

DEKOMPOSISI GRAF SIKEL, GRAF RODA, GRAF GIR DAN GRAF PERSAHABATAN

Nur Rahmawati

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail: liebie0711@gmail.com

Budi Rahajeng, S.Si, M.Si

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,
e-mail: rahajeng13@yahoo.com

Abstrak

Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf tak kosong dari $G\{H_i\}$ sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$, untuk suatu subgraf tak kosong E_i dari $E(G)$, dimana $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Subgraf H_i pada dekomposisi G tidak memuat titik terisolasi. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G , maka dinotasikan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ dan G didekomposisikan ke dalam subgraf H_1, H_2, \dots, H_t di mana $|\{H_i\}| = t$. Dengan kata lain, jika $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ adalah dekomposisi graf G .

Dekomposisi dari graf sikel C_n adalah mK_2 -dekomposisi dengan $m|n, n, m \in \mathbb{N}, m \neq n$. Graf roda $W_n, n \geq 3$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi, graf gir $G_n, n \geq 3$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi dan Graf persahabatan $F_n, n \geq 2$ merupakan C_3 dekomposisi.

Kata kunci: Dekomposisi, graf sikel, graf roda, graf gir, graf persahabatan

Abstract

A decomposition of a graph G is collection $\{H_i\}$ of nonempty subgraphs such that $H_i = \langle E_i \rangle$ for some (nonempty) subset E_i of $E(G)$, where $\{E_i\}$ is a partition of $E(G)$. Thus no subgraph H_i in a decomposition of G contains isolated vertices. If $\{H_i\}$ is a decomposition of G , then we write $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ and say G is decomposed into the subgraphs H_1, H_2, \dots, H_t where $|\{H_i\}| = t$. Indeed, if $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ is a decomposition of a graph G .

A decomposition of cycle graph C_n is mK_2 -decomposition with $m|n, n, m \in \mathbb{N}, m \neq n$. Wheels graph $W_n, n \geq 3$ is $2K_2$ -decomposition, gears graph $G_n, n \geq 3$ is $3K_2$ -decomposition and friendship graph $F_n, n \geq 2$ is C_3 decomposition.

Keywords: Decomposition, cycle graph, wheels graph, gears graph, friendship graph

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Königsberg yang tercatat dalam sejarah untuk pertama kali menggunakan graf. Seiring perkembangan jaman dan teknologi, teori graf banyak dijadikan model dalam memecahkan masalah yang ada di kehidupan.

Teori graf telah mengalami perkembangan yang begitu bagus. Saat ini banyak sekali masalah yang berkaitan dengan graf yang telah dikaji. Salah satunya

adalah dekomposisi graf. Salah satunya adalah dekomposisi graf. penerapan dekomposisi graf bukan hanya dalam matematika tetapi telah banyak diterapkan pada berbagai ilmu pengetahuan lain seperti kimia, fisika, biologi dan pengetahuan lain. Banyak permasalahan yang menggunakan penerapan dekomposisi graf seperti jaringan listrik, siklus suatu makhluk hidup dan berbagai permasalahan lainnya.

Kemunculan jurnal pertama yang membahas dekomposisi oleh Jacobson, M.S., Truszczynski, M. and Tuza, Zs., "Decompositions of regular bipartite graphs"(1991) yang membahas tentang dekomposisi isomorfik graf bipartit biasa menjadi pohon dan hutan dan membuktikan bahwa: (1) sebuah graf bipartisi

beraturan- r didekomposisikan menjadi pohon dengan banyak sisi r , (2) setiap graf bipartisi beraturan- r didekomposisikan menjadi graf bintang ganda dengan banyak sisi r , dan (3) setiap graf bipartisi beraturan-4 didekomposisikan menjadi lintasan P_4 . Penelitian mengenai dekomposisi telah dibahas dalam skripsi “Dekomposisi Graf Komplit” oleh Rina Munawaroh dari UIN Malang (2009). Pembahasan mengenai dekomposisi graf masih dapat dilanjutkan pada dekomposisi graf yang lain. Berdasarkan hal tersebut, maka penulis mengambil judul skripsi ini, yaitu “Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan”.

