

PEWARNAAN RADIO GRAF KOMPLET DAN GRAF PERSAHABATAN

Brigita Risky Fernanda

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: brigita.22078@mhs.unesa.ac.id

Budi Rahadjeng

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail: budirahadjeng@unesa.ac.id

Abstrak

Pewarnaan radio merupakan salah satu pengembangan teori pewarnaan graf yang memperhatikan jarak antar titik pada graf dan digunakan sebagai model matematis untuk meminimalkan interferensi frekuensi pada jaringan komunikasi. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pewarnaan radio dan bilangan radio pada graf komplet serta menentukan pewarnaan radio dan batas atas bilangan radio pada graf persahabatan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan pendekatan analitis terhadap struktur graf dan konstruksi pelabelan radio yang memenuhi syarat pewarnaan radio. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan radio graf komplet K_n adalah $rn(K_n) = n - 1$. Pada graf persahabatan diperoleh $rn(F_{3,k}) = 2k + 1$. Selain itu, untuk graf persahabatan $F_{4,k}$ dengan $k > 2$ diperoleh batas atas $rn(F_{4,k}) \leq 7k + 1$, dengan nilai eksak $rn(F_{4,3}) = 22$ dan $rn(F_{4,4}) = 29$. Untuk $F_{5,k}$ dengan $k > 2$ diperoleh batas atas $rn(F_{5,k}) \leq 8k + 1$, sedangkan untuk $F_{6,k}$ dengan $k > 2$ diperoleh batas atas $rn(F_{6,k}) \leq 17k + 1$. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa struktur graf berpengaruh terhadap pola pelabelan dan nilai bilangan radio yang dihasilkan.

Kata Kunci: Pewarnaan Radio, Bilangan Radio, Graf Komplet, Graf Persahabatan.

Abstract

Radio coloring is an extension of graph coloring that considers the distance between vertices and serves as a mathematical model for minimizing frequency interference in communication networks. This study aims to determine the radio coloring and radio number of complete graphs, as well as the radio coloring and upper bounds of radio numbers for friendship graphs. The method used in this research is a literature study with an analytical approach to graph structures and radio labeling constructions satisfying radio coloring conditions. The results show that the radio number of the complete graph K_n is $rn(K_n) = n - 1$. For friendship graphs, it is obtained that $rn(F_{3,k}) = 2k + 1$. Furthermore, for the friendship graph $F_{4,k}$ with $k > 2$, the upper bound $rn(F_{4,k}) \leq 7k + 1$ is obtained, with exact values $rn(F_{4,3}) = 22$ and $rn(F_{4,4}) = 29$. For $F_{5,k}$ with $k > 2$, the upper bound is $rn(F_{5,k}) \leq 8k + 1$, while for $F_{6,k}$ with $k > 2$, the upper bound is $rn(F_{6,k}) \leq 17k + 1$. These results indicate that graph structure significantly influences the labeling pattern and the resulting radio number.

Keywords: Radio Coloring, Radio Number, Complete Graph, Friendship Graph.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang digunakan untuk

memodelkan hubungan antarobjek dan telah berkembang luas dalam berbagai bidang, seperti jaringan komunikasi, transportasi, biologi, dan ilmu komputer. Salah satu kajian dalam teori graf yang

terus berkembang adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf pada umumnya membahas pemberian label atau warna pada unsur-unsur graf dengan aturan tertentu agar memenuhi syarat yang telah ditentukan.

Salah satu pengembangan dari pewarnaan graf adalah pewarnaan radio (*radio coloring*), yaitu pelabelan titik pada graf dengan bilangan bulat nonnegatif yang mempertimbangkan jarak antar titik. Konsep ini muncul dari permasalahan penentuan frekuensi pada jaringan komunikasi radio, ketika pemancar yang letaknya berdekatan harus diberikan frekuensi yang cukup berbeda agar tidak terjadi interferensi sinyal. Dalam pewarnaan radio, semakin dekat jarak dua titik pada graf, semakin besar selisih label yang harus diberikan.

Pewarnaan radio pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Erwin, Harary, dan Zhang sebagai model matematis dari masalah penugasan frekuensi radio. Sejak itu, penelitian mengenai bilangan radio telah berkembang pada berbagai kelas graf karena karakteristik tiap graf menghasilkan pola pelabelan dan nilai bilangan radio yang berbeda.

Graf lengkap dan graf persahabatan merupakan dua kelas graf yang menarik untuk dikaji dalam konteks pewarnaan radio. Graf lengkap memiliki keterhubungan maksimum karena setiap pasangan titik saling terhubung secara langsung. Sementara itu, graf persahabatan merupakan graf yang terbentuk dari beberapa siklus yang berbagi satu titik pusat. Kedua struktur tersebut memiliki tingkat kedekatan antartitik yang tinggi sehingga relevan untuk dianalisis dalam masalah pelabelan radio.

Berdasarkan karakteristik tersebut, penelitian ini membahas pewarnaan radio pada graf lengkap dan graf persahabatan dengan fokus pada penentuan bilangan radio serta batas atas bilangan radio pada beberapa kelas graf persahabatan. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pengembangan teori graf, khususnya dalam kajian pewarnaan radio, serta menjadi referensi untuk penelitian lanjutan mengenai pelabelan graf pada kelas graf lainnya.

