IDEAL FUZZY PADA NEAR-RING

Dwi Ayu Anggraini
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : dwiayuanggraini55@gmail.com

Dr.Raden Sulaiman M.Si.
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : sulaimanraden@yahoo.com

Abstrak

Diberikan near-ring $< N, +, . >$ dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N jika $\mu: N \to [0,1]$. Kemudian μ dikatakan ideal fuzzy pada near-ring N jika μ adalah subnear-ring fuzzy pada near-ring N dan untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku : $\mu(x) = \mu(y + x - y)$, $\mu(x\,.\,y) \geq \mu(y)$, dan $\mu((x + z)\,.\,y - x\,.\,y) \geq \mu(z)$.

Dalam jurnal ini akan dibahas beberapa sifat ideal fuzzy pada near-ring N, sehingga kita peroleh hubungan ideal fuzzy pada nearing N dan ideal pada near-ring N. Kita juga mempelajari peta dan prapeta homomorfisma near-ring pada ideal fuzzy di near-ring N.

Kata kunci : near-ring, homomorfisma, subhimpunan fuzzy, ideal fuzzy pada near-ring N.

Abstract

Let $< N, +, . >$ be near-ring and μ is fuzzy subset of a near-ring N if $\mu: N \to [0,1]$. Then μ is said to be fuzzy ideals of near-ring N if μ is fuzzy subnear-ring of near-ring N and for any $x, y, z \in N$ such that $\mu(x) = \mu(y + x - y)$, $\mu(x\,.\,y) \geq \mu(y)$, and $\mu((x + z)\,.\,y - x\,.\,y) \geq \mu(z)$.

In this paper will be studied character fuzzy ideals of near-ring N, such that we get the relation between fuzzy ideals of near-ring N and ideals of near-ring N. We also study the homomorphic image and preimage of fuzzy ideals of near-ring N.

Keyword : near-ring, homomorphic, fuzzy subset, fuzzy ideals of near-ring N.

PENDAHULUAN

Matematika adalah suatu alat untuk berfikir secara logika, sehingga didalamnya terdapat penalaran-penalaran yang nantinya akan berguna untuk menyelesaikan masalah baik secara teori maupun secara nyata. Matematika dapat dibagi dalam berbagai rumpun, misalnya rumpun analisis, aljabar, dan statistik. Selanjutnya setiap rumpun akan dibagi menjadi beberapa bidang, misalnya rumpun aljabar terbagi dalam berbagai bidang, seperti aljabar linier elementer, aljabar abstrak, dan aljabar linier. Demikian pula dengan rumpun-rumpun lainnya. Beberapa rumpun dalam matematika memiliki keterkaitan konsep. Misal konsep near-ring pada bidang aljabar abstrak yang akan penulis gabungkan dengan konsep himpunan fuzzy.

Near-ring merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa aksioma yang ada pada ring tidak harus berlaku pada near-ring. Operasi pertama pada sebarang near-ring tidak harus komutatif, sedangkan terhadap operasi pertama dan operasi kedua cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan. Seiring dengan perkembangan zaman, penelitian tentang near-ring tidak hanya memuat pada strukturnya tetapi mulai dipadukan dengan teori lain, diantaranya dengan himpunan fuzzy.

Himpunan fuzzy merupakan salah satu ilmu dari matematika. Himpunan fuzzy diperkenalkan pertama kali oleh L.A.Zadeh (1965) sebagai perluasan dari himpunan klasik. Jika himpunan klasik mempunyai derajat keanggotaan 0 dan 1, lain halnya dengan himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy mempunyai derajat keanggotaan yang terletak pada interval [0,1].

Berdasarkan penelitian Abou-Zaid (1991) yang melakukan fuzzyfikasi pada struktur near-ring diperoleh definisi fuzzy near-ring, fuzzy subnear-ring dan ideal fuzzy near-ring (S.Abdurrahman,dkk.2012). Dari definisi-definisi dan teorema-teorema yang ada diharapkan dalam penelitian ini akan didapatkan gambaran tentang hubungan ideal pada near-ring dan ideal fuzzy pada near-ring melalui sifat-sifat yang ada pada ideal fuzzy near-ring.

METODE PENULISAN

Metode yang digunakan dalam menyusun makalah ini adalah metode kajian pustaka, yaitu demakalah teoritis mengenai objek yang akan dibahas dengan cara mencari, memahami, mendalami dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber buku bacaan, referensi, jurnal, atau hasil penelitian lain untuk menunjang penelitian). Adapun jurnal utama yang digunakan adalah *On Fuzzy Ideals of Near-ring* (Seung Dong Kim dan Hee Sik Kim,1996).