2. KAJIAN PUSTAKA

Definisi 1

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut dua himpunan, yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen – elemennya disebut titik dan himpunan berhingga yang mungkin kosong $E(G)$ yang elemen – elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan dari titik – titik di $V(G)$. $V(G)$ disebut himpunan titik dari graf dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari graf G .

Definisi 2

Titik terisolasi (isolated vertex) adalah titik yang tidak satupun berhubungan langsung dengan titik – titik yang lainnya.

Definisi 3

Untuk $n \geq 3$, Graf sikel (Cycle Graph) merupakan graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n . Banyak sisi pada sebuah graf sikel yang terdiri dari n buah titik adalah n .

Definisi 4

Untuk $n \geq 3$, Graf Roda W_n (Wheels Graph) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik baru pada graf sikel C_n sedemikian hingga setiap titik pada graf sikel C_n berhubungan langsung dengan titik baru tersebut. Banyak titik graf roda adalah $n + 1$, sedangkan banyak sisinya adalah $2n$

Definisi 5

Untuk $n \geq 3$, Graf gir (Gears Graph) dilambangkan G_n adalah graf roda W_n dengan tambahan sebuah titik diantara tiap-tiap pasangan dari titik-titik graf yang berhubungan langsung pada sikel luar. Banyak titik graf gir adalah $2n + 1$ sedangkan banyak sisinya adalah $3n$.

Definisi 6

Untuk $n \geq 2$, Graf Persahabatan (Friendship Graph) F_n adalah graf yang didapat dengan cara menghapus $n/2$

sisi pada bagian sikel graf roda. Graf sahabat hanya bisa didapatkan dari graf roda dengan n genap, banyak titik graf persahabatan adalah $2n + 1$ sedangkan banyak sisinya adalah $3n$.

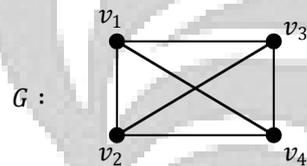
Definisi 7

Graf G dikatakan dapat difaktorkan ke dalam faktor-faktor G_1, G_2, \dots, G_t . jika faktor-faktor tersebut merupakan sisi yang saling lepas untuk setiap pasangan sisi dan $\cup_{i=1}^t E(G_i) = E(G)$. Jika G difaktorkan kedalam G_1, G_2, \dots, G_t , maka dituliskan dengan $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_t$ dan disebut sebagai faktorisasi G .

Jika terdapat faktorisasi dari graf G sedemikian hingga untuk setiap faktor adalah k -faktor (k -faktor adalah graf bagian rentang beraturan- k), maka G dikatakan k -faktor. Jika G adalah graf k -faktor, maka G adalah graf beraturan- r untuk bilangan bulat r yang merupakan kelipatan k .

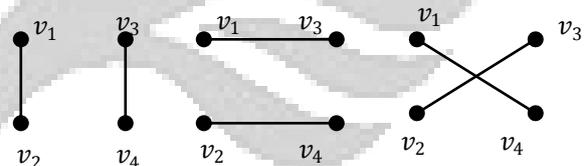
Jika graf G dapat difaktorkan kedalam G_1, G_2, \dots, G_t di mana $G_i = H$ untuk sebuah graf H untuk setiap bilangan bulat i ($1 \leq i \leq t$), maka kita katakan bahwa G adalah terfaktorasi- H dan G memiliki faktor yang isomorfik dengan H .

Contoh



Gambar 2. 1 Graf G

Bentuk faktorisasi graf komplit G adalah sebagai berikut:



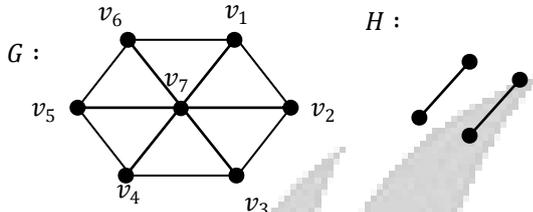
Gambar 2. 2 Faktorisasi Graf G

Definisi 8

Dekomposisi graf G adalah koleksi subgraf dari G tak kosong $\{H_i\}$ sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$, untuk suatu subgraf tak-kosong E_i dari $E(G)$, dimana $\{E_i\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Subgraf H_i pada dekomposisi G tidak memuat titik terisolasi. Jika $\{H_i\}$ adalah sebuah dekomposisi dari G , maka dinotasikan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ sama seperti pada faktorisasi dan G didekomposisikan ke dalam subgraf H_1, H_2, \dots, H_t di mana $|\{H_i\}| = t$. Dengan kata lain jika $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ adalah dekomposisi dari graf G . Jika $\{H_i\}$ adalah dekomposisi graf G sedemikian hingga $H_i = H$ untuk sebuah graf H dan untuk setiap i , maka G