KAJIAN TEORI

Definisi 2.1

Graf G didefinisikan sebagai struktur yang terdiri dari dua kumpulan: himpunan titik $V(G)$ yang tidak kosong, dan himpunan sisi $E(G)$ yang berisi

pasangan terurut dari titik-titik tersebut. Jika terdapat sisi $e = (u, v)$ maka titik u dan v dikatakan berhubungan langsung (bertetangga), sementara sisi e terkait pada kedua titik tersebut.

(Budayasa, 2007)

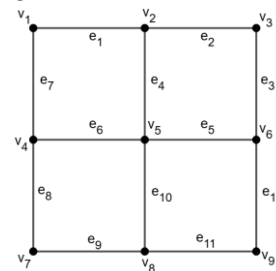
Definisi 2.2

Sebuah jalan (*walk*) di graf G didefinisikan sebagai barisan berhingga tak kosong $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k)$, yang suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi, dengan v_{i-1} dan v_i merupakan titik-titik ujung dari sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Jika W merupakan jalan dari titik v_0 ke v_k , maka ditulis (v_0, v_k) . Panjang jalan adalah banyaknya sisi pada W . Suatu jalan disebut tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama. Jika semua sisi pada W berbeda, maka disebut jejak (*trail*). Jika semua titik pada W berbeda, maka disebut lintasan (*path*). Jejak tertutup yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda disebut siklus (*cycle*). Banyaknya sisi pada siklus disebut panjang siklus.

(Budayasa, 2007)

Contoh:

Perhatikan Graf G pada Gambar 2.1. Barisan $(v_3, e_2, v_2, e_4, v_5, e_5, v_6)$ adalah sebuah lintasan di G dengan panjang 3.



Gambar 2.1. Graf G

Definisi 2.3

Jarak antara dua titik u dan v dalam graf G , ditulis $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke v di G . Diameter graf G adalah maksimum jarak di antara semua pasang titik di G . Atau ditulis,

$$\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} \{d(u, v)\}$$

(Zhang, 2009)

Definisi 2.4

Misal $v \in V(G)$. Derajat titik v , dilambangkan $d_G(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan v .

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.5

Graf sikel C_n , dengan $n \geq 3$, adalah graf sederhana dengan n titik yang setiap titiknya berderajat 2.

(Budayasa, 2007)

Definisi 2.6

Graf lengkap K_n adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik yang berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

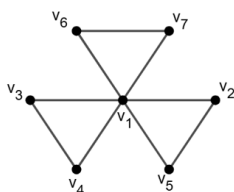
(Budayasa, 2007)

Definisi 2.7

Graf persahabatan $F_{m,k}$, dengan $m, k \in \mathbb{N}$, adalah graf yang terdiri atas k sikel, setiap sikel panjangnya m dengan menghimpitkan sebuah titik dari masing-masing sikel ke K_1 . Titik bersama tersebut disebut sebagai titik pusat.

(Ajiji & Rahadjeng, 2020)

Contoh:



Gambar 2.2. Graf persahabatan $F_{3,3}$

Definisi 2.8

Pewarnaan- k dari G adalah pewarnaan semua titik G dengan menggunakan k warna sedemikian hingga dua titik G yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan kromatik (*Chromatic number*) dari G , dilambangkan dengan $\chi(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik G sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapatkan warna yang berbeda.

(Budayasa, 2007)

HASIL DAN PEMBAHASAN**Definisi 3.1**

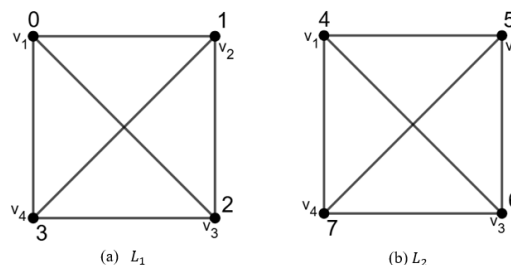
Pewarnaan radio dari suatu graf G didefinisikan sebagai $L: V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, sedemikian hingga dua titik yang berhubungan langsung tidak boleh memiliki warna yang sama dan $\forall u, v \in V(G)$ berlaku $|L(u) - L(v)| \geq \text{diam}(G) + 1 - d(u, v)$.

(Alkassasbeh et al., 2023)

Contoh:

Perhatikan pewarnaan radio graf K_4 pada Gambar 3.1. Diketahui $\text{diam}(K_4) = 1$ dan jarak setiap pasang

titik di K_4 adalah $\text{diam}(u, v) = 1$. Pewarnaan L_1 adalah pewarnaan radio graf K_4 karena $\forall u, v \in V(K_4)$ berlaku $|L(u) - L(v)| \geq 1$. Selanjutnya dengan proses pewarnaan yang sama, diperoleh pewarnaan radio lain pada graf K_4 , yaitu L_2 seperti pada Gambar 4(b).



Gambar 3.1.

L_1 dan L_2 adalah pewarnaan radio dari K_4

Definisi 3.2

Span dari pewarnaan radio L , ditulis $rc(L)$, adalah bilangan bulat positif terbesar yang digunakan untuk melabel titik-titik di G . Minimum dari span yang diperoleh diantara seluruh pewarnaan radio pada G disebut bilangan radio yang dinotasikan $rn(G)$.