KAJIAN PUSTAKA

Definisi 1

Suatu himpunan tak kosong N dengan dua operasi biner yaitu " $+$ " dan " $.$ " disebut near-ring, jika :

1. $< N, +>$ merupakan suatu grup (tidak harus komutatif)
2. $< N, .>$ merupakan semigrup.
3. Untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku salah satu sifat distributif kanan atau kiri
   i. Distributif kanan : $(x + y) . z = x . z + y . z$
   ii. Distributif kiri : $x . (y + z) = x . y + x . z$

Jika near-ring memenuhi sifat (i) maka kita sebut near-ring kanan. Sebaliknya, jika near-ring memenuhi sifat (ii) maka kita sebut near-ring kiri.

N dengan operasi + dan . yang membentuk near-ring dinotasikan dengan $< N, +, .>$.

Definisi 2

Diberikan near-ring N. Suatu subgrup normal I dari $< N, +>$ disebut ideal di N jika

1. $NI \subseteq I$.
2. $(r + i)s - rs \in I$ untuk setiap $r, s \in N$ dan untuk setiap $i \in I$.

Subgrup normal I dari $< N, +>$ yang memenuhi (1) disebut ideal kiri di N, sedangkan subgrup normal I di $< N, +>$ memenuhi (2) disebut ideal kanan di N.

Definisi 3

Diberikan near-ring N dan S. Fungsi $\theta: N \to S$ disebut homomorfisma near-ring jika untuk setiap $x, y \in N$:

1. $\theta(x + y) = \theta(x) \oplus \theta(y)$
2. $\theta(x . y) = \theta(x) * \theta(y)$

Definisi 4

Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu fungsi μ disebut subhimpunan fuzzy di X jika $\mu: X \to [0,1]$. Selanjutnya himpunan semua subhimpunan fuzzy di X dinotasikan $\mathbb{F}(X)$ dan peta dari μ dinotasikan dengan $Im(\mu) = \{\mu(x) | x \in X\}$.

Definisi 5

Diberikan sebarang $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$, maka

1. $\mu = \upsilon$ jika $\mu(x) = \upsilon(x), \forall x \in X$.
2. $\mu \subseteq \upsilon$ jika $\mu(x) \leq \upsilon(x), \forall x \in X$.
3. Irisan dari dua subhimpunan fuzzy μ dan υ didefinisikan dengan
   $(\mu \cap \upsilon)(x) = \min\{\mu(x), \upsilon(x)\}, \forall x \in X$.

Definisi 6

Diberikan $\mu \in \mathbb{F}(X)$ dan $t \in [0,1]$. Subhimpunan level di μ dinotasikan dengan μ_t yang didefinisikan dengan, $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$.

Lemma 1

Diberikan sebarang $\mu, \upsilon \in \mathbb{F}(X)$,

1. Jika $\mu(x) \subseteq \upsilon(x)$ maka $\mu_a \subseteq \upsilon_a, \forall a \in [0,1]$.
2. Jika $a \leq b$ maka $\mu_b \subseteq \mu_a, \forall a, b \in [0,1]$.
3. $\mu(x) = \upsilon(x)$ jika dan hanya jika $\mu_a = \upsilon_a$, $\forall a \in [0,1]$.

Definisi 7

Diberikan $< N, +, .>$ adalah suatu near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy di near-ring N. Maka μ disebut near-ring fuzzy di N jika

1. $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$.
2. $\mu(-x) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x, y \in N$.
3. $\mu(x . y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$.

Definisi 8

Diberikan $< N, +, .>$ adalah near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N. Subhimpunan fuzzy μ di near-ring N disebut subnear-ring fuzzy pada near-ring N jika untuk setiap $x, y \in N$ berlaku :

1. $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
2. $\mu(x . y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

PEMBAHASAN

Definisi 9

Diberikan μ adalah subnear-ring fuzzy pada near-ring N, μ disebut ideal fuzzy pada near-ring N jika untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku :

1. $\mu(x) = \mu(y + x - y)$
2. $\mu(x . y) \geq \mu(y)$
3. $\mu(((x + z) . y) - (x . y)) \geq \mu(z)$

suatu μ disebut ideal kiri fuzzy pada near-ring N jika memenuhi syarat (1) dan (2). Sedangkan μ disebut ideal kanan fuzzy pada near-ring N jika memenuhi syarat (1) dan (3).

