MINIMUM PENUTUP TITIK DAN MINIMUM PENUTUP SISI PADA GRAF KOMPLIT DAN GRAF BIPARTIT KOMPLIT

Yessi Riskianda Kusumawardani

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : yezzy_zeecha@yahoo.co.id

Budi Rahadjeng, M.Si.

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail : rahajeng13@yahoo.com

Abstrak

Penutup titik graf G adalah himpunan titik $C \subseteq V(G)$ sedemikian hingga setiap sisi di G terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di C. Penutup titik dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup titik C' pada G sedemikian hingga $|C'| < |C|$. Ukuran minimum penutup titik pada graf G dilambangkan dengan $\alpha(G)$. Penutup sisi graf G adalah himpunan sisi $Q \subseteq E(G)$ sedemikian hingga setiap titik di G terkait langsung dengan paling sedikit satu sisi di C. Penutup sisi dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup sisi Q' pada G sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$. Ukuran minimum penutup sisi pada graf G dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$. Skripsi ini bertujuan untuk membuktikan ukuran minimum penutup titik dan ukuran minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit.

Kata kunci: penutup titik, penutup sisi, graf komplit, graf bipartit komplit.

Abstract

A vertex cover of graph G is a set of vertices$C \subseteq V(G)$ such that each edge in Ghas at least one vertex incident in C. A vertex cover is called minimum in graph Gif there isn't vertex cover C' of G such that$|C'| < |C|$, and its size is denoted by $\alpha(G)$. An edge cover of graph G is a set of edges$Q \subseteq E(G)$such that each vertex in G has at least one edge incident in Q. An edge cover is called minimum in graph G if there isn't edge cover Q' of G such that $|Q'| < |Q|$, and its size is denoted by $\alpha_1(G)$.This paper aims to prove a minimum size vertex cover and a minimum size edge cover on complete graph and complete bipartite graph.

Keyword: vertex cover, edge cover, complete graph, complete bipartite graph.

1. PENDAHULUAN

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan titik-titik di V yang disebut sisi. Penutup titik dari graf G adalah himpunan titik $C \subseteq V(G)$ sedemikian hingga setiap sisi di G terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di C. Penutup titik dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup titik C' pada G sedemikian hingga $|C'| < |C|$. Ukuran minimum penutup titik pada graf Gdilambangkan dengan $\alpha(G)$. Penutup sisi dari graf G adalah himpunan sisi$Q \subseteq E(G)$ sedemikian hingga setiap titik di G terkait langsung dengan paling sedikit satu sisi di C. Penutup sisi dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup sisi Q' pada G sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$. Ukuran minimum penutup sisi pada graf Gdilambangkan dengan $\alpha_1(G)$.

Beberapa penelitian yang mengkaji tentang penutup diantaranya adalah jurnal yang berjudul "On Minimum Vertex Covers in the Generalized Petersen Graph" oleh Mehdi Behzad, Pooya Hatami, dan E. S. Mahmoodian membahas tentang sifat-sifat dari penutup titik pada graf Petersen diperumum $P(n, 2)$, dan jurnal "Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_C S_n^k$ dan Graf Roda$(m)_C W_n^k$" oleh Nurul Hijriyah dari UNIBRAWdan Wahyu H. Irawan dari UIN Malang. Berdasarkan latar belakang tersebut penulis ingin melakukan kajian tentang minimum penutup titik dan minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit

2. LANDASAN TEORI

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga yang disebut titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan titik-titik di V yang disebut sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$.

Definisi 2

Jika $e = uv$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah titik yang berhubungan langsung (*adjacent*), sisi e terkait langsung (*incident*).dengan titik v dan titik u

Definisi 3

Sebuah graf komplit (graf lengkap) dengan n titik, dilambangkan dengan K_n , adalah graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan gelung dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

Definisi 4

Sebuah graf G disebut graf bipartit jika himpunan titik di G dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian A dan B sedemikian hingga setiap sisi G menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B, (A, B) disebut partisi dari G.

Definisi 5

Jika graf G sederhana dan bipartit dengan partisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A berhubungan langsung dengan setiap titik di B, maka G disebut graf bipartit komplit, dilambangkan dengan $K_{m,n}$ dimana $|A| = m$ dan $|B| = n$.