(Zhang, 2009)

Contoh:

Perhatikan Gambar 3.1. Pada Gambar 4(a) $rc(L_1) = 3$, sedangkan pada Gambar 4(b) $rc(L_2) = 7$, sehingga diperoleh $rn(K_4) = 3$.

Teorema 3.1

Jika G graf terhubung dengan banyak titik n dan diameter d , maka

$$n - 1 \leq rn(G) \leq (n - 1)d$$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $rn(G) \geq n - 1$. Misalkan dilakukan pewarnaan radio pada graf G dengan n titik. Karena setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki warna berbeda, maka span minimum tidak dapat kurang dari n . Karena pewarnaan dimulai dari 0, diperoleh

$$rn(G) \geq n - 1 \quad (3.1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(G) \leq (n - 1)d$. Misalkan himpunan titik graf G adalah $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Kemudian didefinisikan pelabelan

$$L(v_i) = (i - 1)d, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

Untuk sebarang dua titik v_i dan v_j dengan $i < j$, diperoleh

$$\begin{aligned}
|L(v_i) - L(v_j)| &\geq d \\
|(i-1)d - (j-1)d| &\geq d \\
(j-i)d &\geq d \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Karena untuk setiap $v_i, v_j \in V(G)$ berlaku $d(v_i, v_j) \leq d$, maka

$$d \geq d + 1 - d(v_i, v_j) \quad (3.3)$$

Berdasarkan (3.2) dan (3.3), diperoleh

$$|L(v_i) - L(v_j)| \geq d \geq d + 1 - d(v_i, v_j)$$

sehingga L memenuhi syarat pewarnaan radio pada G dan warna terbesar yang digunakan adalah

$$L(v_n) = (n-1)d$$

Karena $rc(L) = (n-1)d$ maka

$$rn(G) \leq (n-1)d \quad (3.4)$$

Dari (3.1) dan (3.4) diperoleh

$$n-1 \leq rn(G) \leq (n-1)d$$

Teorema terbukti ■

Teorema 3.2

Bilangan radio dari graf Komplet, $rn(K_n) = n-1$.

Bukti:

Misalkan K_n adalah graf komplet dengan himpunan titik $V(K_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, pada graf komplet K_n setiap dua titik bertetangga sehingga $d(u, v) = 1, \forall u, v \in V(K_n)$ dan $diam(K_n) = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $rn(K_n) \geq n-1$. Berdasarkan Definisi 3.1, $\forall u, v \in V(K_n)$ berlaku $|L(u) - L(v)| \geq 1$. Yang artinya setiap dua titik di K_n harus memiliki warna yang berbeda, sehingga pewarnaan radio K_n harus memiliki setidaknya n warna berbeda. Karena pewarnaan dimulai dari 0, maka diperoleh

$$rn(K_n) \geq n-1 \quad (3.5)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rn(K_n) \leq n-1$. Misalkan untuk himpunan titik $V(K_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ diberi label sebagai berikut:

$$L(v_i) = i-1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Untuk setiap dua titik v_i dan v_{i+1} berlaku

$$\begin{aligned}
|L(v_i) - L(v_{i+1})| &\geq 1 \\
|i - (i+1)| &\geq 1 \\
1 &\geq 1
\end{aligned}$$

Sehingga pewarnaan L telah memenuhi syarat pewarnaan radio pada K_n dan diperoleh $rc(L) = n-1$ sehingga

$$rn(K_n) \leq n-1 \quad (3.6)$$

Dari (3.5) dan (3.6) diperoleh,

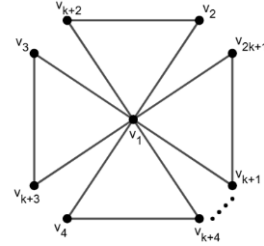
$$rn(K_n) = n-1$$

Teorema terbukti ■

Teorema 3.3

Bilangan radio graf persahabatan, $rn(F_{3,k}) = 2k+1$.

Bukti:



Gambar 3.2 Graf persahabatan $F_{3,k}$

Perhatikan graf $F_{3,k}$ pada Gambar 3.2. Diketahui $|V(F_{3,k})| = 2k+1$.

Akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{3,k}) \geq 2k+1$. Berdasarkan Definisi 3.1, $\forall u, v \in V(F_{3,k})$ berlaku

$$|L(u) - L(v)| \geq diam(F_{3,k}) + 1 - d(u, v)$$

Karena $diam(F_{3,k}) = 2$ dan $\forall u, v \in V(F_{3,k})$ diperoleh $d(u, v) \in \{1, 2\}$, maka berlaku

- $|L(u) - L(v)| \geq 2$, untuk $d(u, v) = 1$
- $|L(u) - L(v)| \geq 1$, untuk $d(u, v) = 2$.

Dengan demikian, tidak ada dua titik pada $F_{3,k}$ yang dapat diberi label sama. Oleh karena itu, karena $|V(F_{3,k})| = 2k+1$, maka diperlukan paling sedikit $2k+1$ label berbeda, sehingga diperoleh

$$rn(F_{3,k}) \geq 2k+1 \quad (3.7)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{3,k}) \leq 2k+1$. Definisikan $L : V(F_{3,k}) \rightarrow \{0, 2, 3, \dots, 2k+1\}$ dengan rumus berikut:

$$L(v_1) = 0, \quad L(v_i) = i; 2 \leq i \leq 2k+1$$

Akan dibuktikan bahwa pelabelan tersebut memenuhi syarat pewarnaan radio, yaitu

$$|L(v_i) - L(v_j)| \geq 3 - d(v_i, v_j)$$

untuk setiap $v_i, v_j \in V(F_{3,k})$ dan $i \neq j$.