Lemma 2

Diberikan near-ring N. Jika μ adalah subnear-ring fuzzy pada near-ring N, maka untuk setiap $x \in N$

1. $\mu(0_N) \geq \mu(x)$
2. $\mu(-x) = \mu(x)$

Sifat-sifat Ideal Fuzzy Pada Near-ring

Berikut dijelaskan sifat dari ideal fuzzy pada near-ring yang berhubungan dengan subhimpunan level μ_t dari μ.

Teorema 1

Diberikan $< N, +, .>$ adalah near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N. Maka subhimpunan level μ_t adalah ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1], t \leq \mu(0_N)$ jika dan hanya jika μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N.

Bukti :

Diberikan near-ring N dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N.

a) Akan ditunjukkan $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$. Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0 - y_0) < \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu(x_0 - y_0) + \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\})$, maka $\min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\} > t_0 > \mu(x_0 - y_0) \leftrightarrow \mu(x_0) > t_0 \wedge \mu(y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0 - y_0) < t_0$.
Berdasarkan analisis di atas, maka $x_0, y_0 \in \mu_{t0}$ dan $(x_0 . y_0) \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t_0} bukan ideal pada near-ring near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$.

b) Akan ditunjukkan $\mu(x.y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$. Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0 . y_0) < \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$.
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu(x_0 . y_0) + \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\})$, maka $\min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\} > t_0 > \mu(x_0 . y_0) \leftrightarrow \mu(x_0) > t_0 \wedge \mu(y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0 - y_0) < t_0$.
Berdasarkan analisis di atas, maka $x_0, y_0 \in \mu_{t0}$ dan $(x_0 . y_0) \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t_0} bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$ sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x.y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ untuk setiap $x, y \in N$.

c) Akan ditunjukkan $\mu(x) = \mu(y + x - y)$, untuk setiap $x, y \in N$.
($*$) Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0) > \mu(y_0 + x_0 - y_0)$.
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu(x_0) + \mu(y_0 + x_0 - y_0))$, maka $\mu(x_0) > t_0 > \mu(y_0 + x_0 - y_0) \leftrightarrow \mu(x_0) > t_0 \wedge \mu(y_0 + x_0 - y_0) < t_0$.
Berdasarkan analisis di atas, maka $x_0 \in \mu_{t0}$ dan $y_0 + x_0 - y_0 \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t0} bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x) \leq \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$.
($**$)Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0) < \mu(y_0 + x_0 - y_0)$.
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu(x_0) + \mu(y_0 + x_0 - y_0))$, maka $\mu(y_0 + x_0 - y_0) > t_0 > \mu(x_0) \leftrightarrow \mu(y_0 + x_0 - y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0) < t_0$.
Berdasarkan analisis di atas, maka $y_0 + x_0 - y_0 \in \mu_{t_0}$ dan $x_0 \notin \mu_{t_0}$ yang mengakibatkan μ_{t_0} bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x) \geq \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

d) Akan ditunjukkan $\mu(x\,.\,y) \geq \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in N$ .Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0\,.\,y_0) < \mu(y_0)$.
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu(x_0\,.\,y_0) + \mu(y_0))$, maka $\mu(y_0) > t_0 > \mu(x_0 . y_0) \leftrightarrow \mu(y_0) > t_0 \wedge \mu(x_0 . y_0) < t_0$.
Berdasarkan analisis diatas, maka $y_0 \in \mu_{t_0}$ dan $x_0 . y_0 \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t_0} bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x.y) \geq \mu(y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

e) Akan ditunjukkan $\mu((x+z)\,.\,y - x\,.\,y) \geq \mu(z)$ untuk setiap $x, y, z \in N$. Andaikan ada $x_0, y_0, z_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu((x_0 + z_0)\,.\,y_0 - x_0\,.\,y_0) < \mu(z_0)$.
Pilih $t_0 = \frac{1}{2}(\mu((x_0 + z_0)\,.\,y_0 - x_0\,.\,y_0) + \mu(z_0))$, maka $\mu(i_0) > t_0 > \mu\big((x_0 + i_0).y_0 - x_0.y_0\big) \leftrightarrow \mu(i_0) > t_0 \wedge \mu\big((x_0 + i_0).y_0 - x_0.y_0\big) < t_0$.
Berdasarkan analisa di atas, maka $i_0 \in \mu_{t0}$ dan $\big((x_0 + i_0)y_0 - x_0 y_0\big) \notin \mu_{t0}$ yang mengakibatkan μ_{t0} bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan μ_t ideal pada near-ring N untuk setiap $t \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu((x + i).y - x.y < \mu(i)$, untuk setiap $x, y, i \in N$.