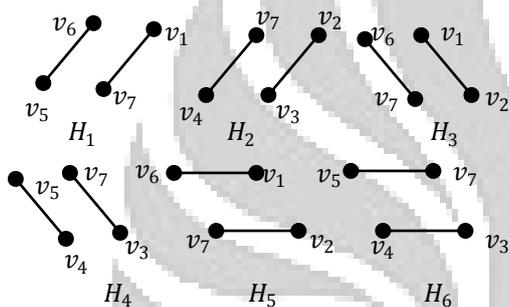
dikatakan H –dekomposisi. Jika G merupakan graf H -dekomposisi, maka dinotasikan $H|G$ sehingga H dapat dikatakan pembagi banyaknya sisi di G dan G merupakan kelipatan dari H dan untuk setiap graf (tak kosong) merupakan K_2 –dekomposisi.

Contoh



Gambar 2. 3 Graf G

Partisi sisi-sisi dari graf G ditunjukkan sebagai berikut :



Gambar 2. 4 Dekomposisi graf G

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa diperoleh 6 partisi dengan masing-masing partisi terdiri dari 2 sisi . Jika $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ maka G dapat didekomposisikan.

3. PEMBAHASAN

Sebuah graf G di dekomposisikan ke dalam subgraf H_1, H_2, \dots, H_n jika ada dua subgraf H_i dan H_j yang tidak mempunyai sisi-sisi yang sama dan dimana setiap subgrafnya isomorfis serta penjumlahan semua subgraf H_i adalah graf G .

3.1 Dekomposisi Graf Sikel

Misalkan diambil graf sikel C_n dengan $3 \leq n \leq 9$, kemudian graf sikel C_n dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 .

Tabel 3.1 dekomposisi dari graf sikel C_n

Graf Sikel	Dekomposisi	H- dekompos isi	Banyaknya sisi dan titik
C_3	$C_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 2$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 1$
C_4	$C_4 = H_1 \oplus H_2$ (2 partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = 4$

	$C_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$	$H_i = K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = 2$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = 1$
C_5	$C_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$	$H_i = K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = 2$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = 1$
C_6	$C_6 = H_1 \oplus H_2$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = 3$
	$C_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$	$H_i = 2K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 2$
C_7	$C_7 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7$	$H_i = K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = V(H_6) = V(H_7) = 2$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = E(H_6) = E(H_7) = 1$
C_8	$C_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$	$H_i = 2K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = 2$
	$C_8 = H_1 \oplus H_2$	$H_i = 4K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = 4$
C_9	$C_9 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 \oplus H_8 \oplus H_9$	$H_i = K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = V(H_6) = V(H_7) = V(H_8) = V(H_9) = 2$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = E(H_6) = E(H_7) = E(H_8) = E(H_9) = 1$
	$C_9 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 3$

Berdasarkan Tabel 3.1 maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.1

Misalkan $m|n$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, graf sikel C_n merupakan mK_2 -dekomposisi.

Bukti

Ambil sebarang graf sikel C_n dengan $n \geq 3$

Misal $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(C_n) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ dimana $e_1 = (v_n, v_1)$ dan $e_{(i+1)} = (v_i, v_{(i+1)})$, $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Kemudian graf sikel C_n dipartisi menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa K_2 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$

Misalkan $|E(H_i)| = m$ dan $|V(H_i)| = 2m$, karena $|E(H_i)| = m$ maka H_i dapat didekomposisikan sebanyak m .

Karena $m|n$ maka ada $p \in \mathbb{N}, \exists n = p \cdot m$ sehingga $p = \frac{n}{m}$. Misalkan $C_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_p$, dimana $p = \frac{n}{m}$, $p \in \mathbb{N}$, maka akan dikonstruksi sebanyak p subgraf yang saling lepas.