Kasus 1. Untuk $2 \leq i \leq k+1$ dan $2 \leq j \leq k+1$, diperoleh $d(v_i, v_j) = 2$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_j)| = |i - j|$$

Karena $i \neq j$, maka $|i - j| \geq 1$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_j)| \geq 1$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 2. Untuk $i = 1$ dan $2 \leq j \leq k+1$, diperoleh $d(v_i, v_j) = 1$. Sehingga

$$|L(v_1) - L(v_j)| = |0 - j| = j$$

Karena $j \neq 0$, maka $j \geq 2$ dan $|L(v_1) - L(v_j)| \geq 2$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 3. Untuk $k+2 \leq i \leq 2k+1$ dan $k+2 \leq j \leq 2k+1$, diperoleh $d(v_i, v_j) = 2$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_j)| = |i - j|$$

Karena $i \neq j$, maka $|i - j| \geq 1$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_j)| \geq 1$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi

Kasus 4. Untuk $2 \leq i \leq k + 1$ dan $j = k + i$, diperoleh $d(v_i, v_j) = 1$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_j)| = |i - (k + i)|$$

Karena $k \geq 2$, maka $|i - (k + i)| \geq 2$ dan $|L(v_i) - L(v_j)| \geq 2$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi

Kasus 5. Untuk $2 \leq i \leq k + 1$ dan $k + 2 \leq j \leq 2k + 1$ dengan $j \neq k + i$, diperoleh $d(v_i, v_j) = 2$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_j)| = |i - j|$$

Karena $i \neq j$, maka $|i - j| \geq 1$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_j)| \geq 1$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi

Dengan demikian, untuk semua pasangan titik v_i dan v_j , pelabelan L memenuhi syarat $|L(v_i) - L(v_j)| \geq 3 - d(v_i, v_j)$. Jadi, L merupakan pewarnaan radio pada graf persahabatan $F_{3,k}$. Akibatnya,

$$rn(F_{3,k}) \leq 2k + 1 \quad (3.8)$$

Dari (3.7) dan (3.8) diperoleh,

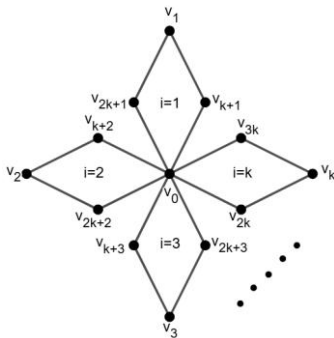
$$rn(F_{3,k}) = 2k + 1$$

Teorema terbukti ■

Teorema 3.4

Jika $k > 2$, maka $rn(F_{4,k}) \leq 7k + 1$

Bukti:



Gambar 3.3 Graf persahabatan $F_{4,k}$

Perhatikan graf $F_{4,k}$ pada Gambar 3.3. Akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{4,k}) \leq 7k + 1$. Definisikan $L: V(F_{4,k}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan rumus berikut:

$$L(v_{jk+i}) = \begin{cases} 0, & i = j = 0 \\ 3 + i - 1, & j = 0, 1 \leq i \leq k \\ k + 1 + 3i, & j = 1, 1 \leq i \leq k \\ 4k + 1 + 3i, & j = 2, 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Karena $diam(F_{4,k}) = 4$ maka untuk membuktikan bahwa L adalah pewarnaan radio,

cukup ditunjukkan bahwa $\forall v_i, v_j \in V(F_{4,k})$ dengan $i \neq j$ berlaku

$$|L(v_i) - L(v_j)| \geq 5 - d(v_i, v_j)$$

Kasus 1. Untuk $j = 0, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_i) = 1$. Sehingga

$$|L(v_0) - L(v_i)| = |0 - (3 + i - 1)| = 2 + i$$

Karena $i \geq 1$, maka $2 + i \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_i)| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 2. Untuk $j \in \{1, 2\}, 1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 2.1 untuk $j = 1, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_0) - L(v_{k+i})| = |0 - (k + 1 + 3i)| = k + 1 + 3i$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $k + 1 + 3i \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 2.2 untuk $j = 2, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{2k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_0) - L(v_{2k+i})| = |0 - (4k + 1 + 3i)| = 4k + 1 + 3i$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $4k + 1 + 3i \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{2k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 3. Untuk $j \in \{1, 2\}, 1 \leq t \leq k$ dan $1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 3.1 untuk $j = 1$ dan $i = t$ diperoleh $d(v_i, v_{k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_i) - L(v_{k+i})| = |(3 + i - 1) - (k + 1 + 3i)| = 2i + k - 1$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $2i + k - 1 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_{k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 3.2 untuk $j = 2$ dan $i = t$ diperoleh $d(v_i, v_{2k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_i) - L(v_{2k+i})| = |(3 + i - 1) - (4k + 1 + 3i)| = 2i + 4k - 1$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $2i + 4k - 1 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_{2k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 3.3 untuk $j = 1$ dan $i \neq t$ diperoleh $d(v_t, v_{k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_t) - L(v_{k+i})| = |(3 + t - 1) - (k + 1 + 3i)| = 3i - t + k - 1$$