Jadi terbukti bahwa jika μ_t adalah ideal pada near-ring N maka μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N.

($\leftarrow$) Akan dibuktikan jika μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N maka untuk setiap $t \in [0,1]$ dan $t \leq \mu(0_N)$, μ_t adalah ideal pada near-ring N.

1) Karena $\mu_t \neq \emptyset$ maka ada $x, y \in \mu_t$ sedemikian hingga $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$.
$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \min\{t, t\} \geq t$
Sehingga untuk setiap $x, y \in \mu_t$ berlaku $\mu(x-y) \geq t$ dan $x - y \in \mu_t$.
2) Karena $\mu_t \neq \emptyset$ maka ada $x, y \in \mu_t$ sedemikian hingga $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$. Maka
$\mu(x\,.\,y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \min\{t, t\} \geq t$
Sehingga untuk setiap $x, y \in \mu_t$ berlaku $\mu(x\,.\,y) \geq t$ dan $x\,.\,y \in \mu_t$
3) Karena $\mu_t \neq \emptyset$ maka ada $x, y \in \mu_t$ sedemikian hingga $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$. Maka $\mu(y + x - y) = \mu(x) \geq t$
Sehingga untuk setiap $x, y \in \mu_t$ berlaku $\mu(y + x - y) \geq t$ dan $y + x - y \in \mu_t$.
4) Misalkan $y \in \mu_t$ dan $x \in N$ sedemikian hingga $\mu(y) \geq t$. Maka $\mu(x\,.\,y) \geq \mu(y) \geq t$
Sehingga untuk setiap $y \in \mu_t$ dan $x \in N$ berlaku $\mu(x\,.\,y) \geq t$ dan $x\,.\,y \in \mu_t$.
5) Misalkan $z \in \mu_t$ dan $x, y \in N$ sedemikian hingga $\mu(z) \geq t$. Maka
$\mu((x+z)\,.\,y - x\,.\,y) \geq \mu(z) \geq t$
Sehingga untuk setiap $z \in \mu_t$ dan $x, y \in N$ berlaku $\mu((x+z)\,.\,y - x\,.\,y) \geq t$ dan $(x+z)\,.\,y - x\,.\,y \in \mu_t$.

Jadi berdasarkan analisis di atas μ_t adalah ideal pada near-ring N.

Teorema 2

Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N. Jika I adalah ideal pada near-ring N, maka untuk setiap $t \in (0,1)$, ada μ ideal fuzzy pada near-ring N sedemikian hingga $\mu_t = I$.

Bukti :

Misalkan subhimpunan fuzzy μ pada near-ring N didefinisikan dengan

$\mu(x) = \begin{cases} t, x \in I \\ 0, x \notin I \end{cases}$,dengan $t \in (0,1)$.

Akan ditunjukkan ada μ ideal fuzzy pada near-ring N sedemikian hingga $\mu_t = I$.

1) Ambil sebarang $x, y \in N$.
   a) Jika $x, y \notin I$, maka $\mu(x) = 0$ dan $\mu(y) = 0$ sehingga
      - $\mu(x - y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \mu(y)$
   b) Jika $x, y \in I$, maka $x - y \in I$ dan $x . y \in I$ sehingga
      - $\mu(x - y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \mu(y)$
   c) Jika $x \in I$ dan $y \notin I$, maka $\mu(x) = t$ dan $\mu(y) = 0$ sehingga
      - $\mu(x - y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq 0 = \mu(y)$

   Jadi berdasarkan (a), (b), dan (c) maka
      - $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
      - $\mu(x . y) \geq \mu(y)$

2) Akan dibuktikan $\mu(x) = \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

   Andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0) < \mu(y_0 + x_0 - y_0)$. Karena $Im(\mu) = \{0, t\}$, maka kita peroleh $\mu(x_0) = 0$ dan $\mu(y_0 + x_0 - y_0) = t$ sehingga $x_0 \notin I$ dan $y_0 + x_0 - y_0 \in I$. Karena I adalah ideal pada near-ring N maka I subgrup normal di N sehingga $[x_0 - y_0] + [y_0 + x_0 - y_0] - [x_0 - y_0]$ dan diperoleh $x_0 \in I$. Kontradiksi dengan $x_0 \notin I$ sehingga pengandaian salah, seharusnya $\mu(x) \geq \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$. Selanjutnya, andaikan ada $x_0, y_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu(x_0) > \mu(y_0 + x_0 - y_0)$.Karena $Im(\mu) = \{0, t\}$, maka kita peroleh $\mu(x_0) = t$ dan $\mu(y_0 + x_0 - y_0) = 0$ sehingga $x_0 \in I$ dan $y_0 + x_0 - y_0 \notin I$. Akibatnya I bukan subgrup normal di N Kontradiksi dengan I subgrup normal di N sehingga pengandaian salah. Seharusnya $\mu(x) \leq \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