Sehingga menentukan partisi graf sikel C_n sebagai berikut. Misal $i = 1, 2, 3, \dots, p - 1$

$$H_i = \{e_j : j = i \pmod{p}\}, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

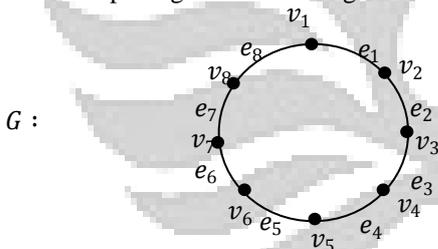
$$H_p = \{e_k : k = 0 \pmod{p}\}, k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Untuk menunjukkan untuk setiap $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$, andaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$.

Berdasarkan definisi jika $e_k \in H_i$ maka $k = i \pmod{p}$ dan $e_k \in H_j$ maka $k = j \pmod{p}$, akibatnya $i = j$ kontradiksi dengan yang diketahui yaitu $i \neq j$. Oleh karena itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$. Untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, p - 1, |E(H_i)| = m$ dan $C_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_p$ maka C_n merupakan mK_2 -dekomposisi.

Contoh

Misal graf G adalah graf sikel C_n , dengan $n = 8, C_8 = (V(C_8), E(C_8))$ dengan $E(C_8) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Graf G dapat digambarkan sebagai berikut:



Karena $m|n$ dan $m \neq n$ jika $n = 8$, maka $m = 4$ dan $p = 2$ atau $m = 2$ dan $p = 4$ atau $m = 1$ dan $p = 8$.

Untuk $m = 2$ dan $p = 4$ Sehingga G dapat dipartisi sebagai berikut : $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ Maka untuk $i = 1, H_1 = \{e_j : j = 1 \pmod{4}\}$, maka untuk subgraf dari e_j yaitu bilangan 1 dan 5 sehingga

$$H_1 = \{e_1, e_5\}$$

Untuk $= 2, H_2 = \{e_j : j = 2 \pmod{4}\}$, maka untuk subgraf dari e_j yaitu bilangan 2 dan 6 sehingga

$$H_2 = \{e_2, e_6\}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh :

$$H_3 = \{e_3, e_7\}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Untuk $H_4 = \{e_k : k = 0 \pmod{4}\}$, maka untuk subgraf dari e_k yaitu bilangan 4 dan 8 sehingga

$$H_4 = \{e_4, e_8\}$$

Maka $|E(H_i)| = 2, H_i = K_2 \oplus K_2$ dan $C_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$

Karena $= 2$, maka C_8 didekomposisikan sebanyak $2K_2$. Sehingga C_8 merupakan $2K_2$ dekomposisi.

Untuk $m = 4$ dan $p = 2$

Sehingga G dapat dipartisi sebagai berikut :

$$i = 1, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka untuk $H_1 = \{e_j : j = 1 \pmod{2}\}$, maka untuk subgraf dari e_j yaitu bilangan 1, 3, 5 dan 7 sebagai $1 \pmod{2}$ sehingga

$$H_1 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Untuk $H_2 = \{e_k : k = 0 \pmod{2}\}$, maka untuk subgraf dari e_k yaitu bilangan 2, 4, 6 dan 8 sebagai $0 \pmod{2}$ sehingga

$$H_2 = \{e_2, e_4, e_6, e_8\}$$

Maka $|E(H_i)| = 4, H_i = K_2 \oplus K_2 \oplus K_2 \oplus K_2$ dan $G = H_1 \oplus H_2$ Karena $m = 4$, maka G didekomposisikan sebanyak $4K_2$, Sehingga C_8 merupakan $4K_2$ dekomposisi.

Untuk $m = 1$ dan $p = 8$

Sehingga G dapat dipartisi sebagai berikut :

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka untuk $i = 1, H_1 = \{e_j : j = 1 \pmod{8}\}$, maka untuk subgraf dari e_j yaitu bilangan 1 sehingga

$$H_1 = \{e_1\}$$

Untuk $= 2, H_2 = \{e_j : j = 2 \pmod{8}\}$, maka untuk subgraf dari e_j yaitu bilangan 2 sehingga

$$H_2 = \{e_2\}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh :

$$H_3 = \{e_3\}, H_4 = \{e_4\}, H_5 = \{e_5\}, H_6 = \{e_6\}, H_7 = \{e_7\}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Untuk $H_8 = \{e_k : k = 0 \pmod{8}\}$, maka untuk subgraf dari e_k yaitu bilangan 8 sehingga

$$H_8 = \{e_8\}$$

Maka $|E(H_i)| = 2, H_i = K_2$ dan $C_8 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 \oplus H_8$

Karena $= 1$, maka C_8 didekomposisikan sebanyak K_2 . Sehingga C_8 merupakan K_2 dekomposisi.