Karena $i \geq 1, t \geq 1$ dan $k > 2$, maka $3i - t + k - 1 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_t) - L(v_{k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 3.4 untuk $j = 2$ dan $i \neq t$ diperoleh $d(v_t, v_{2k+i}) = 1$ sehingga

$$|L(v_t) - L(v_{2k+i})| = |(3+t-1) - (4k+1+3i)| \\ = 3i - t + 4k - 1$$

Karena $i \geq 1$, $t \geq 1$ dan $k > 2$, maka $3i - t + 4k - 1 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_t) - L(v_{2k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 4. Untuk $j, m \in \{1, 2\}$, $1 \leq t \leq k$ dan $1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 4.1 untuk $j \neq m$ dan $i = t$ diperoleh

$$d(v_{jk+i}, v_{mk+i}) = 2 \text{ sehingga} \\ |L(v_{jk+i}) - L(v_{mk+i})| \\ = |(k+1+3i) - (4k+1+3i)| \\ = 3k$$

Karena $k > 2$, maka $3k \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_{jk+i}) - L(v_{mk+i})| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 4.2 untuk $j \neq m$ dan $i \neq t$ diperoleh

$$d(v_{jk+i}, v_{mk+t}) = 2 \text{ sehingga} \\ |L(v_{jk+i}) - L(v_{mk+t})| \\ = |(k+1+3i) - (4k+1+3t)| \\ = 3(i-t)$$

Karena $i \geq 1$ dan $t \geq 1$, maka $3(i-t) \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_{jk+i}) - L(v_{mk+t})| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 5. Untuk $j = 0$, $1 \leq i < t \leq k$ diperoleh $d(v_i, v_t) = 4$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_t)| = |(3+i-1) - (3+t-1)| = t-i$$

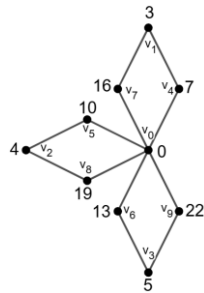
Karena $i \geq 1$ dan $t > i$, maka $t-i \geq 1$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_t)| \geq 1$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Teorema terbukti ■

Akan ditunjukkan nilai eksak dari bilangan radio graf persahabatan $F_{4,3}$ dan $F_{4,4}$ sebagai berikut.

➤ Untuk graf persahabatan $F_{4,3}$, diperoleh $rn(F_{4,3}) = 22$.

Bukti:



Gambar 3.4 Graf persahabatan $F_{4,3}$

Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $rn(F_{4,3}) \leq 22$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{4,3}) \geq 22$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{4,3}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+1})| \geq 5 - d(v_i, v_{i+1}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 22. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 22.$$

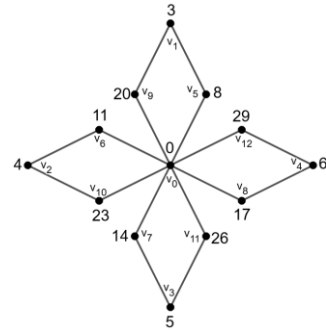
Karena $rn(F_{4,3})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{4,3}$, maka

$$rn(F_{4,3}) \geq 22.$$

Dengan demikian,

$$rn(F_{4,3}) = 22.$$

➤ Untuk graf persahabatan $F_{4,4}$, diperoleh $rn(F_{4,4}) = 29$.



Gambar 3.5 Graf persahabatan $F_{4,4}$

Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh $rn(F_{4,4}) \leq 29$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{4,4}) \geq 29$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{4,4}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+1})| \geq 5 - d(v_i, v_{i+1}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 29. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 29.$$

Karena $rn(F_{4,4})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{4,4}$, maka

$$rn(F_{4,4}) \geq 29$$

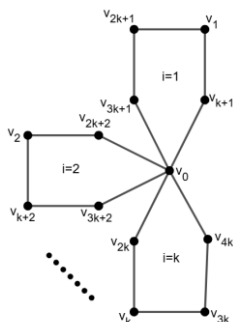
Dengan demikian,

$$rn(F_{4.4}) = 29.$$

Teorema 3.5

Jika $k > 2$, maka $rn(F_{5,k}) \leq 8k + 1$

Bukti:



Gambar 3.6 Graf persahabatan $F_{5,k}$

Perhatikan graf $F_{5,k}$ pada Gambar 3.6. Akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{5,k}) \leq 8k + 1$. Definisikan $L : V(F_{5,k}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan rumus berikut:

Untuk k ganjil didefinisikan

$$L(v_{jk+i}) = \begin{cases} 0, & i = j = 0 \\ 3 + i - 1, & j = 0, 1 \leq i \leq k \\ k + 2(i + 1), & j = 1, 1 \leq i \leq k \\ 3k + 2(i + 1), & j = 2, 1 \leq i \leq k \\ 5k + 3i + 1, & j = 3, 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Karena $diam(F_{5,k}) = 4$ maka untuk membuktikan bahwa L adalah pewarnaan radio, cukup ditunjukkan bahwa $\forall v_i, v_j \in V(F_{5,k})$ dengan $i \neq j$ berlaku

$$|L(v_i) - L(v_j)| \geq 5 - d(v_i, v_j).$$

Kasus 1. Untuk $j = 0, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_i) = 2$. Sehingga