   Berdasarkan analisis di atas, maka $\mu(x) = \mu(y + x - y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

3) Akan dibuktikan $\mu((x + z) . y - x . y) \geq \mu(z)$ untuk setiap $x, y, z \in N$.

   Andaikan ada $x_0, y_0, z_0 \in N$ sedemikian hingga $\mu\big((x_0 + z_0) . y_0 - x_0 . y_0\big) < \mu(z_0)$.

   Karena $Im(\mu) = \{0, t\}$, maka kita peroleh $\mu\big((x_0 + z_0) . y_0 - x_0 . y_0\big) = 0$ dan $\mu(z_0) = t$ sehingga $\big((x_0 + z_0) . y_0 - x_0 . y_0\big) \notin I$ dan $z_0 \in I$. Akibatnya I bukan ideal pada near-ring N. Kontradiksi dengan I ideal pada near-ring N, sehingga pengandaian salah. Seharusnya $\mu((x + z) . y - x . y) \geq \mu(z)$ untuk setiap $x, y, z \in N$.

4) Akan dibuktikan $\mu_t = I$.

   Berdasarkan definisi μ_t maka

   $$\begin{aligned} \mu_t = \{x \in N | \mu(x) \geq t\} &= \{x \in N | \mu(x) = t \\ &\quad \vee \ \mu(x) > t\} \\ &= \{x \in N | \mu(x) = t\} = I \end{aligned}$$

   Jadi ada μ ideal fuzzy pada near-ring N sedemikian hingga $\mu_t = I$.

Teorema 3

Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N. Maka dua subhimpunan level μ_{t_1} dan μ_{t_2} di μ dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

Bukti :

($\rightarrow$)Misalkan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N dan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$. Akan dibuktikan tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

Andaikan ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$, maka $\mu(x) \geq t_1$ dan $\mu(x) < t_2$ sehingga $x \in \mu_{t_1}$ dan $x \notin \mu_{t_2}$.

Berdasarkan analisis di atas, maka $\mu_{t_1} \neq \mu_{t_2}$. Kontradiksi dengan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$, sehingga pengandaian salah. Seharusnya tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

($\leftarrow$) Misalkan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N dan tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$. Akan dibuktikan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$.

Ambil sebarang $x \in \mu_{t_2}$, maka $\mu(x) \geq t_2 > t_1$ yang mengakibatkan $\mu(x) > t_1$ sehingga $x \in \mu_{t_1}$ dengan kata lain $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$.

Selanjutnya, ambil sebarang $x \in \mu_{t_1}$, maka $\mu(x) \geq t_1$. Karena $\mu(x) \geq t_1$ dan tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$, maka $\mu(x) \nless t_2$ yang mengakibatkan $\mu(x) \geq t_2$ sehingga $x \in \mu_{t_2}$ dengan kata lain $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$.

Berdasarkan analisis di atas, maka $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$.

Selanjutnya dijelaskan sifat dari keluarga ideal pada near-ring N yang sama dengan keluarga semua subhimpunan level pada near-ring N.

Teorema 4

Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N. Jika $Im(\mu) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, dimana $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, maka keluarga ideal $\{\mu_{t_i} | 1 \leq i \leq n\}$ pada near-ring N adalah keluarga semua subhimpunan level di μ.

Bukti :

Misalkan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N, $Im(\mu)=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$, dimana $t_1<t_2<\cdots<t_n$ dan $\{\mu_{t_i}\mid 1\le i\le n\}$ adalah keluarga ideal pada near-ring N. Akan dibuktikan untuk setiap $t\in[0,1]$ ada $i\in\{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga $\mu_t=\mu_{t_i}$.