Definisi 6

Penutup titik graf G adalah himpunan titik $C \subseteq V(G)$ sedemikian hingga setiap sisi di G terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di C. Penutup titik C dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup titik C' pada G sedemikian hingga $|C'| < |C|$. Ukuran minimum penutup titik pada graf G dilambangkan dengan $\alpha(G)$.

Definisi 7

Penutup sisi graf G adalah himpunan titik $Q \subseteq E(G)$ sedemikian hingga setiap titik di G terkait langsung dengan paling sedikit satu sisidi Q. Penutup sisi Q dikatakan minimal pada graf G jika tidak ada penutup sisi Q' pada G sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$. Ukuran minimum penutup sisi pada graf G dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Minimum Penutup Titik dan Sisi Graf Komplit

Lemma 1:

$\alpha(K_n) = n - 1$

Bukti:

Misalkan $V(K_n) = \{v_i | 1 \le i \le n\}$. Misalkan C adalah penutup titik K_n. Klaim $C = \{v_i | 1 \le i \le n - 1\}$. Akan ditunjukkan bahwa C adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf komplit $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$, sisi-sisi yang terkait dengan titik v_1 adalah $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, \dots, v_1v_n$ v_n sehingga v_1 menutup/mengcover (untuk selanjutnya dalam makalah ini digunakan istilah mengcover) $n - 1$ sisi K_n. Sisi-sisi yang terkait dengan titik v_2 adalah $v_2v_1, v_2v_3, v_2v_4, \dots, v_2v_n$ sehingga v_2 mengcover $n - 1$ sisi K_n. Tetapi karena sisi v_2v_1 sudah tercover oleh titik v_1 maka titik v_2 mengcover $n - 2$ sisi K_n. Sisi-sisi yang terkait dengan titik v_{n-1} adalah $v_{n-1}v_1, v_{n-1}v_2, v_{n-1}v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, karena sisi $v_{n-1}v_1, v_{n-1}v_2, v_{n-1}v_3, \dots, v_{n-2}v_{n-1}$ telah tercover oleh titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}$ maka titik v_{n-1} mengcover $n - (n - 1)$ sisi. Demikian juga dengan titik v_n, sisi-sisi yang terkait pada titik v_n adalah $v_nv_1, v_nv_2, v_nv_3, \dots, v_nv_{n-1}$ sehingga v_n mengcover sisi v_nv_j , $j = 1,2,3,..,n$ dan $j \ne n$. Tetapi karena sisi $v_nv_nv_1, v_nv_2, v_nv_3, \dots, v_nv_{n-1}$ sudah tercover oleh titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ maka titik v_n tidak mengcover sisi K_n. Sehingga diperoleh banyaknya sisi yang tercover oleh titik di C adalah

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots\cdots + (n-(n-1))$$
$$= n(n-1) - (1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n - 1)$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

Dengan demikian semua sisi K_n telah tercover oleh titik-titik di C, $|C| = n - 1$. C adalah minimum penutup titik dari K_n karena tidak ada penutup titik C' pada K_n sedemikian hingga $|C'| < |C|$.

Berdasarkan bukti diatas maka diperoleh $\alpha(K_n) = |C| = n - 1$

Lemma 2:

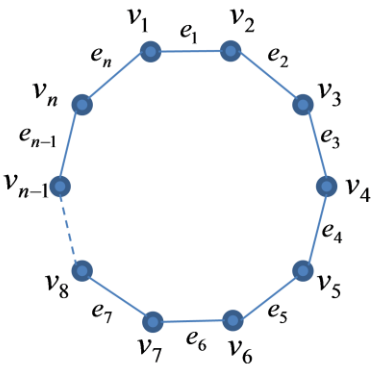
$$\alpha_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , untuk\ n\ genap \\ \frac{n+1}{2} & , untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $V(K_n) = \{v_i | 1 \le i \le n\}$.

1. n=genap

   Andaikan Q adalah penutup sisi K_n. Klaim $Q = \{e_i | 1 \le i \le n - 1, i\ ganjil\}$. Akan ditunjukkan bahwa Q adalah minimum penutup sisi. Pandang sikel luar graf komplit yaitu $C : v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_1$.