$$|L(v_0) - L(v_i)| = |0 - (3 + i - 1)| = 2 + i$$

Karena $i \geq 1$, maka $2 + i \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_i)| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 2. Untuk $j = 1$, $1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 2.1. Untuk $d(v_0, v_{k+i}) = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{k+i})| &= |0 - (k + 2(i + 1))| \\ &= k + 2(i + 1) \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $k + 2(i + 1) \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 2.2. Untuk $d(v_0, v_{k+i}) = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{k+i})| &= |0 - (k + 2(i + 1))| \\ &= k + 2(i + 1) \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $k + 2(i + 1) \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{k+i})| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 3. Untuk $j = 2$, $1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 2.1. Untuk $d(v_0, v_{2k+i}) = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{2k+i})| &= |0 - (3k + 2i + 2)| \\ &= 3k + 2i + 2 \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $3k + 2i + 2 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{2k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 2.2. Untuk $d(v_0, v_{2k+i}) = 2$ diperoleh

$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{2k+i})| &= |0 - (3k + 2i + 2)| \\ &= 3k + 2i + 2 \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $3k + 2i + 2 \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{2k+i})| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 4. Untuk $j = 3$, $1 \leq i \leq k$ diperoleh

Subkasus 4.1. Untuk $d(v_0, v_{3k+i}) = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{3k+i})| &= |0 - (5k + 3i + 1)| \\ &= 5k + 3i + 1 \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $5k + 3i + 1 \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{3k+i})| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Subkasus 4.2. Untuk $d(v_0, v_{3k+i}) = 2$ diperoleh

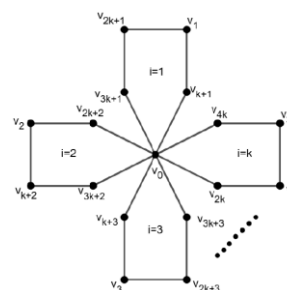
$$\begin{aligned} |L(v_0) - L(v_{3k+i})| &= |0 - (5k + 3i + 1)| \\ &= 5k + 3i + 1 \end{aligned}$$

Karena $i \geq 1$ dan $k > 2$, maka $5k + 3i + 1 \geq 3$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{3k+i})| \geq 3$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 5. Untuk $j = 0, 1 \leq i < t \leq k$ diperoleh $d(v_i, v_t) = 4$. Sehingga

$$|L(v_i) - L(v_t)| = t - i$$

Karena $i \geq 1$ dan $t > i$, maka $t - i \geq 1$ dan diperoleh $|L(v_i) - L(v_t)| \geq 1$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.



Gambar 3.7 Graf persahabatan $F_{5,k}$

Perhatikan Gambar 3.7. Untuk k genap, didefinisikan

$$L(v_{jk+i}) = \begin{cases} 0, & i = j = 0 \\ 3 + i - 1, & j = 0, 1 \leq i \leq k \\ k + 2(i + 1), & j = 1, 1 \leq i \leq k \\ 3k + 4, & j = 2, i = 1 \\ 3k + 3 + 2i, & j = 2, 2 \leq i \leq k \\ 5k + 5, & j = 3, i = 1 \\ 5k + 1 + 3i, & j = 3, 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

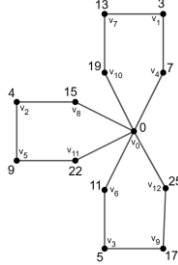
Selanjutnya, dilakukan pembuktian dengan cara yang sama seperti pada k ganjil.

Teorema terbukti ■

Akan ditunjukkan nilai eksak dari bilangan radio graf persahabatan $F_{5,3}$ dan $F_{5,4}$ sebagai berikut.

- Untuk graf persahabatan $F_{5,3}$, diperoleh $rn(F_{5,3}) = 25$.

Bukti:



Gambar 3.8 Graf persahabatan $F_{5,3}$

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh $rn(F_{5,3}) \leq 25$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{5,3}) \geq 25$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{4,3}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+i})| \geq 5 - d(v_i, v_{i+i}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 25. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 25.$$

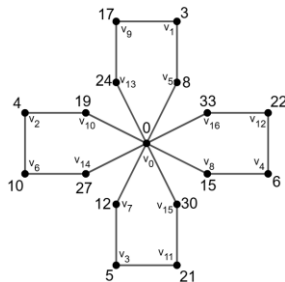
Karena $rn(F_{5,3})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{5,3}$, maka

$$rn(F_{5,3}) \geq 25.$$

Dengan demikian,

$$rn(F_{5,3}) = 25.$$

- Untuk graf persahabatan $F_{5,4}$, diperoleh $rn(F_{5,4}) = 33$.