Karena $t_1<t_2<\cdots<t_n$ maka $t_i<t_{i+1}$ dengan $1\le i\le n-1$ sehingga menurut Lemma 2.2.1 $\mu_{t_{i+1}}\subseteq\mu_{t_i}$ atau $\mu_{t_1}\supseteq\mu_{t_2}\supseteq\dots\supseteq\mu_{t_n}$. Berdasarkan definisi $\mu_{t_1}=\{x\in N\mid\mu(x)\ge t_1\}$, $\{\mu_{t_i}\mid 1\le i\le n\}$ adalah keluarga ideal pada near-ring near-ring N, dan $\mu_{t_1}\supseteq\mu_{t_2}\supseteq\dots\supseteq\mu_{t_n}$ maka $\mu_{t_1}=N$.

Misalkan $t\in[0,1]$ dan $t\notin Im(\mu)$.

1) Jika $t<t_1$, maka menurut Lemma 2.2.1 $\mu_{t_1}\subseteq\mu_t$.
   Karena $\mu_{t_1}=N$ dan $\mu_{t_1}\subseteq\mu_t$, maka $\mu_t=\mu_{t_1}$.
2) Jika $t_i<t<t_{i+1}$ dengan $1\le i\le n-1$, maka menurut Lemma 2.9.1 $\mu_{t_{i+1}}\subseteq\mu_t$.
   Selanjutnya, ambil sebarang $x\in\mu_t$ maka $\mu(x)\ge t$. Andaikan ada $x\in N$ sedemikian hingga $t\le\mu(x)<t_{i+1}$, maka $t_i<t\le\mu(x)<t_{i+1}$. Akibatnya, $Im(\mu)=\{t,t_1,t_2,\dots,t_n\}$. Kontradiksi dengan $Im=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$. Jadi, tidak ada $x\in N$ sedemikian hingga $t\le\mu(x)<t_{i+1}$.
   Selanjutnya, $\mu(x)\ge t$ dan tidak ada $x\in N$ sedemikian hingga $t\le\mu(x)<t_{i+1}$, maka $\mu(x)\nless t_{i+1}$ yang mengakibatkan $\mu(x)\ge t_{i+1}$, yaitu $x\in\mu_{t_{i+1}}$ sehingga $\mu_t\subseteq\mu_{t_{i+1}}$.
   Karena $\mu_{t_{i+1}}\subseteq\mu_t$ dan $\mu_t\subseteq\mu_{t_{i+1}}$, maka $\mu_t=\mu_{t_{i+1}}$.

Jadi terbukti untuk setiap setiap $t\in[0,1]$ ada $i\in\{1,2,\dots,n\}$ sedemikian hingga $\mu_t=\mu_{t_i}$.

Berikut dijelaskan mengenai sifat homomorfisma near-ring pada ideal fuzzy di near-ring N.

Definisi 10

Misalkan $<N,+,.>$ dan $<M,+,.>$ adalah near-ring. Didefinisikan $f:N\to M$, jika v adalah subhimpunan fuzzy pda near-ring M maka subhimpunan fuzzy $\mu=v\ o f$ pada near-ring N yang didefinisikan dengan $\mu(x)=v(f(x))$ untuk setiap $x,y\in N$ disebut prapeta dari μ di bawah f.

Teorema 5

Diberikan $<N,+,.>$ dan $<M,\oplus,*>$ adalah near-ring dan $f:N\to M$ adalah homomorfisma near-ring. Prapeta homomorfisma near-ring pada ideal fuzzy pada near-ring N adalah ideal fuzzy pada near-ring M.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa μ adalah prapeta v di bawah f.
Ambil sebarang $x,y\in N$, maka berlaku

1) $\mu(x-y)=v(f(x-y))$
$$=v\big(f(x)-'f(y)\big)$$
$$\ge\min\{v(f(x)),v(f(y))\}$$
$$=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$
Diperoleh $\mu(x-y)\ge\min\{\mu(x),\mu(y)\}$,$\forall\, x,y\in N$.

2) $\mu(x\,.\,y)=v\big(f(x\,.\,y)\big)$
$$=v(f(x)*f(y))$$
$$\ge\min\{v(f(x),v(f(y)\}$$
$$=\min\{\mu(x),\mu(y)\}$$
Diperoleh $\mu(x\,.\,y)\ge\min\{\mu(x),\mu(y)\}$,$\forall\, x,y\in N$.

3) $\mu(y+x-y)=v(f(y+x-y))$
$$=v(f(y)\oplus f(x)-'f(y))$$
$$=v\big(f(x)\big)=\mu(x)$$
Diperoleh $\mu(y+x-y)=\mu(x)$,$\forall\, x,y\in N$.