Gambar 3.1 Sikel C

Sisi e_i merupakan sisi yang menghubungkan titik v_i dan titik v_{i+1}. Sisi e_1 dipilih oleh Q maka e_1 mengcover titik v_1 dan v_2. Jika sisi e_2 dipilih oleh Q maka sisi e_2 mengcover titik v_2 dan v_3 tetapi karena titik v_2 telah tercover oleh sisi e_1 maka sisi e_2 tidak dipilih oleh Q. Seterusnya sampai sisi e_{n-2} dipilih oleh Q maka e_{n-2} mengcover titik v_{n-2} dan v_{n-1}, sisi e_n tidak dipilih Q karena titik v_1 dan titik v_n telah tercover oleh sisi e_1 dan e_{n-2}. Demikian juga dengan sisi-sisi dengan label berindeks genap lainnya tidak dipilih oleh Q karena semua titik di $V(K_n)$ telah tercover oleh sisi e_i, i ganjil. Sehingga diperoleh penutup sisi $Q = \{e_1, e_3, e_5, \ldots, e_{n-1}\}, |Q| = \frac{n}{2}$ untuk n genap. Q merupakan minimum penutup sisi K_n karena tidak ada penutup sisi Q' pada K_n sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$.

Sehingga diperoleh: $\alpha_1(K_n) = |Q| = \frac{n}{2}$

2. n = ganjil

   Andaikan Q adalah penutup sisi K_n. Klaim $Q = \{e_i | 1 \leq i \leq n-1, i\ ganjil\}$. Pandang sikel luar graf komplit yaitu $C : v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n, v_1$, gambar 3.1.

   Sisi e_1 dipilih oleh Q maka e_1 mengcover titik v_1 dan v_2. Jika sisi e_2 dipilih oleh Q maka sisi e_2 mengcover titik v_2 dan v_3 tetapi karena titik v_2 telah tercover oleh sisi e_1 maka sisi e_2 tidak dipilih oleh Q. Sisi e_3 dipilih oleh Q maka e_3 mengcover titik v_3 dan v_4. Demikian juga dengan sisi-sisi dengan label berindeks genap lainnya tidak dipilih oleh Q. Sehingga diperoleh penutup sisi $Q = \{e_1, e_3, e_5, \ldots, e_{n-1}\}$, $|Q| = \frac{n+1}{2}$. Q merupakan minimum penutup sisi K_n karena tidak ada penutup sisi Q' pada K_n sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$.

Berdasarkan 1 dan 2 diperoleh:

$$\alpha_1(K_n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , untuk\ n\ genap \\ \dfrac{n+1}{2} & , untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

3.2 Minimum Penutup Titik dan Sisi pada Graf Bipartit Komplit

Lemma 3:

Ukuran minimum penutup titik pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$ dengan partisi (M, N) dimana $|M| = m$ dan $|N| = n$ adalah:

$$\alpha(K_{m,n}) = min\{|M|, |N|\}$$

Bukti:

Misalkan $K_{m,n}$ graf bipartit komplit dengan partisi $M = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$ dan $N = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$.

Dibagi menjadi 3 kasus, yakni:

1. Untuk $m = n$

   Andaikan C adalah penutup titik dari $K_{m,n}$. Klaim $C = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$. Akan ditunjukkan bahwa C adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Akibatnya titik v_1 mengcover n sisi dari $K_{m,n}$, titik v_2 mengcover n sisi dari $K_{m,n}$, titik v_m mengcover n sisi dari $K_{m,n}$ sehingga diperoleh titik v_i mengcover $n \cdot m$ sisi dari $K_{m,n}$ demikian juga dengan titik u_i mengcover $n \cdot m$ sisi dari $K_{m,n}$. Semua sisi pada $K_{m,n}$ telah tercover oleh titik-titik di C. C merupakan minimum penutup titik dari $K_{m,n}$, karena tidak ada penutup titik C' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|C'| < |C|$.

   Diperoleh minimum penutup titik pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m = n$ adalah $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$.