Gambar 3.9 Graf persahabatan $F_{5,4}$

Berdasarkan Teorema 3.5 diperoleh $rn(F_{5,4}) \leq 33$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{5,4}) \geq 33$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{5,4}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+i})| \geq 5 - d(v_i, v_{i+i}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 33. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 33.$$

Karena $rn(F_{5,4})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{5,4}$, maka

$$rn(F_{5,4}) \geq 33$$

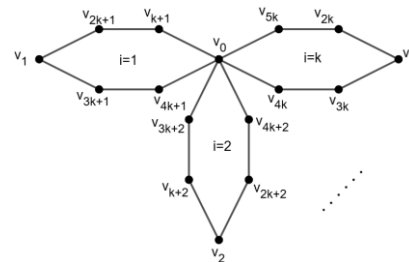
Dengan demikian,

$$rn(F_{5,4}) = 33.$$

Teorema 3.6

Jika $k > 2$, maka $rn(F_{6,k}) \leq 17k + 1$

Bukti:



Gambar 3.10 Graf persahabatan $F_{6,k}$

Perhatikan graf $F_{6,k}$ pada Gambar 3.10. Akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{6,k}) \leq 17k + 1$. Definisikan $L: V(F_{6,k}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan rumus berikut:

$$L(v_{jk+i}) = \begin{cases} 0, & i = j = 0 \\ 4 + i - 1, & j = 0, 1 \leq i \leq k \\ k + 6, & j = 1, i = 1 \\ k + 10 + 3(i - 2), & j = 1, 2 \leq i \leq k \\ 4k + 4 + 3i, & j = 2, 1 \leq i \leq k \\ 7k + 7, & j = 3, i = 1 \\ 7k + 11 + 5(i - 2), & j = 3, 2 \leq i \leq k \\ 12k + 6, & j = 4, i = 1 \\ 12k + 5i + 1, & j = 4, 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

Karena $diam(F_{6,k}) = 6$ maka untuk membuktikan bahwa L adalah pewarnaan radio, cukup ditunjukkan bahwa $\forall v_i, v_j \in V(F_{6,k})$ dengan $i \neq j$ berlaku

$$|L(v_i) - L(v_j)| \geq 7 - d(v_i, v_j)$$

Kasus 1. Untuk $j = 0, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_i) = 3$, sehingga

$$|L(v_0) - L(v_i)| = |0 - (4 + i - 1)| = 3 + i$$

Karena $i \geq 1$, maka $3 + i \geq 4$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_i)| \geq 4$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 2. Untuk $j = 1, i = 1$ diperoleh $d(v_0, v_{k+1}) = 1$ sehingga

$$|L(v_0) - L(v_{k+1})| = |0 - (k + 6)| = k + 6$$

Karena $k > 2$, maka $k + 6 \geq 6$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{k+1})| \geq 6$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 3. Untuk $j = 1, 2 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{k+i}) = 2$ sehingga

$$\begin{aligned} & |L(v_0) - L(v_{k+i})| \\ &= |0 - (k + 10 + 3(i - 2))| \\ &= k + 3i + 4 \end{aligned}$$

Karena $k > 2$ dan $i \geq 2$, maka $k + 3i + 4 \geq 5$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{k+i})| \geq 5$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 4. Untuk $j = 2, 1 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{2k+i}) = 2$ sehingga

$$\begin{aligned} & |L(v_0) - L(v_{2k+i})| \\ &= |0 - (4k + 4 + 3i)| \\ &= 4k + 4 + 3i \end{aligned}$$

Karena $k > 2$ dan $i \geq 1$, maka $4k + 4 + 3i \geq 5$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{2k+i})| \geq 5$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 5. Untuk $j = 3, i = 1$ diperoleh $d(v_0, v_{3k+1}) = 2$ sehingga

$$|L(v_0) - L(v_{3k+1})| = |0 - (7k + 7)| = 7k + 7$$

Karena $k > 2$, maka $7k + 7 \geq 5$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{3k+1})| \geq 5$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 6. Untuk $j = 3, 2 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{3k+i}) = 1$ sehingga

$$\begin{aligned} & |L(v_0) - L(v_{3k+i})| \\ &= |0 - (7k + 11 + 5(i - 2))| \\ &= 7k + 11 + 5(i - 2) \end{aligned}$$

Karena $k > 2$ dan $i \geq 2$, maka $7k + 11 + 5(i - 2) \geq 6$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{3k+i})| \geq 6$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 7. Untuk $j = 4, i = 1$ diperoleh $d(v_0, v_{4k+1}) = 1$ sehingga

$$|L(v_0) - L(v_{4k+1})| = |0 - (12k + 6)| = 12k + 6$$

Karena $k > 2$, maka $12k + 6 \geq 6$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{4k+1})| \geq 6$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Kasus 6. Untuk $j = 4, 2 \leq i \leq k$ diperoleh $d(v_0, v_{4k+i}) = 1$ sehingga

$$\begin{aligned} & |L(v_0) - L(v_{4k+i})| \\ &= |0 - (12k + 5i + 1)| \\ &= 12k + 5i + 1 \end{aligned}$$

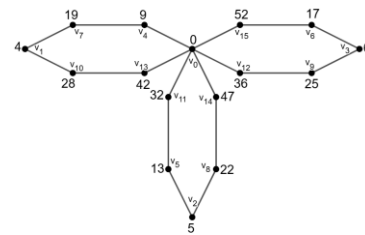
Karena $k > 2$ dan $i \geq 2$, maka $12k + 5i + 1 \geq 6$ dan diperoleh $|L(v_0) - L(v_{4k+i})| \geq 6$ sehingga syarat pewarnaan radio telah terpenuhi.

Teorema terbukti ■

Akan ditunjukkan nilai eksak dari bilangan radio graf persahabatan $F_{6,3}$ dan $F_{6,4}$ sebagai berikut.

➤ Untuk graf persahabatan $F_{6,3}$, diperoleh $rn(F_{6,3}) = 52$.