4) $\mu(x\,.\,y)=v(f(x\,.\,y))$
$$=v(f(x)*f(y)\ge v\big(f(y)\big)=\mu(y)$$
Diperoleh $\mu(x\,.\,y)\ge\mu(y)$,$\forall\, x,y\in N$.

5) $\mu((x+z)\,.\,y-x\,.\,y))=v(f((x+z)\,.\,y-x\,.\,y))$
$$=v(\big(f(x)\oplus f(z)\big)*f(y)-'f(x)*f(y))$$
$$\ge v\big(f(z)\big)=\mu(z)$$
Diperoleh $\mu((x+z)\,.\,y-x\,.\,y))\ge\mu(z)$,$\forall\, x,y,z\in N$.

Jadi berdasarkan analisis di atas μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N
.

Definisi 11

Diberikan $<N,+,.>$ dan $<M,+,.>$ adalah near-ring. Jika μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N dan didefinisikan $f:N\to M$, maka subhimpuna fuzzy v pada near-ring M didefinisikan dengan
$$v(y)=\sup_{x\in\{f^{-1}(y)\}}\{\mu(x)\}$$
Untuk semua $y\in M$ disebut peta dari μ di bawah f.

Definisi 12

Subhimpunan fuzzy μ pada near-ring N dikatakan mempunyai sifat sup properti jika $\forall\, T\subseteq N$, ada $t_0\in T$ sedemikian hingga
$$\mu(t_0)=\sup_{t\in T}\{\mu(t)\}$$

Teorema 6

Diberikan $<N,+,.>$, $<M,\oplus,*>$ adalah near-ring dan $f:N\to M$ adalah homomorfisma near-ring. Peta homomorfisma pada ideal fuzzy pada near-ring N dengan sifat sup properti adalah ideal fuzzy pada near-ring M.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa v adalah ideal fuzzy pada near-ring M. Misalkan $x',y',z'\in M$. Karena μ mempunyai sifat sup properti maka ada $x_0\in\{f^{-1}(x')\}$, $y_0\in\{f^{-1}(y')\}$, dan $z_0\in\{f^{-1}(z')\}$ sedemikian hingga
$\mu(x_0)=\sup_{t\in\{f^{-1}(x')\}}\{\mu(t)\}$,
$\mu(y_0)=\sup_{t\in\{f^{-1}(y')\}}\{\mu(t)\}$,
$\mu(z_0)=\sup_{t\in\{f^{-1}(z')\}}\{\mu(t)\}$.
Maka kita peroleh

1. $v(x'-'y')=\sup_{t\in\{f^{-1}(x'-'y')\}}\{\mu(t)\}$
$$\ge\mu(x_0-y_0)$$
$$\ge\min\{\mu(x_0),\mu(y_0)\}$$
$$=\min\{\sup_{t\in\{f^{-1}(x')\}}\{\mu(t)\},\sup_{t\in\{f^{-1}(y')\}}\{\mu(t)\}\}$$
$$=\min\{v(x'),v(y')\}$$

Sehingga diperoleh $v(x'-'y')\ge\min\{v(x'),v(y')\}$, $\forall\, x',y'\in M$.

2. $v(x' * y') = \sup_{t\in\{f^{-1}(x' * y')\}}\{\mu(t)\}$
$\geq \mu(x_0 \,.\, y_0)$
$\geq \min\{\mu(x_0), \mu(y_0)\}$
$= \min\{\sup_{t\in\{f^{-1}(x')\}}\{\mu(t)\}, \sup_{t\in\{f^{-1}(y')\}}\{\mu(t)\}$
$= \min\{v(x'), v(y')$

Sehingga diperoleh $v(x' * y') \geq \min\{v(x'), v(y')\}$, $\forall\, x', y' \in M$

3. $v(y' \oplus x' -' y') = \sup_{t\in\{f^{-1}(y' \oplus x' -' y')\}}\{\mu(t)\}$
$\geq \mu(y_0 + x_0 - y_0)$
$= \mu(x_0)$
$= \sup_{t\in\{f^{-1}(x')\}}\{\mu(t)\}$
$= v(x')$

Dan

$v(x') = \sup_{t\in\{f^{-1}(x')\}}\{\mu(t)\}$
$= \mu(x_0)$
$= \mu(y_0 + x_0 - y_0)$
$= \sup_{t\in\{f^{-1}(y' \oplus x' -' y')\}}\{\mu(t)\} = v(y' \oplus x' -' y')$

Sehingga diperoleh $v(y' \oplus x' -' y') = v(x')$, $\forall\, x', y' \in M$.