Akibat 1

Setiap graf sikel C_n dengan n adalah bilangan prima maka graf sikel C_n hanya merupakan K_2 -dekomposisi.

Bukti :

Berdasarkan definisi untuk setiap graf (tak kosong) yang tidak memuat titik terisolasi merupakan K_2 -dekomposisi maka graf sikel C_n merupakan K_2 -dekomposisi.

Misalkan n merupakan bilangan prima maka faktor dari n hanya 1 dan n

Berdasarkan teorema 3.1 Misalkan $m|n, n, m \in \mathbb{N}, m \neq n$ maka graf sikel C_n merupakan mK_2 -dekomposisi. Karena $m \neq n$ maka faktor dari n hanyalah 1 sehingga graf sikel C_n hanya merupakan K_2 -dekomposisi. Karena faktor dari n hanyalah 1 dan n maka $\forall p \in \mathbb{N}, p \neq n, 1 \neq n$, maka $p \nmid n$ sehingga diperoleh C_n bukan pK_2 -dekomposisi. Dengan demikian C_n dengan n prima hanya merupakan K_2 -dekomposisi.

3.2 Dekomposisi Graf Roda

Misalkan diambil graf roda W_n dengan $n \geq 3$, kemudian graf roda W_n dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 .

Tabel 3.2 dekomposisi dari graf roda W_n

Graf Roda	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyaknya titik dan sisi
W_3	$W_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = 4$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = 2$
W_4	$W_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ (4 partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = 4$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = 2$
W_5	$W_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ (5 partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = 4$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = 2$
W_6	$W_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ (6 partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(H6) = 4$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(H6) = 2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
W_n	$W_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus \dots \oplus H_n$ (n partisi)	$H_i = 2K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(H6) = \dots = V(Hn) = 4$ $ E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(H6) = \dots = E(Hn) = 2$

Berdasarkan Tabel 3.2 maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.2

Graf roda $W_n, n \geq 3$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi

Bukti

Ambil sebarang graf roda W_n

Misal $V(W_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}\}$

$$E(W_n) = \{e_1, e_2, e_3, e_n, \dots, e_{2n-1}, e_{2n}\}$$

Partisi graf roda W_n menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa K_2 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$

$$\text{Misalkan } W_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$$

Partisi graf roda W_n sebagai berikut :

untuk $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

Subgraf $H_i = \langle \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+2}, v_{n+1})\} \rangle$, dimana setiap $i + 1, i + 2 < n$ maka $i + 1$ dan $i + 2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, n \pmod n$.

Untuk menunjukkan setiap sugraf saling lepas dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Andaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Jika $e_k \in H_i$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_i, v_{i+1})$ atau (v_{i+2}, v_{n+1}) dan $e_k \in H_j$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_j, v_{j+1})$ atau (v_{j+2}, v_{n+1}) .

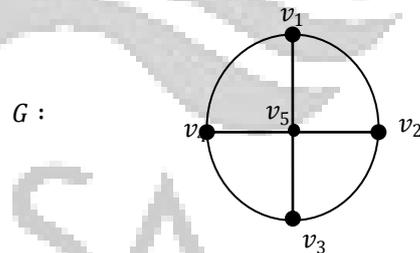
Akibatnya $(v_i, v_{i+1}) = (v_j, v_{j+1})$ dan $(v_{i+2}, v_{n+1}) = (v_{j+2}, v_{n+1})$ maka $j = i$. Jika $i = j$ maka setiap $i + 1, i + 2 < n$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, n \pmod n$ sehingga tidak ada sisi yang sama pada setiap subgraf. Oleh karena itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$ kontradiksi dengan pengandaian. Dengan demikian untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dan $W_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$ maka W_n merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

