cases}$$
3. Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet maka
 $\chi_2(K_{m,n}) = m + n$
4. Jika K_n graf komplet dengan n titik maka
 $\chi_2(K_n) = n$
5. Jika C_n sebuah graf sikel dengan titik $3 \leq n \leq 5$ maka
 $\chi_2[D_2(C_n)] = 2n$
6. Jika C_n sebuah graf sikel dengan n titik, $n \equiv 0 \pmod{3}$ dan $n \geq 6$, maka
 $\chi_2[D_2(C_n)] = 6$
7. Jika C_n sebuah graf sikel dengan n titik, $n \equiv 1 \pmod{3}$ dan $n \geq 6$, maka
 $\chi_2[D_2(C_n)] = 7$
8. Jika C_n sebuah graf sikel dengan n titik, $n \equiv 2 \pmod{3}$ dan $n \geq 6$, maka
 $\chi_2[D_2(C_n)] = 8$
9. Jika C_n sebuah graf sikel, maka

$$\chi_2[(D_2(C_n))] = \begin{cases} 2n, & 3 \leq n \leq 5 \\ 6, & n \equiv 0 \pmod{3}, n \geq 6 \\ 7, & n \equiv 1 \pmod{3}, n \geq 6 \\ 8, & n \equiv 2 \pmod{3}, n \geq 6 \end{cases}$$
10. Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet, maka
 $\chi_2[D_2(K_{m,n})] = 2(m + n)$
11. Jika K_n graf komplet dengan n titik, maka

$$\chi_2(D_2(K_n)) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$$
12. Jika G graf dengan n titik dan m sisi dan graf sentral G adalah $C(G)$, maka
 $|V(C(G))| = n + m \quad \text{dan} \quad |E(C(G))| = \frac{n^2 - n + 2m}{2}$
13. Jika G adalah C_n sikel dengan n titik dan $n \geq 3$ maka

$$\chi_2(C(C_n)) = \begin{cases} n = n, & \text{jika } n = 3 \\ n + 2, & \text{jika } n \text{ genap}, n \geq 4 \\ n + 3, & \text{jika } n \text{ ganjil}, n \geq 4 \end{cases}$$
14. Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet dan $m \geq n$, maka
 $\chi_2(C(K_{m,n})) = 2m + n$
15. Jika K_n graf komplet dengan n titik, maka
 $\chi_2(C(K_n)) = n + 1$

komplet, graf bayangan dan graf sentral. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penentuan nilai eksak bilangan kromatik jarak-2 pada kelas graf yang lebih luas.

DAFTAR PUSTAKA

- Borodin, O. V, & Ivanova, A. O. (2013). PRECISE UPPER BOUND FOR THE STRONG EDGE CHROMATIC NUMBER. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 33(14), 759–770. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1708>
- Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). Labeling Graphs with a Condition at Distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4), 586–595.
- Harary, F. (1983). GRAPH THEORY IN NETWORK ANALYSIS. In *Graph Theory and Theoretical Physics* (Vol. 5, pp. 235–244). IEEE.
- Libao, M. F., & Abarca, K. B. (2025). Distance-2 Chromatic Number of the Central and Shadow Graphs of a Cycle and its Application to Computer Science. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(2).

SARAN

Penelitian ini difokuskan pada penentuan nilai eksak bilangan kromatik jarak-2 pada beberapa kelas graf, yaitu graf sikel, graf bipartit komplet, graf