4. $v(x' * y') = \sup_{t\in\{f^{-1}(x' * y')\}}\{\mu(t)\}$
$\geq \mu(x_0 \,.\, y_0)$
$\geq \mu(y_0)$
$= \sup_{t\in\{f^{-1}(y')\}}\{\mu(t)\}$
$= v(y')$

Sehingga diperoleh $v(x' * y') \geq v(y')$, $\forall\, x', y' \in M$.

5. $v\left((x' \oplus z') * y' -' x' * y'\right)$
$= \sup_{t\in\{f^{-1}((x' \oplus z') * y' -' x' * y')\}}\{\mu(t)\}$
$\geq \mu((x_0 + z_0) \,.\, y_0 - x_0 \,.\, y_0)$
$\geq \mu(z_0) = \sup_{t\in\{f^{-1}(z')\}}\{\mu(t)\}$
$= v(z')$

Sehingga diperoleh $v\left((x' \oplus z') * y' -' x' * y'\right) \geq v(z')$, $\forall\, x', y', z' \in M$.

Jadi berdasarkan analisis di atas, v adalah ideal fuzzy pada near-ring M.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada BAB III dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Dalam struktur aljabar fuzzy terdapat suatu kelas dari ideal fuzzy near-ring. Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N. Maka μ disebut ideal fuzzy pada near-ring N jika untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku :
   - $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
   - $\mu(x \,.\, y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
   - $\mu(x) = \mu(y + x - y)$
   - $\mu(x \,.\, y) \geq \mu(y)$
   - $\mu((x + z) \,.\, y - x \,.\, y) \geq \mu(z)$
2. Ada beberapa sifat yang berlaku pada ideal fuzzy di near-ring N, yaitu :
   - Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah subhimpunan fuzzy pada near-ring N. Maka subhimpunan level μ_t adalah ideal pada N untuk setiap $t \in [0,1], t \leq \mu(0_N)$ jika dan hanya jika μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N.
   - Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N. Maka dua subhimpunan level μ_{t_1} dan μ_{t_2} di μ dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada $x \in N$ sedemikian sehingga $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.
   - Diberikan $< N, +, . >$ adalah near-ring dan μ adalah ideal fuzzy pada near-ring N. Jika $Im(\mu) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$,dimana $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, maka keluarga ideal $\{\mu_{t_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ pada near-ring N adalah keluarga semua subhimpunan level di μ.

Pada jurnal ini juga dibahas mengenai peta dan prapeta ideal fuzzy pada near-ring, yaitu jika diberikan $< N, +, . >$ dan $< M, \oplus, * >$ adalah near-ring dan $f: N \to M$ adalah homomorfisma near-ring. Prapeta homomorfisma near-ring pada ideal fuzzy pada near-ring N adalah ideal fuzzy pada near-ring M. Dan peta homomorfisma pada ideal fuzzy pada near-ring N dengan sifat sup properti adalah ideal fuzzy pada near-ring M.

Saran

Penulisan jurnal hanya membahas ideal fuzzy near-ring, karena keterbatasan pengetahuan penulis, pembaca yang berminat dapat melanjutkan penulisan tentang ideal fuzzy pada near-ring dengan menambahkan teori lain yang berkaitan dengan ideal fuzzy near-ring.

1. DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman,S.dkk.2012. Ideal Fuzzy Near-ring. Jurnal matematika dan Terapan:Univ. Lampung Mangkurat

Bartle,Robert G, dan Sherbert,Donal R.2000.*Introduction to Real Analysis Third edition*.Amerika:John Wiley and Sons,Inc.

Fraleigh,Jonh B.1982. *A First Course in Abstract Algebra*. Publishing Company: Addison-Wesley

Gallian,Joseph.A.2008.*Contemporary Abstract Algebra*. University Of Minnesota Duluth

Herstein.I.N.1995. *Abstract Algebra*. Library of Cataloging in Publication Data

Kandasamy.W.B.V.2002. *Smarandache near-rings*. American Research Press Rehoboth

Kandasamy.W.B.V.2003. *Smarandache fuzzy algebra*. American Research Press Rehoboth

Kim, Seung Dong dan Hee Sik Kim.1996. *On Fuzzy Ideals Of Near-rings*. Bull.KoreanMath

Masriyah. 2007. Pengantar Dasar Matematika. Surabaya:Unesa University Press

Sukahar dan Kusrini.2001. Struktur Aljabar I. Surabaya:Unesa University Press

Zimmermann. H.J. 1992. *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* Second, Revised Edition. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.