Contoh

Diberikan graf roda $W_4; n = 4$

Misal $G = W_4$

Dapat digambarkan sebagai berikut:



Titik-titik dari G adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

Untuk $i = 1, 2, 3, 4$ maka

$$H_1 = \langle \{(v_1, v_2), (v_3, v_5)\} \rangle$$

$$H_2 = \langle \{(v_2, v_3), (v_4, v_5)\} \rangle$$

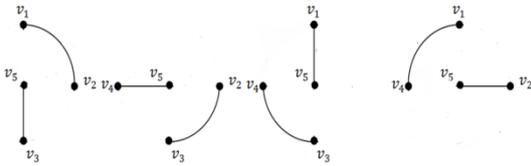
$H_3 = \langle \{(v_3, v_4), (v_5, v_5)\} \rangle$ karena $i + 2 > n$, maka untuk titik v_5 yaitu bilangan 5 diambil sebagai $1 \pmod 4$ sehingga :

$$H_3 = \langle \{(v_3, v_4), (v_1, v_5)\} \rangle$$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh :

$$H_4 = \langle \{(v_4, v_1), (v_2, v_5)\} \rangle$$

Sehingga dekomposisi dari G



Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ dimana setiap subgraf H_i didekomposisi sebanyak 2 yang berupa K_2 . Sehingga W_4 merupakan $2K_2$ -dekomposisi.

3.3 Dekomposisi Graf Gir

Misalkan diambil graf gir G_n dengan $n \geq 3$, kemudian graf gir G_n dipartisi menjadi subgraf H_i berupa K_2 .

Tabel 3.3 dekomposisi dari graf gir G_n

Graf Gir	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak titik dan sisi
G_3	$G_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = 6$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = 3$
G_4	$G_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ (4 partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = 6$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = 3$
G_5	$G_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ (5 partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = 6$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = 3$
G_6	$G_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ (6 partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(H6) = 6$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(H6) = 3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
G_n	$G_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus \dots \oplus H_n$ (n partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(H6) = \dots = V(Hn) = 6$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(H6) = \dots = E(Hn) = 3$

Berdasarkan Tabel 3.3 maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.3

Graf gir $G_n, n \geq 3$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi

Bukti

Ambil sebarang graf gir G_n

Misal $V(G_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, v_{2n+1}\}$

$E(G_n) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{3n-1}, e_{3n}\}$

Partisi graf gir G_n menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa K_2 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$

Misalkan $G_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$

partisi graf gir G_n sebagai berikut.

untuk $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$, sehingga subgraf H_i sebagai berikut :

$$H_i = \langle \{(v_{2i-1}, v_{2i}), (v_{2i+1}, v_{2n+1}), (v_{2i+2}, v_{2i+3})\} \rangle$$

dimana setiap $2i + 1, 2i + 2, 2i + 3 > 2n$ maka $2i + 1, 2i + 2$ dan $2i + 3$ dinyatakan sebagai bilangan bulat

$1, 2, 3, \dots, 2n \pmod{2n}$, Untuk menunjukkan bahwa pada setiap subgraf H_i saling lepas dimana $i \neq j$ maka

$H_i \cap H_j = \emptyset$. Andaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$.

Jika $e_k \in H_i$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_{2i-1}, v_{2i})$ atau (v_{2i+1}, v_{2n+1}) atau (v_{2i+2}, v_{2i+3}) dan $e_k \in H_j$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_{2j-1}, v_{2j})$ atau (v_{2j+1}, v_{2n+1}) atau (v_{2j+2}, v_{2j+3}) .

Akibatnya $(v_{2i-1}, v_{2i}) = (v_{2j-1}, v_{2j})$, $(v_{2i+1}, v_{2n+1}) = (v_{2j+1}, v_{2n+1})$ dan $(v_{2i+2}, v_{2i+3}) = (v_{2j+2}, v_{2j+3})$, maka $i = j$.

Jika $i = j$ maka setiap $2i + 1, 2i + 2, 2i + 3 > 2n$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, 2n \pmod{2n}$ sehingga tidak ada sisi yang sama pada setiap subgraf. Oleh karena itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$ kontradiksi dengan pengandaian.