Bukti:



Gambar 3.11 Graf persahabatan $F_{6,3}$

Berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh $rn(F_{6,3}) \leq 52$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{6,3}) \geq 52$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{6,3}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+1})| \geq 7 - d(v_i, v_{i+1}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 52. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 52.$$

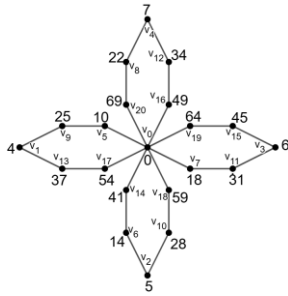
Karena $rn(F_{6,3})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{6,3}$, maka

$$rn(F_{6,3}) \geq 52.$$

Dengan demikian,

$$rn(F_{6,3}) = 52.$$

- Untuk graf persahabatan $F_{6,4}$, diperoleh $rn(F_{6,4}) = 69$.



Gambar 3.12 Graf persahabatan $F_{6,4}$

Berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh $rn(F_{6,4}) \leq 69$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rn(F_{6,4}) \geq 69$. Misalkan L adalah pewarnaan radio pada graf $F_{6,4}$ dengan urutan titik $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}$.

Berdasarkan Definisi 3.1, untuk setiap dua titik berurutan berlaku

$$|L(v_i) - L(v_{i+1})| \geq 7 - d(v_i, v_{i+1}).$$

Dengan menghitung jarak setiap pasangan titik berurutan pada urutan tersebut dan menjumlahkan seluruh selisih label minimum yang diperoleh, didapatkan jumlah minimum sebesar 69. Nilai ini merepresentasikan span yang digunakan dalam pewarnaan radio L . Oleh karena itu, diperoleh

$$rc(L) \geq 69.$$

Karena $rn(F_{6,4})$ merupakan minimum dari semua span pewarnaan radio pada $F_{6,4}$, maka

$$rn(F_{6,4}) \geq 69$$

Dengan demikian,

$$rn(F_{6,4}) = 69.$$

PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, terdapat beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Batas bawah dan batas atas graf terhubung G dengan banyak titik n dan diameter d adalah $n - 1 \leq rn(G) \leq (n - 1)d$.
2. Bilangan radio dari graf lengkap, $rn(K_n) = n - 1$.
3. Bilangan radio dari graf persahabatan, $rn(F_{3,k}) = 2k + 1$.
4. Batas atas bilangan radio graf persahabatan $F_{4,k}$, dengan $k > 2$, adalah $rn(F_{4,k}) \geq 7k + 1$.

Selanjutnya, untuk nilai khusus $k = 3$ dan $k = 4$, diperoleh masing-masing $rn(F_{4,3}) = 22$ dan $rn(F_{4,4}) = 29$.

5. Batas atas bilangan radio graf persahabatan $F_{5,k}$, dengan $k > 2$, adalah $rn(F_{5,k}) \geq 8k + 1$. Selanjutnya, untuk nilai khusus $k = 3$ dan $k = 4$, diperoleh masing-masing $rn(F_{5,3}) = 25$ dan $rn(F_{5,4}) = 33$.
6. Batas atas bilangan radio graf persahabatan $F_{6,k}$, dengan $k > 2$, adalah $rn(F_{6,k}) \geq 8k + 1$. Selanjutnya, untuk nilai khusus $k = 3$ dan $k = 4$, diperoleh masing-masing $rn(F_{6,3}) = 52$ dan $rn(F_{6,4}) = 69$.

SARAN

Penelitian ini hanya membahas mengenai pewarnaan radio pada graf lengkap K_n dan graf persahabatan $F_{m,k}$. Pada graf persahabatan $F_{4,k}$, $F_{5,k}$, dan $F_{6,k}$ didapatkan hasil berupa batas atas dan nilai eksak untuk nilai khusus $k = 3$ dan $k = 4$, harapan penulis, penelitian selanjutnya dapat mengkaji nilai eksak dari bilangan radio graf persahabatan $F_{4,k}$, $F_{5,k}$, dan $F_{6,k}$ untuk setiap nilai k .

DAFTAR PUSTAKA

- Alkasasbeh, A. H., Badr, E., Attiya, H., & Shabana, H. M. (2023). Radio Number for Friendship Communication Networks. *Mathematics*, 11(20).
<https://doi.org/10.3390/math11204232>
- Budayasa, K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Chartrand, G. (2016). *Graphs & Disgraphs*. CRC Press.
- Liu, D. D. F., & Zhu, X. (2005). Multilevel distance labelings for paths and cycles. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 19(3), 610–621.
<https://doi.org/10.1137/S0895480102417768>
- Madina. (2024). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal pada Beberapa Kelas Graf. *MathUnesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10.
- Mela Audina Ajiji dan Budi Rahadjeng. (2020). Pewarnaan Modular pada Beberapa Subkelas Graf. *MATHunesa*, 261–268.

- Panigrahi, P. (2009). A Survey on Radio k -Colorings of Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 6(1), 161–169.
<https://doi.org/10.1080/09728600.2009.12088883>
- W. K. Hale, "Frequency assignment: Theory and applications," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 68, no. 12, pp. 1497-1514, Dec. 1980, doi: 10.1109/PROC.1980.11899.
- Zhang, G. C. (2009). *Chromatic Graph Theory*. CRC Press.