2. Untuk $m < n$

   Andaikan C adalah penutup titik $K_{m,n}$. Akan ditunjukkan bahwa C adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak berhubungan langsung. Jika titik di N dipilih oleh C maka v_1 mengcover n sisi $K_{m,n}$, titik v_2 mengcover n sisi $K_{m,n}$, dan seterusnya sampai titik v_m mengcover n sisi $K_{m,n}$ sehingga diperoleh titik v_i mengcover $n \cdot m$ sisi $K_{m,n}$. Demikian juga jika titik di M dipilih oleh C maka u_i mengcover $m \cdot n$ sisi $K_{m,n}$.

   Karena $m < n$, pilih $C = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$ sebagai minimum penutup titik, karena tidak ada penutup titik C' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|C'| < |C|$.

   Diperoleh titik minimum penutup pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m = n$ adalah $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$. Diperoleh minimum titik penutup pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m < n$ adalah $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$

3. Untuk $m > n$

Andaikan C adalah penutup titik $K_{m,n}$. Akan ditunjukkan bahwa C adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Jika titik v_i dipilih oleh C maka v_1 mengcover n sisi dari $K_{m,n}$, titik v_2 mengcover n sisi dari $K_{m,n}$, dan seterunya sampai titik v_m mengcover n sisi dari $K_{m,n}$ sehingga diperoleh titik v_i mengcover $n \cdot m$ sisi dari $K_{m,n}$. Demikian juga jika titik u_i dipilih oleh C maka u_i mengcover $m \cdot n$ sisi dari $K_{m,n}$.

Karena $m > n$, pilih $C = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ sebagai minimum penutup titik, karena tidak ada penutup titik C' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|C'| < |C|$.

Diperoleh minimum penutup titik pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m = n$ adalah $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$. Diperoleh ukuran minimum titik penutup pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m > n$ adalah $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |N| = n$

Berdasar 1, 2, dan 3 diperoleh $\alpha(K_{m,n}) = min\{|M|, |N|\}$.

Lemma 4:

$\alpha_1(K_{m,n}) = maks\{|M|, |N|\}$

Bukti:

Misal $K_{m,n}$ graf bipartit komplit dengan partisi $M = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$ dan $N = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$.

Dibagi menjadi 3 kasus, yakni:

1. Untuk $m = n$

   Andaikan Q adalah penutup sisi $K_{m,n}$. Klaim $Q = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq m\}$. Akan ditunjukkan bahwa Q adalah minimum penutup sisi. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Sisi $v_1 u_1$ dipilih oleh Q maka sisi $v_1 u_1$ mengcover titik v_1 dan u_1 , sisi $v_2 u_2$ dipilih oleh Q maka sisi $v_2 u_2$ mengcover titik v_2 dan u_2, sisi $v_3 u_3$ dipilih oleh Q maka sisi $v_3 u_3$ mengcover titik v_3 dan u_3 , seterusnya sampai sisi $v_m u_m$ dipilih oleh Q maka sisi $v_m u_m$ mengcover titik v_m dan u_m . Karena $m = n$ maka sisi $v_i u_i$ mengcover $m + n$ titik dari $K_{m,n}$, dengan demikian semua titik dari $K_{m,n}$ telah tercover oleh Q . Q merupakan minimum penutup sisi dari $K_{m,n}$, karena tidak ada penutup sisi Q' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$.

   Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m = n$ adalah $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = |M| = m$.
2. Untuk $m < n$

   Andaikan Q adalah penutup sisi $K_{m,n}$, klaim $Q = \{v_1 u_1, v_2 u_2, v_3 u_3, \dots \dots, v_m u_m, v_1 u_{m+1}, v_1 u_{m+2}, \dots \dots, v_1 u_n$. Karena $m < n$ maka sisi $v_i u_i, 1 \leq i \leq m$ mengcover $2 \cdot m$ titik dari $K_{m,n}$. Selanjutnya sisi $v_1 u_{m+1}$ dipilih Q maka sisi $v_1 u_{m+1}$ mengcover titik v_1 dan u_{m+1}, sisi $v_1 u_{m+2}$ dipilih Q maka sisi $v_1 u_{m+2}$ mengcover titik v_1 dan u_{m+2}, seterusnya sampai sisi $v_1 u_n$ dipilih Q maka sisi $v_1 u_n$ mengcover titik v_1 dan u_n . Sisi $v_1 u_{m+1}, v_1 u_{m+2}, \dots \dots, v_1 u_n$ mengcover $n - m$ titik dari $K_{m,n}$, diperoleh banyaknya titik yang tercover oleh Q adalah $(2 \cdot m) + (n - m) = m + n$.