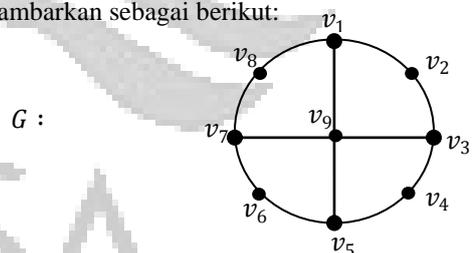
untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$, dan $G_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n |E(H_i)| = 3$ maka G_n merupakan $3K_2$ dekomposisi.

Contoh

Diberikan graf gir $G_4; n = 4$

Misal $G = G_4$

Dapat digambarkan sebagai berikut:



Titik – titik dari G adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

Untuk $i = 1, 2, 3, 4$ maka

$$H_1 = \langle \{(v_1, v_2), (v_3, v_9), (v_4, v_5)\} \rangle$$

$$H_2 = \langle \{(v_3, v_4), (v_5, v_9), (v_6, v_7)\} \rangle$$

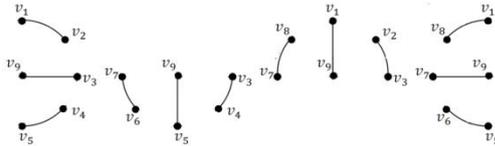
$H_3 = \langle \{(v_5, v_6), (v_7, v_9), (v_8, v_9)\} \rangle$ karena $2i + 3 = 2n + 1$, maka untuk titik v_9 yaitu bilangan 9 diambil sebagai $1 \pmod{8}$ sehingga :

$$H_3 = \langle \{(v_5, v_6), (v_7, v_9), (v_8, v_1)\} \rangle$$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh :

$$H_4 = \langle \{(v_7, v_8), (v_1, v_9), (v_2, v_3)\} \rangle$$

Sehingga dekomposisi dari G



Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ dimana setiap subgraf H_i didekomposisi sebanyak 3 yang berupa K_2 . Sehingga G_4 merupakan $3K_2$ - dekomposisi.

3.4 Dekomposisi graf pada graf persahabatan F_n

Misalkan diambil graf persahabatan F_n dengan $n \geq 2$, kemudian graf persahabatan F_n dipartisi menjadi subgraf H_i berupa C_3 .

Graf persahabatan	Dekomposisi	H-dekomposisi	Banyak titik dan sisi
F_2	$F_2 = H_1 \oplus H_2$ (2 partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = 3$
F_3	$F_3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = 3$
F_4	$F_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ (4 partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = 3$
F_5	$F_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$ (5 partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = 3$
F_6	$F_6 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ (6 partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(H6) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(H6) = 3$
F_n	$F_n = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ (n partisi)	$H_i = C_3$	$ V(H1) = V(H2) = V(H3) = V(H4) = V(H5) = V(Hn) = 3$ $ E(H1) = E(H2) = E(H3) = E(H4) = E(H5) = E(Hn) = 3$

Berdasarkan Tabel 3.3 maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.4

Graf persahabatan $F_n, n \geq 2$ merupakan C_3 - dekomposisi

Bukti

Ambil sebarang graf persahabatan F_n

Misal $V(F_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, v_{2n+1}\}$

$E(F_n) = \{e_1, e_2, e_3, e_n, \dots, e_{3n-1}, e_{3n}\}$

Partisi graf persahabatan F_n menjadi subgraf - subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berupa C_3 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$

Misalkan $F_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$.

Menentukan partisi graf persahabatan F_n sebagai berikut untuk $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

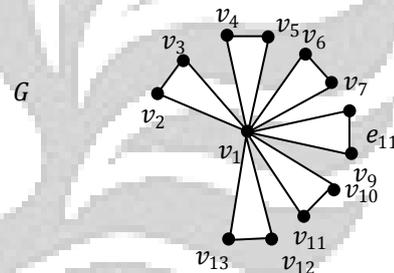
Subgraf $H_i = \langle \{(v_1, v_{2i}), (v_{2i}, v_{2i+1}), (v_{2i+1}, v_1)\} \rangle$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Untuk menunjukkan bahwa pada setiap subgraf H_i saling lepas, dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Andaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini berarti bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Jika $e_k \in H_i$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_1, v_{2i}), (v_{2i}, v_{2i+1}), (v_{2i+1}, v_1)$ dan $e_k \in H_j$ berdasarkan definisi maka $e_k = (v_1, v_{2j}), (v_{2j}, v_{2j+1}), (v_{2j+1}, v_1)$. Akibatnya $(v_1, v_{2i}), (v_{2i}, v_{2i+1}), (v_{2i+1}, v_1) = (v_1, v_{2j}), (v_{2j}, v_{2j+1}), (v_{2j+1}, v_1)$, maka $i = j$ kontradiksi dengan yang diketahui yaitu $i \neq j$. Oleh karena itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$. $F_n = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_n$ dan H_i berupa C_3 maka F_n merupakan C_3 - dekomposisi.