   Dengan demikian semua titik dari $K_{m,n}$ telah tercover oleh Q . Q merupakan penutup sisi minimum dari $K_{m,n}$, karena tidak ada penutup sisi Q' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$. Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m < n$ adalah $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = n$.
3. Untuk $m > n$

   Andaikan Q adalah penutup sisi $K_{m,n}$. Klaim $Q = \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n, v_{n+1} u_1, v_{n+2} u_1, \dots, v_m u_1\}$. Akan dibuktikan Q merupakan minimum penutup sisi. Sama seperti pada kasus 1, sisi $v_i u_i$ dipilih oleh Q . Karena $m > n$ maka sisi $v_i u_i, 1 \leq i \leq n$ mengcover $2 \cdot n$ titik dari $K_{m,n}$. Selanjutnya sisi $v_{n+1} u_1$ dipilih Q maka sisi $v_{n+1} u_1$ mengcover titik v_{n+1} dan u_1, sisi $v_{n+2} u_1$ dipilih Q maka sisi $v_{n+2} u_1$ mengcover titik v_{n+2} dan u_1, seterusnya sampai sisi $v_m u_1$ dipilih Q maka sisi $v_m u_1$ mengcover titik v_m dan u_1 . Sisi $v_i u_i, v_{n+1} u_1, v_{n+2} u_1, \dots \dots, v_m u_1$ mengcover $m - n$ titik dari $K_{m,n}$, diperoleh banyaknya titik yang tercover oleh Q adalah $(2 \cdot n) + (m - n) = n + m$. Dengan demikian semua titik dari $K_{m,n}$ telah tercover oleh Q. Q merupakan minimum penutup sisi dari $K_{m,n}$, karena tidak ada penutup sisi Q' pada $K_{m,n}$ sedemikian hingga $|Q'| < |Q|$. Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$, $m > n$ adalah $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = m$

Berdasar 1, 2, dan 3 diperoleh $\alpha_1(K_{m,n}) = maks\{|M|, |N|\}$.

4. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Ukuran minimum penutup titik minimum dan minimum penutup sisi pada graf komplit K_n dengan $n \in \mathbb{N}$ masing-masing adalah:

   $$\alpha(K_n) = n - 1 \text{dan} \alpha_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , untuk\ n\ genap \\ \frac{n+1}{2} & , untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

2. Ukuran minimum penutup titik minimum dan minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit $K_{m,n}$dengan $m, n \in \mathbb{N}$ masing-masing adalah:
   $\alpha(K_{m,n}) = min\{|M|, |N|\}$ dan
   $\alpha_1(K_{m,n}) = maks\{|M|, |N|\}$

4.2 Saran

Pada makalah ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan minimum penutup titik dan minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit, Maka dari itu, untuk penulisan makalah selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah $\alpha(G)$dan α_1(G) pada graf-graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Chatrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth.Inc.

Babak Behsaz, Pooya Hatami, and Ebadollah S. Mahmoodian. 2006. *On minimum vertex cover of generalized Petersen graphs*. Australasian J. Combin. http://sina.sharif.edu/~emahmood/papers/MR2381433.pdf. Diakses 25 September 2013.

Budayasa, K. 2003. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Hijriyah N dan Irawan W. 2012. Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_C S_n^k$ dan Graf Roda $(m)_C W_n^k$. Jurnal Chaucy. http://ejournal.uinmalang.ac.id/index.php/Math/article/view/2224/pdf. Diakses 11 Februari 2014.

M. Behzad, P. Hatami, and E.S Mahmoodian. 2006. Minimum vertex cover of generalized Petersen graph P(n,2). http://sina.sharif.edu/~emahmood/papers/MR2521808.pdf. Diakses 25 September 2013.