Contoh

Diberikan graf persahabatan $F_6; n = 6$

Misal $F = F_6$

Dapat digambarkan sebagai berikut:



Titik - titik dari G adalah

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$

Untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ maka

$H_1 = \langle \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \rangle$

$H_2 = \langle \{(v_1, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\} \rangle$

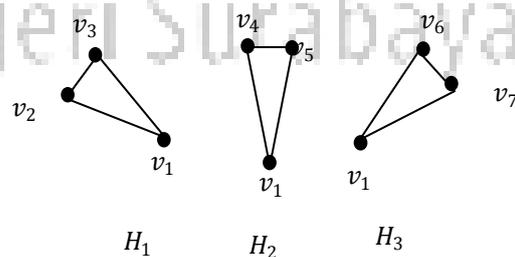
$H_3 = \langle \{(v_1, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_1)\} \rangle$

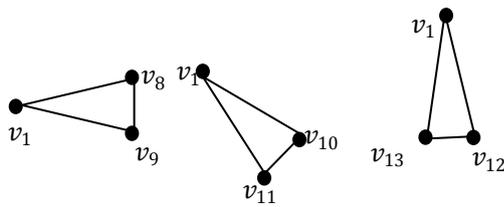
$H_4 = \langle \{(v_1, v_8), (v_8, v_9), (v_9, v_1)\} \rangle$

$H_5 = \langle \{(v_1, v_{10}), (v_{10}, v_{11}), (v_{11}, v_1)\} \rangle$

$H_6 = \langle \{(v_1, v_{12}), (v_{12}, v_{13}), (v_{13}, v_1)\} \rangle$

Sehingga dekomposisi dari G sebagai berikut



 H_4 H_5 H_6

Karena $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$ dimana setiap subgraf H_i berupa C_3 . Sehingga F_6 merupakan C_3 -dekomposisi.

4 PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Misalkan $m|n$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, graf sikel C_n merupakan mK_2 -dekomposisi
2. Graf roda W_n , $n \geq 3$ merupakan $2K_2$ -dekomposisi
3. Graf gir G_n , $n \geq 3$ merupakan $3K_2$ -dekomposisi
4. Graf persahabatan F_n , $n \geq 2$ merupakan C_3 -dekomposisi

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah dekomposisi pada graf roda W_n , graf gir G_n , dan graf persahabatan F_n . Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah dekomposisi pada graf-graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, Ketut. 2003. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Munawaroh, Rina. 2009. *Dekomposisi Graf Komplit*. <http://lib.uinmalang.ac.id/files/thesis/fullchapter/04510046.pdf>. Diunduh pada tanggal 10 Januari 2014.
- Jacobson, M.S., Truszczynski, M. and Tuza, Zs., 1991. *Decompositions of regular bipartite graphs*, *Discrete Mathematics*, <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/dm/dm89.html#JacobsonTT91>. Diakses pada tanggal 11 Februari 2014.
- Nurainiyah, Lam'atun. 2011. *Pelabelan Konsektif Pada Graf Roda, Graf Sahabat, Graf Prisma dan Graf Buku*. Surabaya. Skripsi tidak dipublikasikan.
- Nugraheni, Liknin. *Faktorisasi Pada Graph*. <http://digilib.unipasby.ac.id/files/disk1/8/gdlhub--likninnugr-383-1-likninn-i.pdf> Diunduh pada tanggal 11 Februari 2014.

Lasmoko, Tri. *Chapter III Faktorisasi Graph Regular* http://eprints.undip.ac.id/32353/6/M94_Tri_Lasmoko_chapter_III.pdf Diunduh pada tanggal 7 April 2014.